

双周期参数系统的受迫振动响应^{*}

顾京君¹ 童彤¹ 黄迪山^{2†}

(1. 南通振康机械有限公司, 南通 226153)

(2. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444)

摘要 谐波减速器在制造过程中,如果柔轮齿与刚轮齿引入了周节累积误差,则谐波减速器在动力传递中将出现双周期时变扭转刚度波动,形成双周期参数振动问题.本文引入基于组合频率的二重三角级数,逼近双周期参数系统受迫振动,应用谐波平衡,得到不含时间变量的谐波系数递推式,形成三维矩阵代数方程;采用矩阵降维法,将三维矩阵代数方程转化为二维矩阵代数方程,实现响应谐波系数的求解.研究结果对双周期参数振动中响应预测问题研究和工程应用具有一定的理论指导意义.

关键词 双周期参数系统, 受迫振动, 二重三角级数, 谐波减速器

中图分类号:O3

文献标志码:A

Forced Response of Dual Periodic Parametric Vibration System^{*}

Gu Jingjun¹ Tong Tong¹ Huang Dishan^{2†}

(1. Nantong Zhenkang Machinery Co., Ltd, Nantong 226153, China)

(2. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract During the manufacturing process of harmonic reducers, if the accumulated pitch error is introduced among the flexible gear teeth and the rigid gear teeth, there will be dual period time-varying torsional stiffness fluctuations in the power transmission of harmonic reducers, resulting in dual period parameter vibration problems. In this paper, the double trigonometric series based on the combination frequency is introduced to approximate the forced vibration response of the dual periodic parameter system. By using harmonic balance operation, the recurrence formula of harmonic coefficient without time variable is obtained, and the three-dimensional matrix algebraic equation is formed. Using the matrix dimension reduction, the three-dimensional matrix algebraic equation is transformed into two-dimensional matrix algebraic equation, and the response harmonic coefficients have been solved. The research results have certain theoretical guidance significance for the research and engineering application in the forced response problem of dual periodic parameter vibration system.

Key words dual periodic parameter system, forced vibration, double trigonometric series, harmonic reducer

引言

谐波减速器广泛应用于各种机器人关节,它由

柔轮、刚轮、波发生器三大基本构件组成.波发生器镶套在柔轮内圈,柔轮齿与刚轮齿进行内啮合,柔轮齿数比刚轮齿数少,因此,它是一个少齿差传动

2023-07-08 收到第 1 稿,2023-10-10 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金(51575330), National Natural Science Foundation of China (51575330).

[†] 通信作者 E-mail:hdishan@shu.edu.cn

机构. 其中,波发生器由椭圆凸轮外套柔性滚动轴承组成,基本结构如图 1 所示.

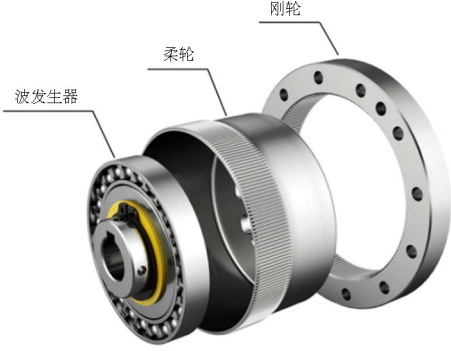


图 1 单刚轮谐波减速器基本结构

Fig. 1 Basic structure of single rigid wheel harmonic reducer

在制造过程中,如果柔轮齿与刚轮齿引入了周节累积误差,则谐波减速器在动力传递中将出现双周期时变扭刚度波动,形成双周期参数振动问题.

关于单自由度参数系统振动,学者王建军等^[1,2]利用 Sylvester 理论和 Fourier 级数给出了自由和受迫振动响应的级数解;Sinha^[3]基于雪比多夫多项式,推出逼近级数解;Ivana Kovacic^[4]回顾了儿种典型参数激励下的稳定性区域求解.近几年,利用组合频率三角级数法^[5,6]应用于多自由度参数振动分析,确定了自由与受迫振动响应的解析逼近.而大多数文献研究内容在基于 Floquet 理论上讨论参数振动稳定性问题^[7-11].但是,对于双周期参数振动的响应预测问题,仍然需深入探讨.

