

准静态侵入颗粒介质的底边界效应仿真分析^{*}

郑宇馨 曾祥远[†]

(北京理工大学 自动化学院,北京 100081)

摘要 论文基于球形离散元方法研究颗粒介质的底边界效应,仿真刚体圆柱准静态侵入有限厚度颗粒介质直至底边界的过程,探究侵入物所受阻力与侵入深度间关系.结果表明,圆柱准静态侵入颗粒层至池底的阻力-深度曲线,前段呈类静水压力线性,接近底边界的后段呈类指数增长形式;在距底数个粒径范围内阻力存在波动,波长近似颗粒直径.与圆柱底固连的倒锥形固化区颗粒存在动态更新,侵入接近底边界时固化区瓦解,局部颗粒阻塞与疏通决定阻力增长趋势;圆柱底面以下的颗粒力链在接近底边界时转化为圆柱底与颗粒池底之间的“底-底”力链,力链受挤压后平均颗粒数的递减很好地解释了阻力振荡的波动性.

关键词 颗粒介质, 准静态侵入, 底边界效应, 介观力链, 离散元仿真

中图分类号:TP391.9

文献标志码:A

Numerical Study on Bottom Boundary Effect in Quasi-Static Intrusion into Granular Media^{*}

Zheng Yuxin Zeng Xiangyuan[†]

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract Based on the spherical discrete element method, this paper studies the bottom boundary effect of granular media, simulates the quasi-static intrusion of rigid body cylinders into particle media with limited thickness to the bottom boundary, and explores the relationship between the resistance of intruder and the depth of intrusion. The results show that the resistance-depth curve of the cylindrical quasi-static intrusion particle layer to the bottom of the pool has a linear hydrostatic pressure in the front section and an exponential growth form in the back section near the bottom boundary. However, there are fluctuations in resistance within a few particle sizes from the bottom, and the wavelength is approximately the same length as the particle diameter. Furthermore, the particles in the inverted conical curing zone connected to the cylindrical bottom have dynamic renewal. The curing zone collapses when the intrusion is close to the bottom boundary, where the local particle blocking determines the resistance growth trend. Additionally, the particle force chain below the bottom of the cylinder is transformed into a “bottom-bottom” force chain between the bottom of the cylinder and the bottom of the particle pool when it approaches the bottom boundary. The decrease in the average number of particles after the force chain is squeezed explains the volatility of the resistance oscillation.

Key words granular media, quasi-static intrusion, bottom boundary effect, mesoscopic force chain, discrete element simulation

2023-06-27 收到第 1 稿,2023-09-08 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12222202)和北京理工大学创新人才资助计划(2021CX01029),National Natural Science Foundation of China(12222202) and the Innovation Talent Funding Program of Beijing Institute of Technology(2021CX01029).

[†] 通信作者 E-mail:zeng@bit.edu.cn

引言

颗粒物质又称为散体介质,是由大量固体颗粒集合而成的宏观体系^[1,2]. 粮仓效应^[3]、巴西坚果效应^[4,5]、力链现象^[6]、成拱现象^[7]等各种有趣的性质,体现了颗粒体系丰富的力学行为. 颗粒物质会呈现具有固、液、气三相特征的独特运动规律,其复杂的本构特性仍待深入研究^[8].

传统行业中,农产品与工业原料的运输存储、沙土地质的钻探与勘测等领域,都离不开对颗粒物质的研究^[9,10]. 近年来机器人领域中,适应沙漠、沙地等特殊极端地形的仿生机器人成为热点^[11-14]. 在地球以外,行星和小天体上更不乏颗粒物质的身影. 嫦娥五号采集返回的月壤样品表明,径数微米到数十微米不等的月壤颗粒表面广泛分布着微撞击坑^[15]. 深空探测数据显示,小行星多由毫米级到米级碎石颗粒聚合而成,称为碎石堆结构,星表覆盖一层细致疏松的颗粒物质,称为风化层^[16-19]. 本文从小行星风化层着陆采样探测^[19]及仿生机器人与沙土接触探测任务中,抽象出刚体侵入有限层厚颗粒物质的科学问题,使用离散元方法研究底边界效应对侵入的影响机理.

准静态接触不涉及动态阻力的耦合效应,因此适于细致地研究颗粒力学响应. 国内外诸多实验或仿真研究表明,在远离边界条件下,准静态侵入刚体所受阻力与刺穿深度呈现线性相关^[20-23]. 颗粒在侵入物底面以下形成倒圆锥状固化区,其生长决定了初始阶段阻力的非线性增长暂态^[22]. 前人实验表明,侵入阻力受颗粒池底部边界表面的影响波及底部以上数个颗粒直径范围,阻力在底面附近呈指数级增长^[23-25]. 近年介观粒径尺度的研究不断发展,颗粒实验中借助光学镜头观测颗粒形变与受力情况^[6,26],使用声学探测捕捉颗粒的介观波动^[27];离散元仿真中模拟颗粒实验来研究介观力学响应,提取颗粒力链网络^[28,29]. 针对有边界颗粒介质的离散元仿真及其颗粒介观行为与力学响应目前研究较少,而这对于坚硬地表覆盖薄颗粒层的接触探测任务具有极大的参考价值.

本文目标为,研究不同颗粒层厚度下底边界对侵入阻力的影响,从颗粒位移与力链演变的介观尺度解释侵入阻力底边界效应的形成机制. 第1节给出离散元方法设定的接触模型及仿真参数,并验证

仿真环境的准静态性与可重复性. 第2节探究圆柱刚体准静态侵入有限层厚颗粒物质的阻力—深度曲线及其无量纲塌缩主曲线,第3节分析固化区颗粒触底瓦解过程、颗粒力链近底动态变化过程对侵入阻力的决定性作用,第4节给出结论.

