第 22 卷第 4 期
2024 年 4 月

动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 22 No. 4
Apr. 2024

文章编号:1672-6553-2024-22(4)-016-007

DOI:10.6052/1672-6553-2023-089

一类二阶非标准广义力学的正则变换和第一积分*

朱琳[1]　张毅[2†]

(1. 苏州科技大学 数学科学学院,苏州　215009)

(2. 苏州科技大学 土木工程学院,苏州　215011)

摘要　研究带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学的正则变换以及关于第一积分的 Poisson 理论. 首先,建立二阶非标准广义力学的 Hamilton 原理,导出 Euler-Lagrange 方程,并由 Legendre 变换定义 Hamilton 函数,建立正则方程;其次,建立二阶非标准广义力学的正则变换的判别条件,并通过母函数的不同选择给出四种基本形式的正则变换;最后,验证二阶非标准广义力学具有 Lie 代数结构,建立关于第一积分的 Poisson 理论. 文中通过算例演示结果之应用.

关键词　广义力学,　非标准 Lagrange 函数,　正则变换,　Poisson 理论

中图分类号:O316　　**文献标志码**:A

Canonical Transformations and First Integrals of a Class of Second-Order Non-Standard Generalized Mechanics*

Zhu Lin[1]　Zhang Yi[2†]

(1. School of Mathematical Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou　215009, China)

(2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou　215011, China)

Abstract　In this paper, we studied the canonical transformations of second-order non-standard generalized mechanics with exponential Lagrangians and Poisson theory on the first integrals. First, Hamilton principle of second-order nonstandard generalized mechanics is established, the Euler-Lagrange equations are derived, the Hamiltonian is defined by using Legendre transformation, and the canonical equation are established. Secondly, the discriminant conditions of canonical transformation of second-order nonstandard generalized mechanics are established, and four basic forms of canonical transformation are given by different choices of generating functions. Finally, the Lie algebraic structure of second-order non-standard generalized mechanics is verified, and Poisson theory of the first integral is established. Some examples are given to demonstrate the application of the results.

Key words　generalized mechanics,　non-standard Lagrangians,　canonical transformation,　Poisson theory

引言

非标准 Lagrange 函数的概念始于 Arnold[1] 在其著作中提到的“非自然 Lagrange 函数”,一般地,既没有动能项,也没有势能项. 非标准 Lagrange 函数在处理耗散系统[2-5]、非线性系统[6-8]和

2023-07-18 收到第 1 稿,2023-09-04 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12272248,11972241), National Natural Science Foundation of China (12272248,11972241).

† 通信作者 E-mail:zhy@mail.usts.edu.cn

量子场论[9-11]等方面应用广泛．El-Nabulsi[12]为处理耗散和非线性动力学问题，引进了两种形式的非标准 Lagrange 函数的作用量，导出了其 Euler-Lagrange 方程．Dimitrijevic[13]利用非标准 Lagrange 函数研究了现代宇宙学模型的运动微分方程；El-Nabulsi 研究了非标准 Lagrange 函数在 Friedmann-Robertson-Walker 时空中的应用[14]．最近，非标准 Lagrange 函数被用于研究非线性动力学的对称性与守恒量[15-20]．

广义经典力学是动力学系统的 Lagrange 函数含广义坐标对时间的高阶导数．广义力学在物理学、数学等方面均有许多重要应用．在物理学方面，研究了如带二阶导数的电磁理论和场论[21,22]；在数学方面，文献[23]用现代几何方法系统地描述了广义经典力学和场论．在工程中研究确定梁弯曲形状时，可将问题化为求梁的总位能的极小值，此时 Lagrange 函数中含有二阶导数．关于广义力学的理论研究已经取得了许多成果[24-31]．2015 年，El-Nabulsi[32]研究了带有二阶和三阶导数的指数 Lagrange 函数的广义动力学及其 Hamilton 方程．本文研究基于指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学的正则变换，并进而研究其第一积分的 Poisson 理论．