本文针对电机、谐波减速器和惯量负载传动问题,建立双周期参数振动方程,引入基于组合频率的二重三角级数,对其响应进行级数逼近研究.

1 动力学建模与二重三角级数逼近

在电机、谐波减速器和惯量负载传动中,考虑双周期时变扭刚度波动,建立双周期参数振动方程;对于受迫振动求解,由等效动力学模型,提出基于组合频率的二重三角级数逼近.

1.1 双周期参数振动方程

如图 2 所示的是一个谐波减速器的刚度曲线 $K_0(t)$,它可以认为在基础刚度 K_m 上叠加了两个频率不同的刚度波动,其数学表达为

$$K_0(t) = K_m (1 + \beta_1 \cos \omega_1 t + \beta_2 \cos \omega_2 t) \quad (1)$$

式中, ω_1 和 ω_2 均为刚度波动频率,又称参数频率;

β_1 和 β_2 为调制指数.

由于两个扭刚度波动的周期不同,但它们相互接近,导致扭刚度波动曲线呈拍频状(图 2).

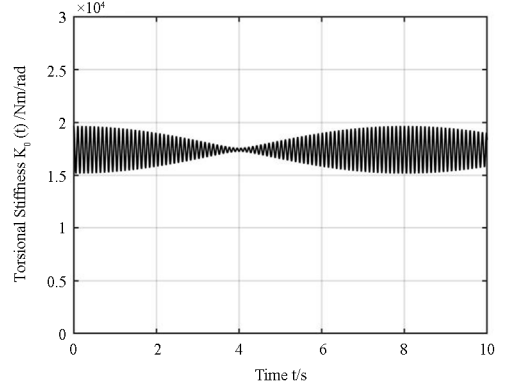


图 2 双周期时变扭刚度曲线 $K_0(t)$

Fig. 2 Dual period time-varying torsional stiffness curve $K_0(t)$

在谐波减速器传动中,电机、谐波减速器和惯量负载构成双惯量弹性负载系统,如图 3 所示.

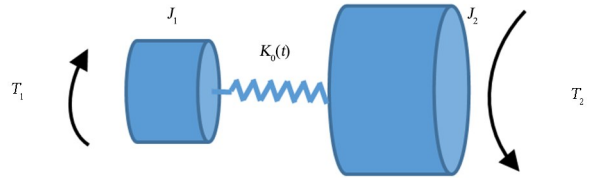


图 3 双惯量弹性负载系统

Fig. 3 Elastic loading system with dual inertia

双惯量弹性负载系统的扭振动方程为

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + C_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K_0(t)(\varphi_1 - \varphi_2) = T_1 \quad (2a)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 - C_0(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) - K_0(t)(\varphi_1 - \varphi_2) = -T_2 \quad (2b)$$

在方程(2)中,形成的刚度矩阵将为半正定,因此,双惯量弹性负载系统存在一个零固有频率.

对等式(2a)乘以 J_2/J_1 减去(2b)的代数运算,得到不含刚体位移的振动方程.

$$J_2(\ddot{\varphi}_1 - \ddot{\varphi}_2) + C_0 \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K_0(t) \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{J_2}{J_1} T_1 + T_2 \quad (3)$$

考虑 $K_0(t)$ 是式(1)所描述的双周期变刚度扭弹簧,在方程(3)中,设 $\theta = \varphi_1 - \varphi_2, J = J_2, C = \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) C_0, K = \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) K_m, T(t) = \frac{J_2}{J_1} T_1, T_2 = 0$, 即在没有外界负载干扰下,刻画一个具有双周期时变扭刚度的双惯量弹性负载系统,又称双周期参数系统,其振动方程简化为

$$J \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + K (1 + \beta_1 \cos \omega_1 t + \beta_2 \cos \omega_2 t) \theta$$

$$= T(t) \quad (4)$$

式中, θ 为两个惯量之间的扭转角, 力矩 $T(t) = T_0 + T \cos \omega_p t$ 来自于电机驱动. 其中, T_0 是电机恒力矩; $T \cos \omega_p t$ 是电机力矩波动, ω_p 为力矩波动频率, 一般它与电机轴转频相同.