1 离散元方法与仿真环境

本文使用开源的离散元仿真软件 MatDEM 模拟刚体竖直准静态穿透颗粒层的过程. 在底边长 $L_{\text{box}} = 360 \text{ mm}$ 的方形容器内,平铺堆积厚度 H 的颗粒层(H 取 71, 87, 101, 119, 160, 273 mm),颗粒层中心正上方竖直放置圆柱形的侵入刚体,从颗粒层上表面开始垂直向下匀速侵入,见图1. 颗粒干燥而无粘结,粒径呈高斯分布,直径范围 6.6 ~ 9.4 mm,平均直径 $d = 8 \text{ mm}$. 根据层厚不同,颗粒数量在 25894 ~ 73072 颗范围内. 圆柱体直径 $D = 60 \text{ mm}$,长度 $L = 120 \text{ mm}$,由 8208 个等径颗粒堆叠生成. 圆柱直径与颗粒盒底边长之比 $D/L_{\text{box}} = 1:6$,满足文献[21]中对于无侧边界影响的仿真环境要求;

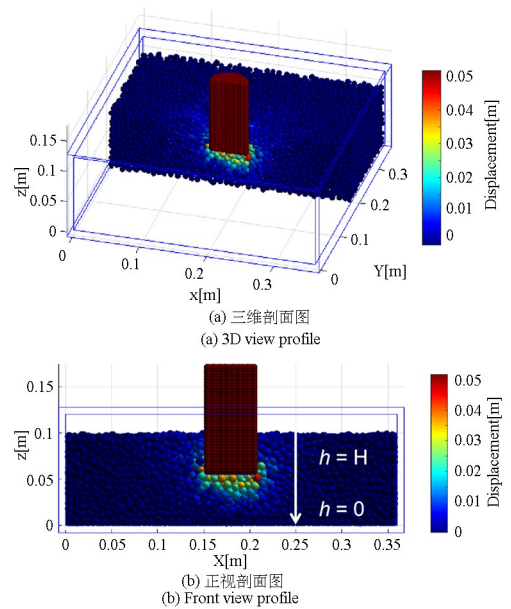


图1 准静态侵入颗粒介质示意图

Fig. 1 Sketch map of quasi-static intrusion into granular media

表1 颗粒参数表

Table 1 Parameters for granular material

Name	Value
d (mm)	6.6~9.4
ρ (g/cm ³)	1.52
K_n (kPa)	9.87~14.21
μ_p	0.12

圆柱长度略大于侵入颗粒层深度,保证其在侵入过程中上底面一直处于颗粒表层以上.颗粒材料的参数依照玻璃物质给出,侵入圆柱的材料参数依照钢铁给出,颗粒参数见表1.

单个颗粒质量分布均匀,其质心与球心重合.不考虑颗粒的姿态,将其视为质点考虑颗粒间的接触力,则颗粒所受合外力即质心受力的矢量和,单个颗粒质心微分动力学方程表示为:

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = \sum \mathbf{F}^{(e)} \quad (1)$$

其中 \mathbf{F} 为主矢, m 为质量, \mathbf{r} 为位矢, $\sum \mathbf{F}^{(e)}$ 为颗粒所受外力的矢量和.

离散元颗粒之间的接触力,主要包括法向和切向的弹性恢复力、粘滞耗散力,及切向静摩擦力或滑移产生的动摩擦力,还包括阻碍颗粒间相对滚动和扭转的摩擦力矩^[21,30],在MatDEM线弹性接触模型中,假定胶结颗粒之间依靠法向和切向线性弹簧表达接触力的作用^[31],本文干燥无粘性颗粒间不存在胶结作用,即等效弹簧为一端断开状态.颗粒间法向力 \mathbf{F}_n 和法向变形 \mathbf{X}_n 通过法向压力弹簧来模拟:

$$\mathbf{F}_n = \begin{cases} K_n \mathbf{F}_n & \mathbf{X}_n < 0 \\ 0 & \mathbf{X}_n \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 K_n 表示法向刚度, \mathbf{X}_n 表示法向相对位移,即两颗粒球心距离与半径之和之差. \mathbf{X}_n 为负表示一对颗粒相互接触,颗粒受法向弹簧的压力; \mathbf{X}_n 为正表明颗粒对之间无接触.

同理,无胶结的颗粒对之间切向弹簧也是断裂状态,相接触颗粒之间的剪切力 \mathbf{F}_s 为静摩擦力或滑动摩擦力:

$$\mathbf{F}_s = -\mu_p \mathbf{F}_n \quad (3)$$

另外,MatDEM采用全局阻尼力 \mathbf{F}_v 来模拟机械能的耗散,由以下公式给出:

$$\mathbf{F}_v = -\eta \mathbf{x}' \quad (4)$$

其中 η 为阻尼系数,采用半经验公式获得最优阻尼^[32,33], \mathbf{x}' 为颗粒当前时刻的速度.

为提高仿真效率,在合理范围内将材料的刚度进行适当软化,并适当倍增时间步,最终确定仿真步长为 6×10^{-5} s.在准静态侵入之前,先删除部分颗粒保证颗粒表层平整,再让颗粒在重力作用下静置平衡20s,使得系统动能减至初始状态5%以下,颗粒的内部堆积完全稳定,此时颗粒填充分数 φ 为58.92%.

