第 22 卷第 3 期
2024 年 3 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 22 No. 3
Mar. 2024

文章编号:1672-6553-2024-22(3)-043-005

DOI:10.6052/1672-6553-2023-036

含参非线性扰动系统的闭轨分叉分析*

郭碧垚[1] 周艳[1,2†] 张伟[3] 刘宇[1]

(1. 内蒙古师范大学 数学科学学院,呼和浩特 010022)

(2. 内蒙古师范大学 应用数学中心,呼和浩特 010022)

(3. 广西大学 土木工程建筑学院,南宁 530000)

摘要 研究了一类含参非线性系统的闭轨分叉问题,找到并确定了系统在平衡点附近的极限环及其稳定性.基于后继函数法,引入曲线坐标变换找到系统的后继函数,进而判断该闭轨为二重极限环.得到该系统极限环随参数变化从无到有,再到分裂为多个极限环的闭轨分叉现象. 通过数值模拟,验证了系统随参数变化出现极限环的动力学特性.

关键词 极限环, 闭轨分叉, 后继函数

中图分类号: O193 **文献标志码:** A

Closed Orbit Bifurcation Analysis of Nonlinear Perturbed System with Parameters*

Guo Biyao[1] Zhou Yan[1,2†] Zhang Wei[3] Liu Yu[1]

(1. College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China)

(2. Center for Applied Mathematical Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China)

(3. School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530000, China)

Abstract The closed-orbit bifurcation of a two-dimensional system with parameters was discussed. Based on the successor function method, the limit cycle of the system near the equilibrium point was got. Using the curve coordinate transformation to the system, we find its successor function, and then received several limit cycles. By the aid of curvilinear coordinate transformation, we got the subsequent function of the system, and analyzed the stability of the limit cycles with the parameters from scratch to existence. Finally, numerical simulations were carried out.

Key words limit cycle, closed-orbit bifurcation, successor function

引言

在微分方程定性理论中,关于极限环的研究是一个既有趣又困难的部分. 研究极限环与解决微分方程积分曲线族的全局结构问题之间有密切的联系[1,2],为了确定一个确定的系统是否存在极限环,庞卡莱首先提出了后继函数法[3]、小参数法和环域定理等重要理论. 其中,后继函数法在研究一

2023-03-27 收到第 1 稿,2023-05-05 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11832002),内蒙古师范大学高校基本科研业务费项目(2023JBBJ004),内蒙古师范大学数学一流拔尖培育学科建设资助项目(2024YLKY01),内蒙古自治区自然科学基金重点项目(2022ZD05), National Natural Science Foundation of China (11832002), Fundamental Research Funds for the Inner Mongolia Normal University (2023JBBJ004), Mathematics First-class Disciplines Cultivation Fund of Inner Mongolia Normal University (2024YLKY01), Key Project of Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region (2022ZD05).

† 通信作者 E-mail:yanzhou0924@163.com

些非线性动力系统的极限环的存在性、稳定性以及重次等性质时具有重要的作用，这一理论也进一步推动了非线性系统分叉问题的深入研究[4]，如闭轨分叉，庞卡莱分叉等[5,6]. 近些年来，闭轨分叉问题是动力系统的分叉现象研究的一个热点问题[7-9]，它既是一种局部分叉，又是动态分叉[10]. 当前，已有研究者对各类不同的动力系统进行极限环及闭轨分叉分析，得到了相关的结论[11-14].

由于大多数系统是无法具体求解的，使用后继函数法研究其闭轨分叉问题并不容易[15-19]. 对于一个确定的非线性系统而言，如何确定后继函数的具体表达式是非常困难的，另一方面，即使已经获得系统后继函数的表达形式，而具体计算其零点的个数也是很难做到的. 但是后继函数法依然是分叉理论研究的不可或缺的重要方法. 本文通过给出一个非线性动力系统，借助于后继函数法对其闭轨分叉问题进行了有效的理论分析.

1 非线性系统的平衡点分析

自治非线性系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=P(x,y)\\ \dot{y}=Q(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

其中 P，Q 是 x-y 平面上的连续函数，且满足解的存在唯一性条件.