1.2 双周期参数振动响应解形式

改写参数振动方程(4)为以下形式

$$J\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = T(t) - K(\beta_1 \cos \omega_1 t + \beta_2 \cos \omega_2 t)\theta \quad (5)$$

根据等式(5)表达, 双周期参数系统的等效动力学模型是一个双调制反馈控制系统, 如图4所示.

在双调制反馈控制系统中, 振动响应 $\theta(t)$ 同时被频率 ω_1 和 ω_2 所调制, 其频率被裂解, 在叠加以后, 反馈至系统的输入端. 通过连续交错地频率裂解和组合过程, 在振动响应 $\theta(t)$ 中, 存在一系列组合频率 $\omega + m\omega_1 + n\omega_2$ 谐波分量 ($m = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty, n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$). 因此, 双周期参数系统振动响应 $\theta(t)$ 可以用基于组合频率 $\omega + m\omega_1 + n\omega_2$ 的二重三角级数加以逼近, 即响应的数学表达式(6).

$$\theta(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [E_{m,n} e^{j(\omega+m\omega_1+n\omega_2)t} + F_{m,n} e^{-j(\omega+m\omega_1+n\omega_2)t}] \quad (6)$$

当外激励力 $T(t) = 0$ 时, 对应着双周期参数系统的自由响应, 式(6)中的 ω 为主振荡频率, 即 $\omega = \omega_p$; 当力矩 $T(t) \neq 0$, $\theta(t)$ 对应着双周期参数系统的受迫振动. 如果外激励力 $T(t) = T \cos \omega_p t$ 时, 则 $\omega = \omega_p$.

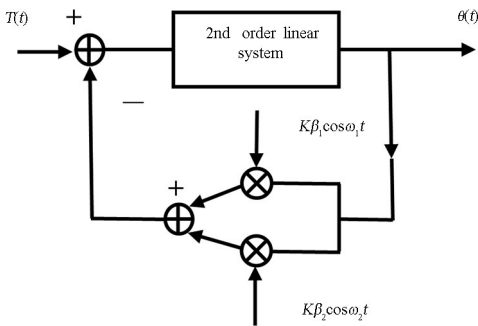


图4 双周期参数系统的等效动力学模型

Fig. 4 Equivalent dynamic model of double periodic parameter system

在图4的系统输出中, 由于振动响应能量的有限性, 能量主要分布在频率 ω 附近, 随着三角级数

项 $m \rightarrow \infty$ 或 $n \rightarrow \infty$, 则谐波系数 $E_{m,n} \rightarrow 0$ 和 $F_{m,n} \rightarrow 0$. 因此, 对于振动响应逼近, 可以采用有限项二重三角级数计算替代无限项级数的逼近.

2 受迫振动响应求解与计算

在双周期参数系统受迫振动的二重三角级数逼近中, 采用矩阵降维法, 实现对受迫振动的谐波系数 $E_{m,n}$ 的求解, 得到受迫振动响应解.

2.1 谐波力矩作用下受迫振动

若双周期参数系统受迫振动方程(4)为

$$J\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K(1 + \beta_1 \cos \omega_1 t + \beta_2 \cos \omega_2 t)\theta = T \cos \omega_p t \quad (7)$$

对于系统的受迫振动, 其响应解形式为

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-k}^k \sum_{n=-k}^k [E_{m,n} e^{j(\omega_p+m\omega_1+n\omega_2)t} + F_{m,n} e^{-j(\omega_p+m\omega_1+n\omega_2)t}] \quad (8)$$

将响应解形式(8)和欧拉公式代入方程(7), 对方程两边作谐波平衡, 从正复指数 $e^{j(m\omega_1+n\omega_2)t}$ 部分, 得到关于不含时间变量的谐波系数 $E_{m,n}$ 的递推式.