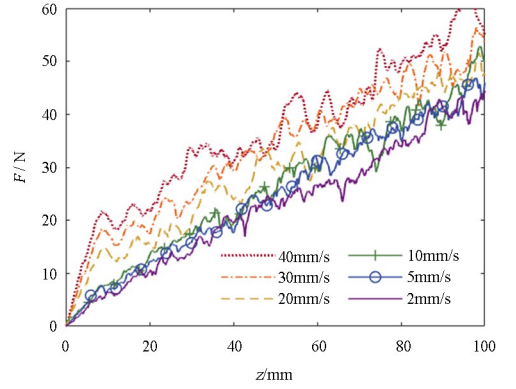


图2 可重复性与准静态合理性验证

Fig. 2 Validation of repeatability and quasi-static rationality

颗粒体系的准静态侵入速度临界值 $v_c = \sqrt{gr}/5$,其中 g 为重力加速度, r 为颗粒体系平均半径^[22].在仿真中,侵入速度的取值通常比经验公式的计算结果更小.例如,对于半径在0.1~2mm的更小颗粒体系,准静态侵入速度一般取0.2~2mm/s^[21].为了便于研究颗粒的介观行为,本文选取的颗粒半径相对较大, $r = 4$ mm,计算得到的准静态侵入速度 $v_c < 39.6$ mm/s.为了验证本仿真实验的可重复性和准静态条件的合理性,并选择最优侵入速度,使圆柱刚体分别以2~40mm/s的不同速度,匀速侵入厚度 $H = 273$ mm的颗粒床,侵入深度100mm.这既保证了圆柱上表面不会没入颗粒中,也保证侵入活动不受底边界存在的影响.

侵入物所受颗粒阻力 F 随侵入深度 z 的变化如图2所示.图2中 $F-z$ 曲线在起始处有一个快速上升的暂态区,之后进入线性区,阻力随深度的增加而线性增大.结果显示即使在经验公式允许的准静态范围内,相对较大的侵入速度仍能给阻力带来明显的速度依赖项,这项额外的阻力增加于暂态区,持续留存于线性区.侵入速度过大还致使线性区阻力的波动更加明显.线性区的斜率与侵入速度无关,在同一仿真环境下,不同的侵入速度得到的阻力曲线斜率几乎一致.为了既保证准静态的侵入条件,又保证阻力曲线相对较为平滑,需选择比经验公式更严苛的侵入速度,下文未作特别说明时仿真中侵入速度均为5mm/s.

在远离颗粒池侧边界和底边界的理想状态下,准静态侵入颗粒介质的阻力 F 满足 $F = \alpha_0 \mu_0 \rho \varphi g D^2 z$,其中 α_0 是无量纲拟合系数.本仿真计算得 $\alpha_0 = 13.32$,数量级符合文献^[21]范围;阻力曲线的转折与走势符合文献^[22]的实验结果,表明本文仿真参数选取

是合理有效的。

2 准静态刺穿颗粒层阻力曲线

为了研究刚体准静态侵入颗粒物质直至刺穿的底边界效应,设置厚度 $H = 71 \sim 160 \text{ mm}$ 浅颗粒层,圆柱以 5 mm/s 的速度持续侵入颗粒层至池底,如图 1(a)所示.值得注意的是, h 表示圆柱底较颗粒池底的相对高度,即 $h = H$ 表示圆柱底位于颗粒的上表层, $h = 0$ 表示圆柱底位于颗粒池最低处,则整个侵入过程可以用 $h(H \rightarrow 0)$ 来表示,如图 1(b)所示.

对比分析图 3 中颗粒层厚度 H 分别为 $71 \sim 160 \text{ mm}$ 的侵入阻力 F 随相对高度 h 变化曲线,在前中段 $F-h$ 曲线与无底边界阻力曲线一致,呈类静水压力线性;侵入后段阻力呈周期性波动的类指数增加形式.距离底面 6 个颗粒直径范围内,阻力曲线的波动明显增加;在距离底面 $1 \sim 3$ 个颗粒直径内阻力产生 2 次主波动,周期均接近颗粒直径 d ;而在距离底面 1 个颗粒直径内,侵入物无法排开底层颗粒,如果继续侵入则底层颗粒被向下挤出池底,此时阻力不再由颗粒性质决定,而取决于框架材料的剪切强度.因此数据仅保留到底层颗粒未被挤出池底处,即 $h \in [d, H]$.

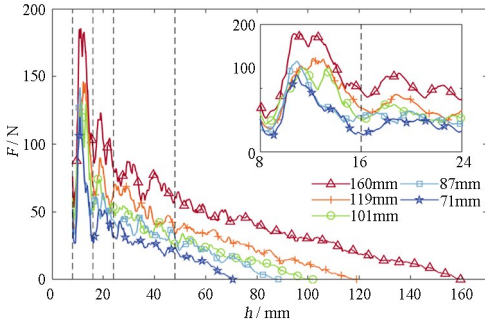


图 3 完全侵入过程中阻力与相对高度曲线

Fig. 3 Variational trend of resistance force and relative height during full intrusion

将图 2 无底边界效应的阻力曲线与图 3 完全侵入颗粒层的结果作对比,准静态侵入远离底面时,阻力 F 的深度依赖项 F_{depth} 组成了颗粒阻力的绝大部分;准静态侵入颗粒至池底时, F 叠加了深度依赖项 F_{depth} 和底面距离依赖项 F_{bottom} ,即:

$$F = F_{\text{depth}} + F_{\text{bottom}} \quad (5)$$

为了清晰显示距底面距离对于阻力的影响,对比分析 101 mm 浅颗粒层和 273 mm 深颗粒层分别准静态侵入 93 mm 的 $F-h$ 曲线,阻力曲线随侵入

深度的变化如图 4(a)所示.