定义 1 假设 $\overline{MN}$（或 $\overset{\frown}{MN}$）为 x-y 平面上的某一直线段（或弧段），如果任何与 $\overline{MN}$（或 $\overset{\frown}{MN}$）相交的系统(1)的轨线. 当时间 t 增加时，都只从 $\overline{MN}$（或 $\overset{\frown}{MN}$）的一侧走向另一侧，且没有轨线与 $\overline{MN}$（或 $\overset{\frown}{MN}$）相切（即轨线与 $\overline{MN}$（或 $\overset{\frown}{MN}$）横截相交），那么则称直线段 $\overline{MN}$（或弧段 $\overset{\frown}{MN}$）为自治非线性系统(1)的无切线段（或无切弧段）.

如果点 A_0 是系统(1)的一个常点，那么在该点处的向量场 $(P,Q)|_{A_0}$ 就有确定的方向，任取一条过点 A_0 且与该向量方向不同的直线 L. 由于 P，Q 是连续函数，所以可以取点 A_0 的某个足够小的领域，使得领域内任意点处的向量场方向皆与直线 L 的方向不同，于是直线 L 在此领域中部分线段 $\overline{MN}$ 就是过点 A_0 的无切线段.

考虑系统(1)从 A_0 点出发的轨线，如果在一段时间后仍会与 $\overline{MN}$ 再次相交，那么该交点 $\overline{A_0}$ 就是 A_0 点的后继点. 在无切线段 $\overline{MN}$ 上取一个正向，就可以定义 $\overline{MN}$ 上的点的坐标. 记点 A_0 及其后继点 $\overline{A_0}$ 在 $\overline{MN}$ 上的坐标分别为 u 和 $\bar{u}$，于是上述点变换就可以给出这样一个函数 $\bar{u}=g(u)$.

定义 2 无切线段上的点与其后继点（如果存在）的坐标之间的函数关系称为后继函数. 有时也把 $h(u)=g(u)-u$ 称为后继函数.

由于后继函数在系统不动点附近的性态决定了非线性系统的轨线在极限环附近的性态. 由此，后继函数不仅可以用来研究极限环的存在性，还可以用来研究极限环的稳定性[20-25]，为进一步揭示后继函数与极限环稳定性的关系，给出如下定理：

定理 1 如果后继函数 $h(u)$ 满足 $h(u_0)=h'(u_0)=\cdots=h^{(k-1)}(u_0)=0$，$h^{(k)}(u_0)\neq 0$，其中 $k\in Z^+$. 则 Γ_0 称为 k 重极限环. 若 k 为奇数，$h^{(k)}(u_0)<0$（或 >0），则 Γ_0 是稳定（或不稳定）极限环；若 k 为偶数，$h^{(k)}(u_0)<0$（或 >0），则 Γ_0 是外侧稳定而内侧不稳定（或外侧不稳定而内侧稳定）极限环.

证明： 假设 Γ_0 是系统(1)的一条闭轨，Γ_0 上任取一点 A_0，过点 A_0 作法线 $\vec{n}$，规定法线正向为由 Γ_0 内部指向 Γ_0 外部，显然在该法线上可以取包含点 A_0 在内的部分线段作为系统的无切线段 $\overline{MN}$. 在 $\overline{MN}$ 上，不妨设点 A_0 坐标为 u_0，任取一点 A，坐标记为 u，如果点 A 与点 A_0 的距离足够小，那么它的后继点 $\bar{A}$ 也在 $\overline{MN}$ 上，坐标记为 $\bar{u}$. 定义后继函数为 $h(u)=g(u)-u$，其中 $\bar{u}=g(u)$.

任意 $u\neq u_0$，且 $|u-u_0|<\varepsilon$，ε 充分小，那么

$$\begin{aligned}h(u)&=h(u_0)+h'(u_0)(u-u_0)+\cdots+\\&\frac{h^{(k)}(u_0)}{k!}(u-u_0)^{(k)}+O[(u-u_0)^{(k+1)}]\\&=\frac{h^{(k)}(u_0)}{k!}(u-u_0)^{(k)}+O[(u-u_0)^{(k+1)}]\end{aligned}$$