1　带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学

研究由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定位形的广义力学系统，设 Lagrange 函数含二阶导数，即 $L=L(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s)$，则带有指数 Lagrange 函数的作用量为

$$S_E=\int_{t_1}^{t_2}\exp[L(t,q_s,\dot{q}_s,\ddot{q}_s)]\mathrm{d}t \tag{1}$$

相应地，二阶非标准广义力学的 Hamilton 原理可表示为

$$\delta S_E=0 \tag{2}$$

并满足边界条件

$$\delta q_s\big|_{t=t_1}=\delta q_s\big|_{t=t_2}=0,\ \delta\dot{q}_s\big|_{t=t_1}=\delta\dot{q}_s\big|_{t=t_2}=0 \tag{3}$$

且变分运算与微分运算可交换，即 $\mathrm{d}\delta=\delta\mathrm{d}$．

由原理(2)，并利用式(3)，我们得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\exp L\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp L\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\exp L\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_s}\right)\right]\times\delta q_s\mathrm{d}t=0 \tag{4}$$

由 $\delta q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 的相互独立性和 $[t_1,t_2]$ 的任意性，从式(4)，我们可以得到

$$\exp L\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\exp L\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\exp L\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_s}\right)=0 \tag{5}$$

这是带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学的 Euler-Lagrange 方程．

令 $q_s^{(0)}=q_s,q_s^{(1)}=\dot{q}_s$，引入广义动量

$$p_s^{(0)}=\exp(L)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s^{(0)}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp(L)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s^{(1)}}\right],$$

$$p_s^{(1)}=\exp(L)\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s^{(1)}} \tag{6}$$

利用 Legendre 变换，可将 Hamilton 函数定义为

$$H=p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}+p_s^{(1)}\dot{q}_s^{(1)}-\exp(L) \tag{7}$$

其中 $H=H(t,q_s^{(0)},q_s^{(1)},p_s^{(0)},p_s^{(1)})$．若已知 L，则可从式(6)中解出 $\dot{q}_s^{(0)}$，$\dot{q}_s^{(1)}$ 并代入式(7)，即可得 H．

由方程(5)和方程(7)，易导出

$$\dot{q}_s^{(0)}=\frac{\partial H}{\partial p_s^{(0)}},\dot{q}_s^{(1)}=\frac{\partial H}{\partial p_s^{(1)}},$$

$$\dot{p}_s^{(0)}=-\frac{\partial H}{\partial q_s^{(0)}},\dot{p}_s^{(1)}=-\frac{\partial H}{\partial q_s^{(1)}}(s=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

这是带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学的 Hamilton 正则方程．

算例 1　设带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统的作用量为

$$S_E=\int_{t_1}^{t_2}\exp(\ddot{q}_1)\mathrm{d}t \tag{9}$$

令 $q_1^{(0)}=q_1$，$q_1^{(1)}=\dot{q}_1$．则 $L=\dot{q}_1^{(1)}$，由式(6)，广义动量为

$$p_1^{(0)}=-\exp\dot{q}_1^{(1)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{q}_1^{(1)},\ p_1^{(1)}=\exp\dot{q}_1^{(1)} \tag{10}$$

由式(7)，Hamilton 函数为

$$H=p_1^{(0)}q_1^{(1)}+p_1^{(1)}\ln p_1^{(1)}-p_1^{(1)} \tag{11}$$

由式(8)，Hamilton 正则方程为

$$\dot{q}_1^{(0)}=q_1^{(1)},\dot{q}_1^{(1)}=\ln p_1^{(1)},\dot{p}_1^{(0)}=0,\dot{p}_1^{(1)}=p_1^{(0)} \tag{12}$$

由式(12)可得

$$p_1^{(0)}=c_1,p_1^{(1)}=c_1t+c_2,$$

$$q_1^{(1)}=\frac{1}{c_1}[(c_1t+c_2)\ln(c_1t+c_2)]-t+c_3,$$

$$q_1^{(0)}=\frac{1}{2(c_1)^2}[(c_1t+c_2)^2\ln(c_1t+c_2)]-$$

$$\frac{1}{4(c_1)^2}(c_1 t + c_2)^2 + c_3 t + c_4 - \frac{1}{2}t^2 \qquad (13)$$

式(13)即为系统的运动方程.