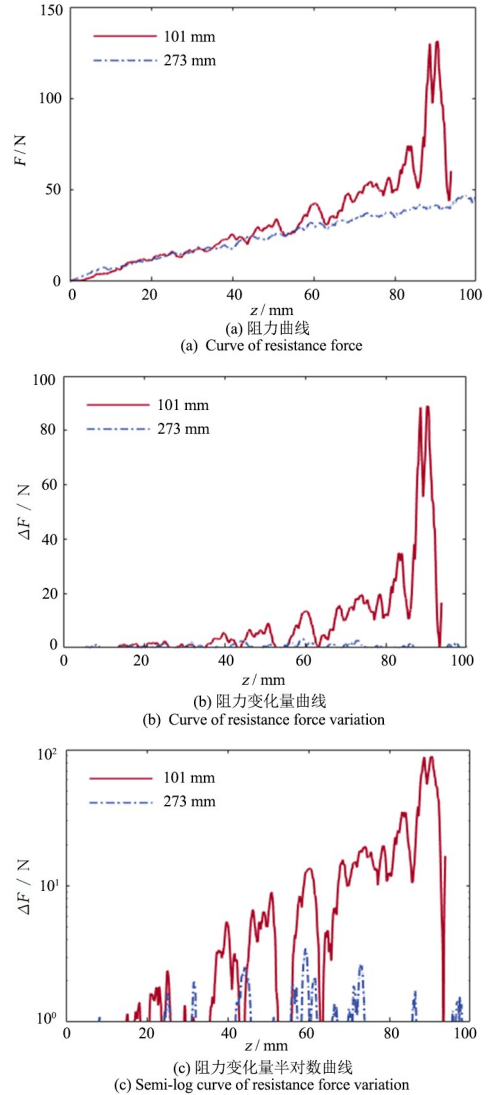


图 4 深浅颗粒层阻力与侵入深度曲线对比

Fig. 4 Comparison of resistance curve between deep and shallow particle layer and intrusion depth

用线性函数拟合准静态侵入 273 mm 颗粒池的阻力曲线,以此作为 F_{depth} ,将 101 mm 层厚侵入阻力与此依赖项作差,得到图 4(b)的 $\Delta F-h$ 曲线,并将变化量结果转至半对数平面即图 4(c).半对数曲线的局部峰值总体呈线性趋势,表明 F_{bottom} 可近似使用指数函数来描述,而阻力的波动用三角函数来拟合.拟合公式分别为:

$$F_{\text{depth}} = F_0 + K_d \cdot h \quad (6)$$

$$F_{\text{bottom}} = K_b \cdot \sin(\pi \cdot \Delta h / \lambda)^2 \cdot \exp(-\Delta h / \lambda) \quad (7)$$

其中 F_0 为阻力线性区的截距, K_d 为斜率,即阻力深度依赖项的比例系数, K_b 为阻力底面依赖项的比例系数, Δh 为当前侵入深度与底面之间的距离, $\Delta h = H - h$,波长 λ 为 1 个颗粒直径 d .在文献

[23]的拟合结果中,阻力的地面距离依赖项也由指数函数来描述,指数部分 λ 拟合数值取 1.5 层颗粒,本文仿真结果为 1 层,与之相符.下文以不同层厚颗粒仿真结果对式(6)、式(7)的拟合效果进行验证.

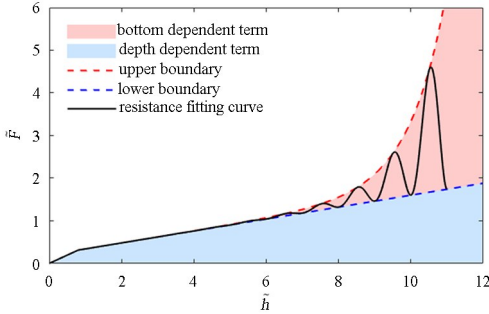


图 5 无量纲阻力曲线示意图

Fig. 5 Diagram of dimensionless resistance curve

根据经验和拟合公式,圆柱刚体准静态竖直侵入颗粒物质时所受阻力,与侵入深度、距底面距离、颗粒直径、颗粒性质和侵入物截面积等都相关.参考文献[20],式(6)中 $K_d = \alpha \cdot \mu_v \rho \phi g D^2$,根据量纲匹配原则,取式(7)中 $K_b = \beta \cdot \mu_v \rho \phi g D^2 \lambda$,其中 α 和 β 是量纲相同的拟合系数.为了过滤圆柱尺寸和材料性质对阻力的影响,聚焦关注颗粒的本质属性,对阻力曲线进行无量纲化处理.定义无量纲阻力 $\tilde{F} = F / (\mu_v \rho \phi g D^2 \lambda)$,无量纲侵入深度 $\tilde{h} = h / \lambda$.则当颗粒池 \tilde{h} 取 12 时, $\tilde{F}-\tilde{h}$ 曲线如图 5 所示.

阻力 \tilde{F} 与 \tilde{h} 高度的关系整理为:

$$\tilde{F} = \tilde{F}_0 + \alpha \tilde{h} + \beta \sin(\pi \cdot \Delta \tilde{h})^2 \cdot \exp(-\Delta \tilde{h}) \quad (8)$$

采用公式(8)拟合其他深度颗粒池完全侵入的阻力曲线,系数取值 $\alpha = 0.142, \beta = 12.81$ 时,对不同颗粒层厚的侵入阻力均能良好拟合.拟合的阻力均方根误差 RMSE(root mean square error)如表 2 所示,平均 RMSE 为 7.63 N,为平均峰值阻力的 5.26%,表明式(8)能够近似描述准静态侵入颗粒介质直至底边界的非线性阻力情况.

表 2 阻力拟合公式 RMSE 验证

Table 2 RMSE verification of the resistance force fitting formula

H (mm)	RMSE (a. u.)	RMSE (N)
71	0.215	6.52
87	0.312	9.47
101	0.227	6.88
119	0.308	9.34
160	0.196	5.96

圆柱刚体准静态侵入颗粒系统过程中,接近底边界的阻力曲线存在着明显的振荡过程,且振荡周期与颗粒直径相关.为了从介观角度解释阻力形成机制和阻力振荡现象产生原因,需要对颗粒仿真全过程中颗粒的位移情况、形成力链的动态发展作深入分析^[34].针对图 4 中 101mm 浅颗粒层和 273mm 深颗粒层两类侵入工况,对比研究圆柱接近底边界的过程中,颗粒运动学行为和力学响应相较于无底边界约束时侵入的异同.