显然，$h(u)$ 的符号取决于 $h^{(k)}(u_0)(u-u_0)^{(k)}$. 当 k 为奇数，$h^{(k)}(u_0)<0$（或 >0）时，那么可以得到 $h^{(k)}(u_0)(u-u_0)^{(k+1)}<0$（或 >0），$(u-u_0)h(u)<0$（或 >0）. 对于 Γ_0 的外侧，即 $u>u_0$，有 $h(u)<0$（或 >0），即 $\bar{u}=g(u)<u$（或 >0）. 由解的唯一性可知从点 A 出发的轨线不会与 Γ_0 相交，所以有 $u_0<\bar{u}$. 显然，在 Γ_0 外侧附近的轨线，绕 Γ_0 盘旋的过程中越来越接近（或者远离）Γ_0，也就是说闭轨 Γ_0 是外侧稳定（或不稳定）的，同理可证其内侧稳定性，故 Γ_0 是稳定（或不稳定）极限环. 同理

可证 k 为偶数的情况，这里省略.

2　分叉周期解的方向和稳定性

在这节中,我们考虑如下系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-x(x^2+y^2-1)^2+\lambda x\\ \dot{y}=x-y(x^2+y^2-1)^2+\lambda y\end{cases}\tag{2}$$

其中,λ 为扰动小参数.

系统(2)的未扰系统,即 $\lambda=0$ 时的系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=-y-x(x^2+y^2-1)^2\\ \dot{y}=x-y(x^2+y^2-1)^2\end{cases}\tag{3}$$

通过后继函数法可以判断出系统(3)有一个二重极限环 Υ:$x^2+y^2-1=0$.

引入极坐标表示,系统(3)可以转化为

$$\begin{cases}\dot{r}=-r[(r^2-1)^2-\lambda]\\ \dot{\theta}=1\end{cases}\tag{4}$$

当 $\lambda=0$ 时系统(2) 转化为系统(3)，显然 Υ: $x^2+y^2-1=0$ 是系统(3) 的一个极限环. 现在,针对系统(4) 考虑在 Υ 的邻域中引入新的曲线坐标(θ, r),对于 Υ 附近的任何一点 A,存在唯一的点 $A_0\in\Upsilon$,使得点 A 在过点 A_0 的法线 $\overline{A_0N}$ 上. 令 θ 为点 A_0 到 Υ 上固定点的弧长,n 为沿法线由 A_0 到 A 的有向距离为 $\rho(A_0,A)$(取外法线方向为正向). 考虑到点 A_0 处的外法线上单位向量为 $\overrightarrow{n^0}=(-\cos\theta,-\sin\theta)$,于是,点 A 的直角坐标(x,y) 和曲线坐标(θ,n) 之间有如下关系

$$x=\cos\theta+n\cos\theta,\quad y=\sin\theta+n\sin\theta.\tag{5}$$

在曲线坐标系中,坐标曲线 $\theta=c$ 是过点 $\cos\theta$, $\sin\theta$) 的法线,显然法线 $\theta=0$ 和 $\theta=2\pi$ 重合,坐标曲线 $n=c$ 是闭曲线(也就是以原点为圆心的圆),由此可得以上闭轨 Υ 就是闭轨 $n=0$,而对应的 $n>0$ 的闭轨分布在 Υ 外侧,$n<0$ 的闭轨分布在 Υ 内侧.

坐标变换式(5)的雅可比(Jacobian)式为

$$D=\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,n)}=\begin{vmatrix}-\sin\theta-n\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta+n\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}=-n-1.$$

显然,对任何 θ 都有 $D=-n-1$. 因此，存在足够小的 $\delta>0$，使得当 $|n|<\delta$ 时有 $D<0$. 这表明，在闭曲线 $n=-\delta$ 和 $n=\delta$ 之间的环形邻域内. 若 $\theta\in[0,2\pi)$,则两种坐标是一一对应的.