2 二阶非标准广义力学的正则变换

研究由变量 $q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, p_s^{(0)}, p_s^{(1)}$ 向新变量 $Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)}$ 的变换. 设变换后的 Hamilton 函数为 $K(t, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)})$. 如果新旧变量有以下方程同时成立，即

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)} + p_s^{(1)}\dot{q}_s^{(1)} - H)\mathrm{d}t = 0 \qquad (14)$$

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(P_s^{(0)}\dot{Q}_s^{(0)} + P_s^{(1)}\dot{Q}_s^{(1)} - K)\mathrm{d}t = 0 \qquad (15)$$

则变换是正则的. 由方程(14)和方程(15)，易知被积函数之间满足式

$$p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)} + p_s^{(1)}\dot{q}_s^{(1)} - H - P_s^{(0)}\dot{Q}_s^{(0)} - P_s^{(1)}\dot{Q}_s^{(1)} + K = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} \qquad (16)$$

其中 F 是关于新旧变量和时间的任意可微函数，称为母函数或生成函数. 由于

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \delta[F(t_2) - F(t_1)] = 0 \qquad (17)$$

因此式(16)成立. 式(16)可写为

$$p_s^{(0)}\mathrm{d}q_s^{(0)} + p_s^{(1)}\mathrm{d}q_s^{(1)} - P_s^{(0)}\mathrm{d}Q_s^{(0)} - P_s^{(1)}\mathrm{d}Q_s^{(1)} + (K - H)\mathrm{d}t = \mathrm{d}F \qquad (18)$$

式(18)是正则变换的判别条件. 由于新旧变量共有 $8n$ 个，它们之间由 $4n$ 个变换方程相联系，因此函数 F 可选择为其中 $4n$ 个独立变量的函数. 根据独立变量的不同选择可形成不同形式的正则变换. 如，选择母函数为

$$F = F_1(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) \qquad (19)$$

则有

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial F_1}{\partial q_s^{(0)}}\mathrm{d}q_s^{(0)} + \frac{\partial F_1}{\partial q_s^{(1)}}\mathrm{d}q_s^{(1)} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_s^{(0)}}\mathrm{d}Q_s^{(0)} + \frac{\partial F_1}{\partial Q_s^{(1)}}\mathrm{d}Q_s^{(1)} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\mathrm{d}t \qquad (20)$$

将式(20)代入式(18)，比较各项的系数，得到

$$p_s^{(0)} = \frac{\partial F_1}{\partial q_s^{(0)}}, p_s^{(1)} = \frac{\partial F_1}{\partial q_s^{(1)}},$$

$$P_s^{(0)} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_s^{(0)}}, P_s^{(1)} = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_s^{(1)}},$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (21)$$

式(21)中前四组方程给出了新旧变量之间的变换关系，最后一个方程给出新旧 Hamilton 函数之间的关系.

母函数对于建立具体的正则变换起着关键作用. 在最简单的情况下，母函数可由如下四种基本形式：

$$F = F_2(t, p_s^{(0)}, p_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) \qquad (22)$$

$$F = F_3(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)}) \qquad (23)$$

$$F = F_4(t, p_s^{(0)}, p_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)}) \qquad (24)$$

以及式(19). 以下逐一讨论.

第一种形式的母函数 F_1，参见式(19)，其变换参见公式(21).

第二种形式的母函数 F_2，根据 Legendre 变换

$$F_2(t, p_s^{(0)}, p_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) = F_1(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) - p_s^{(0)}q_s^{(0)} - p_s^{(1)}q_s^{(1)} \qquad (25)$$

将式(25)代入式(18)，比较各项的系数，得到

$$q_s^{(0)} = -\frac{\partial F_2}{\partial p_s^{(0)}}, q_s^{(1)} = -\frac{\partial F_2}{\partial p_s^{(1)}},$$

$$P_s^{(0)} = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_s^{(0)}}, P_s^{(1)} = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_s^{(1)}},$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (26)$$

第三种形式的母函数 F_3，有

$$F_3(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)}) = F_1(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) + P_s^{(0)}Q_s^{(0)} + P_s^{(1)}Q_s^{(1)} \qquad (27)$$