3 边界效应机理探究

3.1 颗粒位移与固化区变化规律

准静态侵入颗粒物质的刚体,其底面以下的颗粒堆积形成倒锥状的固化区. Kang 等人的研究表明,侵入刚发生时,固化区的形成和生长对应于阻力曲线的暂态非线性增长段,固化区的稳定对应于阻力的线性段^[22].本文研究圆柱侵入物接近颗粒底边界时固化区的触底瓦解过程,这对应侵入阻力增大的非线性段.

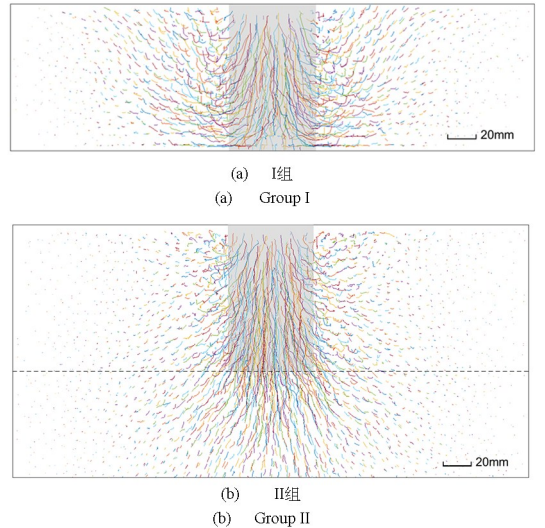


图 6 纵深 180~210mm 切片颗粒位移情况

Fig. 6 Particles displacement of section 180~210 mm in thickness

图 6 (a)、图 6 (b)分别展示了在厚度分别为 101mm(下称 I 组)和 273 mm(下称 II 组)的颗粒池中各准静态侵入 93mm 全过程的中段切片区域颗粒位移情况,其中灰色矩形为圆柱侵入经过区域,图 6(b)中黑色虚线为 I 组底面等效位置.在 I 组上半段和 II 组全过程中,都观察到灰区颗粒位移竖直向下、白区颗粒位移向外的趋势,其中向下位移明显的颗粒属于固化区.其次, I 组的下半段,

特别是接近颗粒池底面的区域,灰区颗粒位移方向逐渐转变为水平向外,这与 II 组等效高度以下的锥形区域内颗粒向下、锥形区域外颗粒向外的趋势有很大不同,这是因为侵入触底阶段时,原固化区成员因底边界的阻碍而运动转向。再次,无论是 I 组还是 II 组,竖直向下运动的颗粒在水平方向都存在着缓慢向外的趋势,表明固化区的颗粒成员也存在着缓慢更迭。另外,两组中白区颗粒向外运动的方向也略有不同, I 组中表现为径向分量向外、竖直分量向上,而 II 组中表现为径向分量向外、竖直分量向下,这是因为与 I 组相比, II 组颗粒池深处存在的孔隙在侵入过程中被适当压缩产生额外的容纳空间。

记准静态侵入速度为 v_i , 在 I 组侵入物底面以下区域寻找竖直向下速度分量 $v_z > 80\% v_i$ 的颗粒, 得到形如倒圆锥的颗粒固化区, 与侵入圆柱底面呈固连形态, 如图 7(a) 所示。固化区颗粒的竖直和水平速度分量 v_z 和 v_{xy} 着色图分别如图 7(b)、图 7(c) 所示, 颜色越深的颗粒表示速度分量越大。固化区上底颗粒 v_z 与侵入圆柱速度一致, 沿轴线至下顶 v_z 逐渐减小; 固化区轴线附近颗粒 v_{xy} 接近零, 向母线方向 v_{xy} 逐渐增大。固化区颗粒速度分布的较大差异, 表明其内部存在竖直及水平方向的颗粒间挤压与流动。

因上述速度差异, 倒圆锥状的固化区在竖直方向上, 靠近下顶点的颗粒向上底方向逐渐移动, 外来颗粒向固化区内部的流入主要发生在顶点附近; 水平方向上, 颗粒沿轴线向母线方向运动, 内部颗粒向固化区以外的流出主要发生在母线附近, 且靠近上底的区域流出速度更大。侵入物逐渐接近颗粒池底面时, 固化区与底面的水平接触面沿圆锥轴线方向从下顶点朝上底移动, 颗粒流入减小至零, 颗粒流出越来越集中于母线靠近上底的区域, 流出面减小的情况增大了颗粒流出的困难程度, 见图 8。可知侵入圆柱触底的过程即固化区瓦解的过程, 固