在环域 $|n|<\delta$ 内,将变换(5)式代入系统(3),我们有

$$\begin{cases}(-\sin\theta-n\sin\theta)\dot{\theta}+\cos\theta\times\dot{n}\\ =-(\sin\theta+n\sin\theta)-(\cos\theta+n\cos\theta)(n^2+2n)^2,\\ (\cos\theta+n\cos\theta)\dot{\theta}+\sin\theta\times\dot{n}\\ =\cos\theta+n\cos\theta-(\sin\theta+n\sin\theta)(n^2+2n)^2.\end{cases}\tag{6}$$

易知

$$\begin{cases}\dot{\theta}=1\\ \dot{n}=-n^2(1+n)(2+n)^2\end{cases}\tag{7}$$

由式(6)和式(7),可得一个关于 θ 与 n 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\theta}=-n^2(1+n)(2+n)^2=F(\theta,n)\tag{8}$$

由于函数 $F(\theta,n)$ 在以上邻域内连续可微,故此邻域内的每一点,方程(8)都有唯一解. 特别的有 $\theta=0$,$n=0$ 的解为闭轨 Υ.

记方程(8)的满足初始条件 $\theta=0$,$n=n_0$($|n_0|$ 充分小)的解为

$$n=\Phi(\theta,n_0)\tag{9}$$

取法线 $\theta=0$ 上 $|n|$ 充分小的一段作为无切线段 $\overline{MN}$.

由以上论述可知,当 $\theta=2\pi$,$|n_0|$ 充分小时,轨线式(9)将再次与此无切线段 $\overline{MN}$ 相交. 根据此后继点的坐标给出系统(6)后继函数为

$$\begin{cases}g(n_0)=\Phi(2\pi,n_0)\\ h(n_0)=g(n_0)-n_0=\Phi(2\pi,n_0)-n_0\end{cases}\tag{10}$$

由于闭轨 Υ 对应于 $n=\Phi(\theta,0)\equiv0$,因此,我们有 $g(0)=h(0)=0$.

为了进一步确定闭轨的稳定性,下面考虑式(8)右端函数 $F(\theta,n)$ 满足

$$\begin{aligned}&F(\theta,0)=0\\ &F_n'(\theta,0)=0\\ &F_n''(\theta,0)=-8\end{aligned}\tag{11}$$

由于式(8) 展开到二次项有 $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\theta}=-4n^2+o(n^2)$. 将其沿轨线 n 进行积分，有

$$\int_{n_0}^{n}\frac{\mathrm{d}n}{n^2}=\int_0^{\theta}-4\mathrm{d}\theta$$

$$n=\Phi(\theta,n_0)=\frac{n_0}{4\theta n_0+1}\tag{12}$$

令 $\theta=2\pi$,得到系统的后继函数为

$$h(n_0)=\Phi(2\pi,n_0)-n_0=\frac{-8\pi n_0^2}{8\pi n_0+1}\tag{13}$$

满足 $h'(0)=0$,$h''(0)=-16\pi<0$. 由定理 1 可知 Υ

是外侧稳定、内侧不稳定的二重极限环.

下面考虑原非线性系统(2)的闭轨分叉问题. 当 $\lambda<0$ 时,O(0,0)为系统(2)唯一的稳定平衡点;而当 $0<\lambda<1$ 时,系统(2)有两个极限环:它们的轨线方程为

$$x^2+y^2=1\pm\lambda \tag{14}$$

并且,当 $\lambda\to 0$ 时,轨线(14)以 $\lambda=0$ 时的二重环 Υ 为极限位置.

3 数值模拟

在这一节,我们将根据参数的不同取值来观察非线性系统的闭轨分叉发生的过程. 利用 MATLAB 软件绘图可得系统的动力学响应,对于不同取值的 λ,分别给出了系统(2)在 $x^2+y^2=1$ 邻近位置的相图.

通过上面的数值模拟结果,我们发现,当 $\lambda<0$ 时,$O(0,0)$为系统(2)唯一的稳定平衡点,如图 1 所示;当 $\lambda=0$ 时,系统(2)具有二重环 Υ,系统的动力学响应如图 2 所示;当 $0<\lambda<1$ 时,系统(2)有如图 3 所示的两个极限环.