将式(27)代入式(18)，比较各项的系数，得到

$$p_s^{(0)} = \frac{\partial F_3}{\partial q_s^{(0)}}, p_s^{(1)} = \frac{\partial F_3}{\partial q_s^{(1)}},$$

$$Q_s^{(0)} = \frac{\partial F_3}{\partial P_s^{(0)}}, Q_s^{(1)} = \frac{\partial F_3}{\partial P_s^{(1)}},$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \qquad (28)$$

第四种形式的母函数 F_4，有

$$F_4(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, P_s^{(0)}, P_s^{(1)}) = F_1(t, q_s^{(0)}, q_s^{(1)}, Q_s^{(0)}, Q_s^{(1)}) - p_s^{(0)}q_s^{(0)} - p_s^{(1)}q_s^{(1)} + P_s^{(0)}Q_s^{(0)} + P_s^{(1)}Q_s^{(1)} \qquad (29)$$

将式(29)代入式(18)，比较各项的系数，得到

$$q_s^{(0)} = -\frac{\partial F_4}{\partial p_s^{(0)}}, q_s^{(1)} = -\frac{\partial F_4}{\partial p_s^{(1)}},$$

$$Q_s^{(0)} = \frac{\partial F_4}{\partial P_s^{(0)}}, Q_s^{(1)} = \frac{\partial F_4}{\partial P_s^{(1)}},$$

$$K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{30}$$

算例 2　已知 $K = H$，证明变换方程

$$Q_1^{(0)} = \sqrt{2q_1^{(0)}}\cos p_1^{(0)}, Q_1^{(1)} = \sqrt{2q_1^{(1)}}\cos p_1^{(1)},$$
$$P_1^{(0)} = \sqrt{2q_1^{(0)}}\sin p_1^{(0)}, P_1^{(1)} = \sqrt{2q_1^{(1)}}\sin p_1^{(1)} \tag{31}$$

为正则变换，并求其母函数.

由变换方程中不显含时间 t，则其正则变换条件为

$$p_1^{(0)}\mathrm{d}q_1^{(0)} + p_1^{(1)}\mathrm{d}q_1^{(1)} - P_1^{(0)}\mathrm{d}Q_1^{(0)} - P_1^{(1)}\mathrm{d}Q_1^{(1)} = \mathrm{d}F \tag{32}$$

对式(32)中的第一个和第二个方程 $Q_1^{(0)}, Q_1^{(1)}$ 分别求微分，得

$$\mathrm{d}Q_1^{(0)} = \mathrm{d}(\sqrt{2q_1^{(0)}}\cos p_1^{(0)}) = -\sqrt{2q_1^{(0)}}\sin p_1^{(0)}\mathrm{d}p_1^{(0)} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{q_1^{(0)}}}\cos p_1^{(0)}\mathrm{d}q_1^{(0)} \tag{33}$$

$$\mathrm{d}Q_1^{(1)} = \mathrm{d}(\sqrt{2q_1^{(1)}}\cos p_1^{(1)}) = -\sqrt{2q_1^{(1)}}\sin p_1^{(1)}\mathrm{d}p_1^{(1)} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{q_1^{(1)}}}\cos p_1^{(1)}\mathrm{d}q_1^{(1)} \tag{34}$$

将式(33)和式(34)代入式(32)，得

$$p_1^{(0)}\mathrm{d}q_1^{(0)} + p_1^{(1)}\mathrm{d}q_1^{(1)} - P_1^{(0)}\mathrm{d}Q_1^{(0)} - P_1^{(1)}\mathrm{d}Q_1^{(1)} = (p_1^{(0)} - \sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)})\mathrm{d}q_1^{(0)} + (p_1^{(1)} - \sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)})\mathrm{d}q_1^{(1)} + 2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)}\mathrm{d}p_1^{(0)} + 2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)}\mathrm{d}p_1^{(1)} \tag{35}$$

又因为

$$\frac{\partial}{\partial p_1^{(0)}}(p_1^{(0)} - \sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)}) = 1 - \cos^2 p_1^{(0)} + \sin^2 p_1^{(0)} = 2\sin^2 p_1^{(0)} \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_1^{(1)}}(p_1^{(1)} - \sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)}) = 1 - \cos^2 p_1^{(1)} + \sin^2 p_1^{(1)} = 2\sin^2 p_1^{(1)} \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1^{(0)}}(2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)}) = 2\sin^2 p_1^{(0)},$$
$$\frac{\partial}{\partial q_1^{(1)}}(2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)}) = 2\sin^2 p_1^{(1)}. \tag{38}$$

故存在某函数 $F(t, p_1^{(0)}, p_1^{(1)}, q_1^{(0)}, q_1^{(1)})$，使得式(35)为函数 F 的全微分，即条件(32)成立，因此该变换为正则变换.