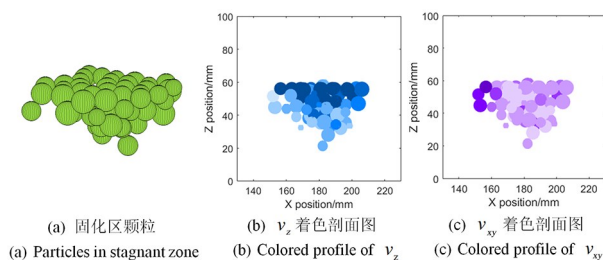


图 7 固化区颗粒分析图
Fig. 7 Particles in stagnant zone

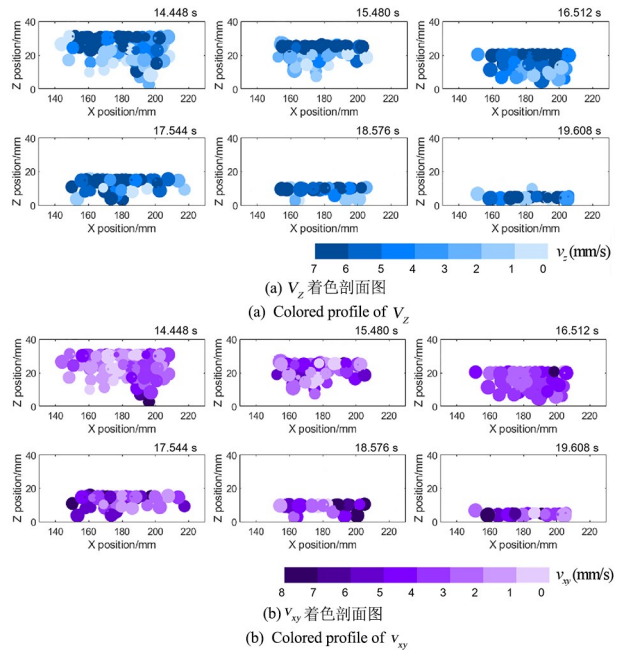


图 8 固化区瓦解动态过程
Fig. 8 Dynamic process of disorganization of stagnant zone

化区颗粒流入减少至零、颗粒流出受阻的情况造成了侵入阻力的局部增大。

3.2 介观力链与阻力形成机制

颗粒物质内部自组织形成了承担主要穿刺载荷的准线性力链和起支撑作用的颗粒网络^[29], 力链由单颗粒串联而成, 具有准直线、弱分叉、形态方向与外主应力相合的拓扑结构。力链反映了颗粒应对外载荷的力传递路径, 其介观位形的间歇性断裂与重构直接导致了颗粒体系应对外力产生的宏观阻力的波动, 是本节的研究重点。

颗粒实验中通过光学镜头捕捉颗粒受力情况, 根据颗粒主应力方向和接触力大小判断力链可能的方向, 根据质心连线与力的夹角判断力链是否成立^[6, 29]。本文借助 MatDEM 存储的颗粒接触邻接矩阵^[31-33]进行力链搜索, 算法流程如图 9 所示。与处理实验图像捕捉力链的方法相比, 仿真中力链搜索算法简便了接触力和力链方向的计算带来的复杂度。在初始化阶段, 根据颗粒间邻接矩阵及邻居颗粒间法向力、剪切力信息, 计算两两颗粒接触及接触力信息, 并筛选出作为力链开端的候选接触。然后在搜索阶段, 对当前颗粒搜索与之接触力最大的 2 个颗粒, 若其一为该颗粒的前辈, 则另一即为本力链的下一颗粒, 称为后辈。此时, 若当前颗粒与后辈之间的接触力大于平均接触力, 则将后辈更新

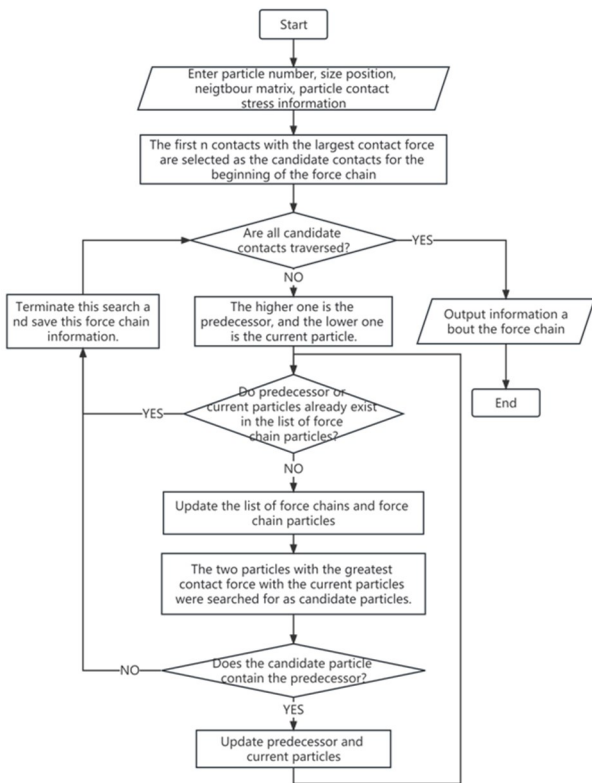


图 9 基于邻接矩阵的力链搜索算法

Fig. 9 Force chain search algorithm based on nearby matrix

为当前颗粒,继续本条力链的搜索,若不符合则终止本条力链.在遍历候选接触和搜索力链时,及时标记当前颗粒已存在于力链中,防止出现单个颗粒同时存在于多条力链中的情况.搜索结果为每条力链的组成颗粒及其位置和接触信息.

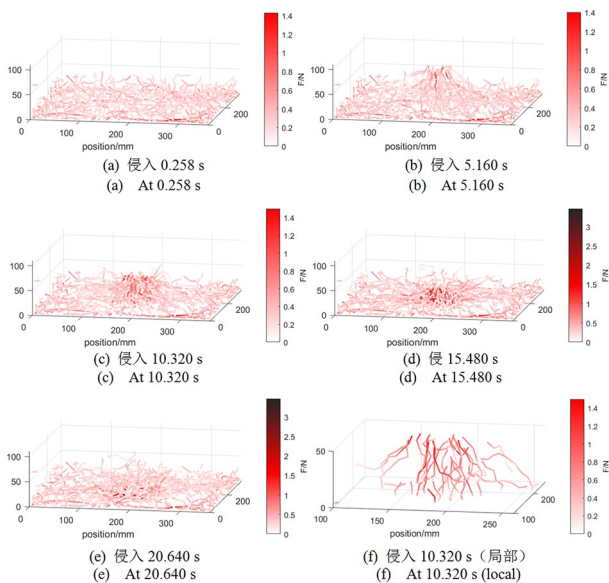


图 10 侵入过程不同时刻力链信息

Fig. 10 Force chain at different moments of intrusion

选择颗粒池深度 101mm 的完全侵入工况分析介观力链的生长与发展情况.仿真颗粒数为

25894 颗,选取接触力 $F_c > 4.5\bar{F}_c$ 的前 2000 个接触作为力链开始的候选接触,设置单条力链包含的颗粒数不大于 50 颗(当前研究搜索得到的单条力链最多 15 颗).侵入前、刚侵入、未触底、开始触底、完全触底的力链形态见图 10(a)~(e).无侵入时,颗粒池底自然形成力链;随后侵入圆柱的底面以下产生越来越强的力链,接触力幅值逐渐超过原有力链;当侵入接近颗粒底边界时,侵入圆柱底面至颗粒底边界之间形成了竖直方向的短力链,这些“底-底”力链的断裂与重构与侵入阻力的触底振荡有着极大的关系.由于“底-底”力链往往包含着力链中最大的那一部分接触力,因此可以减少作为力链开端的候选接触的个数至前 50 个,筛选出“底-底”力链,如图 10(f)所示.