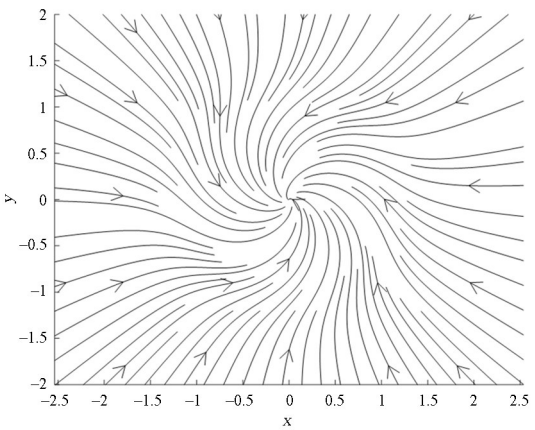

图 1 当 $\lambda=-1$ 时,系统(2)的相图

Fig. 1 Phase portrait of system (2) when $\lambda=-1$

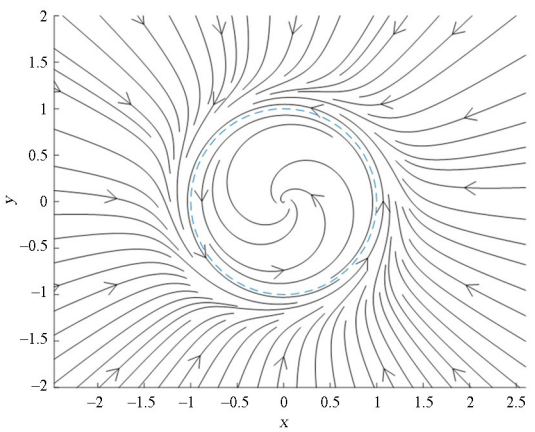

图 2 当 $\lambda=0$ 时,系统(2)的相图

Fig. 2 Phase portrait of system (2) when $\lambda=0$

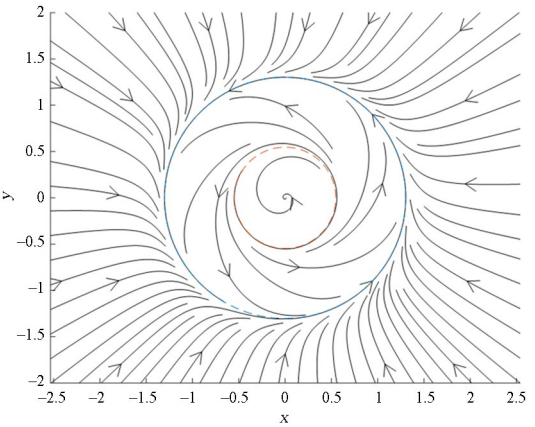

图 3 当 $\lambda=0.49$ 时,系统(2)的相图

Fig. 3 Phase portrait of system (2) when $\lambda=0.49$

4 总结

本文分析了一类非线性系统的闭轨分叉问题,通过选择合适的坐标变换,获得系统的后继函数显式表达式,讨论了系统存在的极限环及其稳定性. 最后,通过 MATLAB 进行数值模拟,得到系统的动力学响应特性.

参考文献

[1] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等. 微分方程定性理论[M]. 北京:科学出版社,1985:197-234.

[2] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海:上海科学技术出版社,1984:24-73.

[3] 陆启韶,彭临平,杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,2010:109-118.

[4] 韩茂安. 动力系统的周期解与分支理论[M]. 北京:科学出版社,2002:247-253.

[5] CHOW S N, HALE J K. Methods of bifurcation theory [M]. New York, NY: Springer-Verlag, 1982.

[6] LIU X L, HAN M A. Poincaré bifurcation of a three-dimensional system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23(4): 1385-1398.

[7] 金银来. 一类平面系统的闭轨分支[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),2002,28(1):18-20.
JIN Y L. The bifurcations of closed orbits for a class of planar systems [J]. Journal of Qufu Normal University (Natural Science), 2002, 28(1): 18-20. (in Chinese)

[8] 石志高,吴承强. 一类三次微分系统极限环的存在性和唯一性[J]. 福州大学学报(自然科学版),

2007，35(3)：344－347.
SHI Z G，WU C Q. The existence and uniqueness of limit cycles for a class of cubic differential systems [J]. Journal of Fuzhou University (Natural Science Edition)，2007，35(3)：344－347. (in Chinese)

[9] 刘宣亮，孟笑莹. 三维系统中一族闭轨在周期扰动下的分支[J]. 系统科学与数学，2009，29(8)：1034－1043.
LIU X L，MENG X Y. Bifurcation of a three-dimensional system with periodic perturbation [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences，2009，29(8)：1034－1043. (in Chinese)

[10] YE Z Y，HAN M A. Bifurcations of invariant tori and subharmonic solutions of singularly perturbed system [J]. Chinese Annals of Mathematics，Series B，2007，28(2)：135－148.