令

$$(p_1^{(0)} - \sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)})\mathrm{d}q_1^{(0)} + (p_1^{(1)} - \sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)})\mathrm{d}q_1^{(1)} + 2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)}\mathrm{d}p_1^{(0)} + 2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)}\mathrm{d}p_1^{(1)} = \mathrm{d}F \tag{39}$$

因此

$$\frac{\partial F}{\partial q_1^{(0)}} = p_1^{(0)} - \sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)},$$
$$\frac{\partial F}{\partial q_1^{(1)}} = p_1^{(1)} - \sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)},$$
$$\frac{\partial F}{\partial p_1^{(0)}} = 2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)}, \frac{\partial F}{\partial p_1^{(1)}} = 2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)} \tag{40}$$

由式(40)得

$$F = \int(p_1^{(0)} - \sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)})\mathrm{d}q_1^{(0)} + \int(p_1^{(1)} - \sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)})\mathrm{d}q_1^{(1)} + f_0(p_1^{(0)}) + f_1(p_1^{(1)}) = (p_1^{(0)}q_1^{(0)} - q_1^{(0)}\sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)}) + (p_1^{(1)}q_1^{(1)} - q_1^{(1)}\sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)}) + f_0(p_1^{(0)}) + f_1(p_1^{(1)}) \tag{41}$$

将式(41)分别对 $p_1^{(0)}, p_1^{(1)}$ 求偏微分，并根据式(40)，得

$$2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)} + \frac{\partial f_1}{\partial p_1^{(1)}} = 2q_1^{(1)}\sin^2 p_1^{(1)} \tag{42}$$

$$2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)} + \frac{\partial f_0}{\partial p_1^{(0)}} = 2q_1^{(0)}\sin^2 p_1^{(0)} \tag{43}$$

因此 $f_0(p_1^{(0)}) = c_0, f_1(p_1^{(0)}) = c_1$，其中 c_o, c_1 为常数. 于是母函数可取为

$$F(t, q_1^{(0)}, q_1^{(1)}, p_1^{(0)}, p_1^{(1)}) = p_1^{(0)}q_1^{(0)} + p_1^{(1)}q_1^{(1)} - q_1^{(0)}\sin p_1^{(0)}\cos p_1^{(0)} - q_1^{(1)}\sin p_1^{(1)}\cos p_1^{(1)} \tag{44}$$

由式(31)的前两个方程 $Q_1^{(0)}$ 和 $Q_1^{(1)}$，得

$$p_1^{(0)} = \arccos\frac{Q_1^{(0)}}{\sqrt{2q_1^{(0)}}}, p_1^{(1)} = \arccos\frac{Q_1^{(1)}}{\sqrt{2q_1^{(1)}}} \tag{45}$$

代入式(45)，得

$$F(t, q_1^{(0)}, q_1^{(1)}, Q_1^{(0)}, Q_1^{(1)}) = q_1^{(0)}\arccos\frac{Q_1^{(0)}}{\sqrt{2q_1^{(0)}}} + q_1^{(1)}\arccos\frac{Q_1^{(1)}}{\sqrt{2q_1^{(1)}}} - \frac{Q_1^{(0)}}{2}\sqrt{2q_1^{(0)} - (Q_1^{(0)})^2} - \frac{Q_1^{(1)}}{2}\sqrt{2q_1^{(1)} - (Q_1^{(1)})^2} \tag{46}$$

3　二阶非标准广义力学第一积分 Poisson 理论

令

$$a^1 = q_1^{(0)}, \cdots, a^n = q_n^{(0)}; a^{n+1} = p_1^{(0)}, \cdots, a^{2n} = p_n^{(0)};$$
$$a^{2n+1} = q_1^{(1)}, \cdots, a^{3n} = q_n^{(1)}; a^{3n+1} = p_1^{(1)}, \cdots, a^{4n} = p_n^{(1)} \tag{47}$$