通过追踪侵入过程中单个颗粒的行为,发现随着侵入的推进,圆柱底部正下方竖直“底-底”力链的平均颗粒数 l_c 不断减小,从数十减小到几个颗粒;而圆柱底部以外的下方,向水平方向延伸的力链长度不受影响,仍为数十颗粒. l_c 的减小意味着颗粒的向外排出,这符合固化区瓦解现象.根据力链的接触力与形态方向一致性特征,“底-底”力链主要传递竖直方向的压力,而实际情况下构力链的颗粒数只能为整数,因此 l_c 从 $n+1$ 减至 n 的过程即对应了一个侵入阻力振荡周期,约为 1 个颗粒直径,与阻力曲线相吻合,侵入高度、力链平均数、颗粒阻力的对应关系如表 3 所示.

表 3 “底-底”力链平均颗粒数
Table 3 Average particle number of force chain

h (mm)	F (N)	l_c (a. u.)
25.14	52.57	4.67
21.27	63.73	4.13
16.12	71.94	3.55
12.24	126.27	3.00
8.37	50.99	2.41

单条力链颗粒数的减少过程,可从力链的动态发展角度来解释.宏观上,在侵入的整个过程中,颗粒系统在不同时刻形成的力链是动态更新的,即单条力链中的颗粒成员并不固定,单个颗粒参与的力链也不固定,构力链的颗粒群体同样不固定.侵入圆柱准静态匀速前进过程中,每隔 0.25 s,力链平均更新 9.93% 的颗粒,按照颗粒一旦从力链中去便不会再次成为力链颗粒成员的假设,每隔 1 s,

力链将更新约 34% 的颗粒. 力链动态变化过程如图 11 所示, 红色表示编号 23288 颗粒, 蓝色表示它所处力链中的其他颗粒. 以编号为 23288 的颗粒为例, 它并非每个时刻都身强力链之中. 此颗粒参与的力链, 有时受挤压后改变方向、更新部分颗粒; 有时力链的中间颗粒被挤出, 力链其余颗粒挤压后继续连成力链. 由此可见, 底边界的存在限制了颗粒力链的生长, 极大影响了力链的动态发展, 改变了颗粒对侵入物的整体阻力.

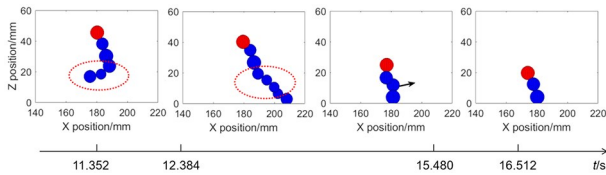


图 11 编号 23288 颗粒所处力链动态发展图

Fig. 11 Dynamic development diagram of the force chain involving No. 23288 particle

4 结论

论文研究了刚体准静态穿透有限厚度颗粒介质底边界效应的动力学规律, 并从颗粒运动与响应力链角度给出了作用力变化的机理. 针对不同厚度的颗粒介质应对圆柱刚体的准静态侵入产生的阻力响应, 论文重点讨论了准静态侵入至接近颗粒底边界区域时的宏观阻力构成及其无量纲拟合模型. 仿真结果表明, 侵入阻力在近底区域呈指数级增长和周期性波动特点, 固连在侵入圆柱底端的颗粒固化区是动态变化的, 固化区接触底边界时的瓦解过程对颗粒阻力近底增大起决定作用, 力链在底边界附近平均颗粒数的减小是阻力振荡的主要原因.

参考文献

[1] 孙其诚, 金峰. 颗粒物质的多尺度结构及其研究框架[J]. 物理, 2009, 38(4): 225–232.
SUN Q C, JIN F. The multiscale structure of granular matter and its mechanics [J]. Physics, 2009, 38(4): 225–232. (in Chinese)

[2] ARANSON I S, TSIMRING L S. Patterns and collective behavior in granular media: theoretical concepts [J]. Reviews of Modern Physics, 2006, 78(2): 641–692.

[3] WINDOWS-YULE C R K, MÜHLBAUER S, TORRES CISNEROS L A, et al. Janssen effect in dynamic particulate systems [J]. Physical Review

E, 2019, 100(2): 022902.

[4] ZENG X Y, WEN T G, YU Y, et al. New practical discrete non-spherical N-body method: validation with the Brazil nut effect [J]. Icarus, 2022, 387: 115201.

[5] WEN T G, ZENG X Y, LI Z W, et al. Size segregation under different gravity levels by using polyhedral particles [J]. Planetary and Space Science, 2023, 226: 105634.

[6] ZHANG L, WANG Y J, ZHANG J. Force-chain distributions in granular systems [J]. Physical Review E, 2014, 89(1): 012203.

[7] GUAN W, ZHANG Q. The effect of moisture content and compaction on the strength and arch formation of wheat flour in a model bin [J]. Journal of Food Engineering, 2009, 94(3/4): 227–232.

[8] COSTANTINO D J, BARTELL J, SCHEIDLER K, et al. Low-velocity granular drag in reduced gravity [J]. Physical Review E, 2011, 83: 011305.