[11] 杨春妮，洪晓春. 一类平面五次扰动系统的极限环分支[J]. 云南民族大学学报(自然科学版)，2022，31(2)：203－207.
YANG C N，HONG X C. Bifurcation of limit cycles for a class of plane quintic systems with perturbed terms [J]. Journal of Yunnan Minzu University (Natural Sciences Edition)，2022，31(2)：203－207. (in Chinese)

[12] 张景涛，余秋里，洪晓春. 一类扰动七次哈密顿系统的极限环[J]. 曲靖师范学院学报，2022，41(3)：8－11＋15.
ZHANG J T，YU Q L，HONG X C. Limit cycles for a class of perturbed seventh order Hamiltonian systems [J]. Journal of Qujing Normal University，2022，41(3)：8－11＋15. (in Chinese)

[13] 朱红英，韦敏志，杨素敏，等. 一类四次扰动 Liénard 系统的极限环分支[J]. 数学物理学报，2021，41(4)：936－953.
ZHU H Y，WEI M Z，YANG S M，et al. Bifurcation of limit cycles from a Liénard system of degree 4 [J]. Acta Mathematica Scientia，2021，41(4)：936－953. (in Chinese)

[14] 魏怡倩，梁海华. 一类平面等时中心的极限环分支[J]. 高校应用数学学报，2021，36(4)：398－410.
WEI Y Q，LIANG H H. Bifurcation of limit cycles of a class of planar isochronous centers [J]. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities，2021，36(4)：398－410. (in Chinese)

[15] 甘晓亮. 极限环系统 Lyapunov 函数的存在性研究[D]. 上海：上海大学，2021.
GAN X L. Research on the existence of Lyapunov functions for limit cycle systems [D]. Shanghai：Shanghai University，2021. (in Chinese)

[16] LI J Q，MA X X，LI J，et al. Dynamics of a chronic virus infection model with viral stimulation delay [J]. Applied Mathematics Letters，2021，122：107547.

[17] GOLEBIEWSKA A，PEREZ-CHAVELA E，RYBICKI S，et al. Bifurcation of closed orbits from equilibria of Newtonian systems with Coriolis forces [J]. Journal of Differential Equations，2022，338：441－473.

[18] LI J Q，XIE X，CHEN Y M，et al. Complex dynamics of a tumor-immune system with antigenicity [J]. Applied Mathematics and Computation，2021，400：126052.

[19] LI K，MAO Y Z，WEI Z L，et al. Pool-rewarding in N-person snowdrift game [J]. Chaos，Solitons & Fractals，2021，143：110591.

[20] SHI Y X，HAN M A，ZHANG L J. Homoclinic bifurcation of limit cycles in near-Hamiltonian systems on the cylinder [J]. Journal of Differential Equations，2021，304：1－28.

[21] HU X，YANG J M. Limit cycle bifurcations for a kind of Liénard system with degree seven [J]. Journal of Dynamical and Control Systems，2022，28(2)：267－290.

[22] MURAKAMI H. The unique limit cycle in post Keynesian theory [J]. Chaos，Solitons & Fractals，2022，154：111597.

[23] WANG X Y，NIU W. Configuration of ten limit cycles in a class of cubic switching systems [J]. Mathematics，2022，10(10)：1712.

[24] 陈科文，赵海，周立杰，等. 超声速流中二元机翼的颤振与极限环[J]. 动力学与控制学报，2012，10(1)：62－66.
CHEN K W，ZHAO H，ZHOU L J，et al. Aerodynamic flutter and limited cycle of a 2-D wing in the hypersonic flow field [J]. Journal of Dynamics and Control，2012，10(1)：62－66. (in Chinese)

[25] 吴志强，张建伟，王喆. 极限环高阶分岔控制[J]. 动力学与控制学报，2007，5(1)：23－26.
WU Z Q，ZHANG J W，WANG Z. Higher order limit-cycle bifurcation control [J]. Journal of Dynamics and Control，2007，5(1)：23－26. (in Chinese)