则方程(8)可表示为逆变代数形式

$$\dot{a}^{\mu}=\boldsymbol{\omega}^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,4n)\tag{48}$$

其中

$$(\boldsymbol{\omega}^{\mu\nu})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{M}_1\end{bmatrix}_{4n\times 4n},$$

$$\boldsymbol{M}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times n} & \boldsymbol{I}_{n\times n}\\ -\boldsymbol{I}_{n\times n} & \boldsymbol{0}_{n\times n}\end{bmatrix}\quad(i=0,1).\tag{49}$$

将某函数 $A(a)$ 按方程(48)对时间求 t 导,定义一个积

$$\dot{A}(a)=\frac{\partial A}{\partial a^{\mu}}\boldsymbol{\omega}^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}=A^{\circ}H\tag{50}$$

易验证,积(50)满足左分配律、右分配律和标律,同时也满足反对称性和 Jacobi 恒等式, 则可得

定理 1 带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统(48)具有 Lie 代数结构.

由于二阶非标准广义力学系统具有 Lie 代数结构, 因此可建立其关于第一积分的 Poisson 理论.

定理 2 $I(t,a^{\mu})=\mathrm{const}$ 是系统(48)的第一积分的充要条件是

$$\frac{\partial I}{\partial t}+I\circ H=0\tag{51}$$

条件(51)称为带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学的广义 Poisson 条件.

定理 3 如果带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统(48)的 Hamilton 函数 $H=p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}+p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}-\exp(L)$ 不显含时间 t, 则它是该系统的第一积分.

定理 4 如果 $I_1(t,a^{\mu})$ 和 $I_2(t,a^{\mu})$ 是带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统(48)的不处于相互内旋的两个第一积分,则 $I_3=I_1\circ I_2$ 也是该系统的第一积分.

定理 5 如果带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统(48)有包含时间 t 的第一积分 $I(t,a^{\mu})$, 而 Hamilton 函数 $H=p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}+p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}-\exp(L)$ 不显含时间 t,则 $\frac{\partial I}{\partial t},\frac{\partial^2 I}{\partial t^2},\cdots$ 都是该系统的第一积分.

定理 6 如果带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统(48)有包含变量 a^{ρ} 的第一积分 $I(t,a^{\mu})$, 而 Hamilton 函数 $H=p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}+p_s^{(0)}\dot{q}_s^{(0)}-\exp(L)$ 不显含变量 a^{ρ},则 $\frac{\partial I}{\partial a^{\rho}},\frac{\partial^2 I}{\partial a^{\rho}},\cdots$ 都是该系统的第一积分.

算例 3 试研究二阶非标准广义力学系统(9)的第一积分.

令 $a^1=q_1^{(0)},a^2=p_1^{(0)},a^3=q_1^{(1)},a^4=p_1^{(1)}$,则式(11)可表示为

$$H=a^2a^3+a^4\ln a^4-a^4\tag{52}$$

方程具有 Lie 代数结构.

因为式(52)的 Hamilton 函数不显含时间 t, 所以式(52)为系统(9)的第一积分.

根据 Poisson 条件(51),我们可以验证

$$I_1=a^2t-a^4=c_1\tag{53}$$

$$I_2=a^4(\ln a^4-1)+a^2a^3=c_2\tag{54}$$

为系统的第一积分.

由式(53), 根据定理 5 可得

$$\frac{\partial I_1}{\partial t}=a^2=c_3\tag{55}$$

也是系统的第一积分.

算例 4 已知二阶非标准广义力学系统的作用量为

$$S_E=\int_{t_1}^{t_2}\exp(\dot{q}_1+\ddot{q}_1)\mathrm{d}t\tag{56}$$

试利用 Poisson 理论, 研究系统的第一积分.

令 $\dot{q}_1=q_1^{(1)},\ddot{q}_1=\dot{q}_1^{(1)}$ 由式(5),可得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\exp(q_1^{(1)}+\dot{q}_1^{(1)})]+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}[\exp(q_1^{(1)}+\dot{q}_1^{(1)})]=0\tag{57}$$

式(57)是所论二阶非标准广义力学的 Euler-Lagrange 方程.