[9] XU W X, SUN H G, CHEN W, et al. Transport properties of concrete-like granular materials interacted by their microstructures and particle components [J]. International Journal of Modern Physics B, 2018, 32(18): 1840011.

[10] GHOLAMI R, AADNOY B, RASOULI V, et al. An analytical model to predict the volume of sand during drilling and production [J]. Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering, 2016, 8(4): 521–532.

[11] LI C, ZHANG T N, GOLDMAN D I. A terradynamics of legged locomotion on granular media [J]. Science, 2013, 339(6126): 1408–1412.

[12] MALADEN R D, DING Y, UMBANHOWAR P B, et al. Undulatory swimming in sand: experimental and simulation studies of a robotic sandfish [J]. International Journal of Robotics Research, 2011, 30(7): 793–805.

[13] GRAF N M, BEHR A M, DALTORIO K A. Dactyls and inward gripping stance for amphibious crab-like robots on sand [J]. Bioinspiration & Biomimetics, 2021, 16(2): 026021.

[14] 刁斌斌, 徐鉴, 何健锋, 等. 一款仿蚯蚓机器人的纤维驱动特性建模与辨识[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(2): 1–11.
DIAO B B, XU J, HE J F, et al. Actuation feature modeling and identification of a fiber-driven earthworm-like robot [J]. Journal of Dynamics and Con-

- trol, 2023, 21(2): 1–11. (in Chinese)
- [15] 李琛, 李阳, 魏奎先, 等. 嫦娥五号月壤的表面特征研究[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2023, 53(3): 31–39.
- LI C, LI Y, WEI K X, et al. Study on surface characteristics of Chang'E-5 fine grained lunar soil [J]. *Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica)*, 2023, 53(3): 31–39. (in Chinese)
- [16] 程彬, 于洋, 宝音贺西. 小天体接触探测颗粒动力学研究进展[J]. 中国科学: 技术科学, 2021, 51(11): 1299–1314.
- CHENG B, YU Y, BAOYIN H X. Recent advances in granular dynamics for small-body touchdown missions [J]. *Scientia Sinica (Technologica)*, 2021, 51(11): 1299–1314. (in Chinese)
- [17] LAURETTA D S, DELLAGIUSTINA D N, BENNETT C A, et al. The unexpected surface of asteroid (101955) Bennu [J]. *Nature*, 2019, 568: 55–60.
- [18] KITAZATO K, MILLIKEN R E, IWATA T, et al. The surface composition of asteroid 162173 Ryugu from Hayabusa2 near-infrared spectroscopy [J]. *Science*, 2019, 364(6437): 272–275.
- [19] 葛平, 张天馨, 康晓晰, 等. 2022年深空探测进展与展望[J]. 中国航天, 2023(2): 9–18.
- GE P, ZHANG T X, KANG X X, et al. Progress of global deep space exploration in 2022 and future prospects [J]. *Aerospace China*, 2023(2): 9–18. (in Chinese)
- [20] BRZINSKI III T A, MAYOR P, DURIAN D J. Depth-dependent resistance of granular media to vertical penetration [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 111(16): 168002.
- [21] ROTH L K. Constant speed penetration into granular materials: drag forces from the quasistatic to inertial regime [J]. *Granular Matter*, 2021, 23(3): 54.
- [22] KANG W T, FENG Y J, LIU C S, et al. Archimedes' law explains penetration of solids into granular media [J]. *Nature Communications*, 2018, 9: 1101.
- [23] ABBASI AGHDA S, NAJI A L. Drag force on cylindrical intruders in granular media: experimental study of lateral vs axial intrusion and high grain-size polydispersity [J]. *Powder Technology*, 2023, 415: 118194.
- [24] STONE M B, BARRY R, BERNSTEIN D P, et al. Local jamming via penetration of a granular medium [J]. *Physical Review E*, 2004, 70(4): 041301.
- [25] STONE M B, BERNSTEIN D P, BARRY R, et al. Getting to the bottom of a granular medium [J]. *Nature*, 2004, 427: 503–504.
- [26] BASSETT D S, OWENS E T, PORTER M A, et al. Extraction of force-chain network architecture in granular materials using community detection [J]. *Soft Matter*, 2015, 11(14): 2731–2744.
- [27] CLARK A H, KONDIC L, BEHRINGER R P. Particle scale dynamics in granular impact [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(23): 238302.
- [28] PETERS J F, MUTHUSWAMY M, WIBOWO J, et al. Characterization of force chains in granular material [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2005, 72(4): 041307.
- [29] TORDESILLAS A, WALKER D M, LIN Q. Force cycles and force chains [J]. *Physical Review E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2010, 81(1 Pt 1): 011302.
- [30] 张韵. 碎石堆小行星结构演化机理研究[D]. 北京: 清华大学, 2017.
- ZHANG Y. Rotational and collisional evolution mechanisms of rubble-pile asteroids [D]. Beijing: Tsinghua University, 2017. (in Chinese)
- [31] LIU C, POLLARD D D, SHI B. Analytical solutions and numerical tests of elastic and failure behaviors of close-packed lattice for brittle rocks and crystals [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2013, 118(1): 71–82.
- [32] LIU C, POLLARD D D, GU K, et al. Mechanism of formation of wiggly compaction bands in porous sandstone: 2. Numerical simulation using discrete element method [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2015, 120(12): 8153–8168.
- [33] LIU C, XU Q, SHI B, et al. Mechanical properties and energy conversion of 3D close-packed lattice model for brittle rocks [J]. *Computers & Geosciences*, 2017, 103: 12–20.
- [34] 李欣业, 张华彪, 郭晓强. 工程中的振动问题的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 1–9.
- LI X Y, ZHANG H B, GUO X Q. Research progress of vibration problems in engineering [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(6): 1–9. (in Chinese)