引入广义动量和 Hamilton 函数

$$p_1^{(0)}=\exp(q_1^{(1)}+\dot{q}_1^{(1)})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(q_1^{(1)}+\dot{q}_1^{(1)}),$$

$$p_1^{(1)}=\exp(q_1^{(1)}+\dot{q}_1^{(1)}).\tag{58}$$

$$H=p_1^{(0)}q_1^{(1)}+p_1^{(1)}\ln p_1^{(1)}-p_1^{(1)}q_1^{(1)}-p_1^{(1)}\tag{59}$$

方程(8)给出

$$\dot{q}_1^{(0)}=q_1^{(1)},\dot{q}_1^{(1)}=\ln p_1^{(1)}+q_1^{(1)},$$

$$\dot{p}_1^{(0)}=0,\dot{p}_1^{(1)}=-p_1^{(0)}-p_1^{(1)}.\tag{60}$$

令 $a^1=q_1^{(0)},a^2=p_1^{(0)},a^3=q_1^{(1)},a^4=p_1^{(1)}$,则式(59)可表示为

$$H=a^2a^3+a^4\ln a^4-a^4a^3-a^3\tag{61}$$

方程具有 Lie 代数结构.

因为式(55)不显含时间 t，所以式(61)是系统的第一积分.

根据 Poisson 条件(51)，容易验证

$$I_1=(a^2-a^4-1)e^{-t}=c_1 \tag{62}$$

为系统的第一积分.

因为积分(62)显含时间 t，而 Hamilton 函数(61)不显含时间 t，由定理 6，得

$$I_2=\frac{\partial I_1}{\partial t}=(a^4+1+a^2)e^{-t}=c_2 \tag{63}$$

也是系统的第一积分.

4　结论

本文构建了带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统的正则变换和 Poisson 理论. 建立了带有指数 Lagrange 函数的二阶广义力学系统的 Hamilton 原理和 Euler-Lagrange 方程，并导出其 Hamilton 正则方程；建立了二阶非标准广义力学的正则变换的判定条件，并给出了四种基本形式的正则变换；验证了带有指数 Lagrange 函数的二阶非标准广义力学系统具有 Lie 代数结构，并建立了 Poisson 理论. 文中给出若干算例以说明结果的应用. 文章可推广至更一般的任意阶广义力学和广义非完整力学.

参考文献

[1]　ARNOLD V I. Mathematical methods of classical mechanics [M]. New York: Springer, 1978.

[2]　MUSIELAK Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2008, 41 (38): 055205.

[3]　MUSIELAK Z E. General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems [J]. Chaos Solitons and Fractals, 2009, 42(5): 2645－2652.

[4]　SAHA A, TALUKDAR B. Inverse variational problem for nonstandard lagrangians [J]. Reports on Mathematical Physics, 2014, 73(3): 299－309.

[5]　CIEŚLIŃSKI J L, NIKICIUK T. A direct approach to the construction of standard and non-standard Lagrangians for dissipative-like dynamical systems with variable coefficients [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2010, 43 (17): 175205.

[6]　CHANDRASEKAR V K, PANDEY S N, SENTHILVELAN M, et al. A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems [J]. Journal of Mathematical Physics, 2006, 47(2): 023508.

[7]　CARIÑENA J F, RAÑADA M F, SANTANDER M. Lagrangian formalism for nonlinear second-order Riccati systems: one-dimensional integrability and two-dimensional superintegrability [J]. Journal of Mathematical Physics, 2005, 46(6): 062703.

[8]　EL-NABULSI R A. Non-standard fractional Lagrangians [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 74(1): 381－394.

[9]　ALEKSEEV A I, ARBUZOV B A. Classical Yang-Mills field theory with nonstandard Lagrangians [J]. Theoretical and Mathematical Physics, 1984, 59(1): 372－378.

[10]　EL-NABULSI A R. Quantum field theory from an exponential action functional [J]. Indian Journal of Physics, 2013, 87(4): 379－383.

[11]　EL-NABULSI R A. Nonstandard fractional exponential Lagrangians, fractional geodesic equation, complex general relativity, and discrete gravity [J]. Canadian Journal of Physics, 2013, 91(8): 618－622.

[12]　EL-NABULSI R A. Non-linear dynamics with non-standard lagrangians [J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2013, 12(2): 273－291.

[13]　DIMITRIJEVIC D D, MILOSEVIC M. About non-standard Lagrangians in cosmology [C]// Proceedings of the Physics Conference Tim-11. New York: AIP Publishing, 2012, 1472(1): 41－46.

[14]　EL-NABULSI R A. Nonstandard Lagrangian cosmology [J]. Journal of Theoretical and Applied Physics, 2013, 7(1): 58.

[15]　ZHANG Y, ZHOU X S. Noether theorem and its inverse for nonlinear dynamical systems with non-standard Lagrangians [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(4): 1867－1876.

[16]　ZHANG Y, WANG X P. Lie symmetry perturbation and adiabatic invariants for dynamical system with non-standard Lagrangians [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2018, 105: 165－172.

[17] ZHANG Y, WANG X P. Mei symmetry and invariants of quasi-fractional dynamical systems with non-standard Lagrangians [J]. Symmetry, 2019, 11: 1061.

[18] LIU S X, GUAN F, WANG Y, et al. The nonlinear dynamics based on the nonstandard Hamiltonians [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 88(2): 1229－1236.

[19] SONG J, ZHANG Y. Noether's theorems for dynamical systems of two kinds of non-standard Hamiltonians [J]. Acta Mechanica, 2018, 229(1): 285－297.

[20] ZHANG L J, ZHANG Y. Non-standard Birkhoffian dynamics and its Noether's theorems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 91: 105435.

[21] PODOLSKY B. A generalized electrodynamics part II—quantum [J]. Physical Review, 1944, 65: 228－235.

[22] ALDAYA V, AZCÁRRAGA J D. Higher-order Hamiltonian formalism in field theory [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1980, 13(8): 2545－2551.

[23] DE LEÓN M, RODRIGUES P R. Generalized classical mechanics and field theory [M]. Amsterdam: ESPBV, 1985.

[24] ZHANG Y, SHANG M, MEI F X. Symmetries and conserved quantities for systems of generalized classical mechanics [J]. Chinese Physics, 2000, 9(6): 401－407.

[25] 乔永芬，韩广才，张耀良. 具有单面约束的变质量完整非保守动力学系统的积分因子和守恒定理[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2002，26(4)：283－287.

QIAO Y F, HAN G C, ZHANG Y L. Integrating factors and conservation theorem for variable mass holonomic nonconservative dynamical systems with unilateral constrains [J]. Journal of Jiangxi Normal University (Natural Sciences Edition), 2002, 26(4): 283－287. (in Chinese)

[26] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

[27] 梅凤翔. 广义经典力学中的广义 WHITTAKER 方程和场方法 [J]. 应用数学和力学，1990，11(6)：529－536.

MEI F X. Generalized Whittaker equations and field method in generalized classical mechanics [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1990, 11(6): 529－536. (in Chinese)

[28] 张毅. 广义经典力学系统的 Hojman 守恒定理 [J]. 物理学报，2003，52(8)：1832－1836.

ZHANG Y. A conservation theorem of Hojman for systems of generalized classical mechanics [J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(8): 1832－1836. (in Chinese)

[29] ZHANG Y. Perturbation to symmetries and adiabatic invariants for a system of generalized classical mechanics [J]. Chinese Journal of Physics, 2011, 49(5): 1005－1017.

[30] ZHANG Y. Symmetry of Hamiltonian and conserved quantity for a system of generalized classical mechanics [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(3): 293－298. (in Chinese)

[31] 乔永芬，赵淑红. 准坐标下广义力学系统的 Lie 对称定理及其逆定理 [J]. 物理学报，2001，50(1)：1－7.

QIAO Y F, ZHAO S H. Lie symmetries theorem and its inverse of generalized mechanical systems in terms of quasi-coordinates [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(1): 1－7. (in Chinese)

[32] EL-NABULSI R A. Non-standard lagrangians with higher-order derivatives and the Hamiltonian formalism [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 2015, 85(2): 247－252.