当 $m=0$ 和 $n=0$ 时

$$\frac{1}{2} \beta_1 K E_{-1,0} + \frac{1}{2} \beta_2 K E_{0,-1} + [K - J\omega_p^2 + jC\omega_p] E_{0,0} + \frac{1}{2} \beta_1 K E_{1,0} + \frac{1}{2} \beta_2 K E_{0,1} = T \quad (9)$$

一般情况下, 谐波系数 $E_{m,n}$ 的递推式为

$$\frac{1}{2} \beta_1 K E_{(m-1),n} + \frac{1}{2} \beta_2 K E_{m,(n-1)} + [K - J(\omega_p + m\omega_1 + n\omega_2)^2 + jC(\omega_p + m\omega_1 + n\omega_2)] E_{m,n} + \frac{1}{2} \beta_1 K E_{(m+1),n} + \frac{1}{2} \beta_2 K E_{m,(n+1)} = 0 \quad (10)$$

其中 $m = -k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$ 和 $n = -k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$.

这样, $(2k+1) \times (2k+1)$ 个 $E_{m,n}$ 的递推式构成了代数方程(11).

$$\mathbf{Z}\mathbf{E} = \mathbf{P} \quad (11)$$

式中, \mathbf{Z} 为 $2k+1$ 阶三维系数矩阵, \mathbf{E} 为待求的 $2k+1$ 阶二维谐波系数矩阵, \mathbf{P} 为 $2k+1$ 阶二维力矩矩阵. 在公式(11)中, 考虑了三维系数矩阵 \mathbf{Z} 的阶数

m 足够大时, 即 $m \rightarrow \infty$, 谐波系数 $E_{m+1,n} \rightarrow 0$, $E_{m,n+1} \rightarrow 0, E_{(m+1),-n} \rightarrow 0$ 和 $E_{-m,-(n+1)} \rightarrow 0$.

为了矩阵 Z, E 和 P 降维, 对于式(10)中的常数项, 记

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{1}{2}\beta_1 K \\
 r &= \frac{1}{2}\beta_2 K \\
 \bar{\omega}_{m,n} &= K - J(\omega_p + m\omega_1 + n\omega_2)^2 + \\
 & \quad jC(\omega_p + m\omega_1 + n\omega_2) \tag{12}
 \end{aligned}$$

引入子矩阵

$$\Omega_h = \begin{bmatrix} \bar{\omega}_{-kh} & t & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & t & \bar{\omega}_{-1h} & t \\ & & & t & \bar{\omega}_{0h} & t \\ & & & & t & \bar{\omega}_{1h} & t \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & t & \bar{\omega}_{kh} \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$R = \begin{bmatrix} r & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & r & & & \\ & & & r & & \\ & & & & r & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & r \end{bmatrix} \tag{14}$$

谐波系数子向量 E_h

$$E_k = [E_{-kh} \quad \cdots \quad E_{-1h} \quad E_{0h} \quad E_{1h} \quad \cdots \quad E_{kh}]^T \tag{15}$$

力矩子向量 P_0

$$P_0 = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad T \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T \tag{16}$$

将式(12)代入谐波系数 $E_{m,n}$ 递推式(9)和(10); 取 $h = -k, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$, 将子矩阵和子

向量式(13)至(14)按下标从 $-k$ 至 k 依次在平面上排列, 由此, 把三维代数方程(11)展成为二维代数方程(17).

$$\begin{bmatrix} \Omega_{-k} & R \\ R & \Omega_{-k+1} & R \\ & & \dots \\ & & & R & \Omega_{-1} & R \\ & & & & R & \Omega_0 & R \\ & & & & & R & \Omega_1 & R \\ & & & & & & \dots \\ & & & & & & & R & \Omega_{k-1} & R \\ & & & & & & & & R & \Omega_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{-k} \\ E_{-k+1} \\ \vdots \\ E_{-1} \\ E_0 \\ E_1 \\ \vdots \\ E_{k-1} \\ E_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

记为

$$\bar{Z} \bar{E} = \bar{P} \tag{18}$$

式中, \bar{Z} 为 $(2k + 1)^2$ 阶二维系数矩阵, \bar{E} 为 $(2k + 1)^2$ 阶谐波系数向量, \bar{P} 为 $(2k + 1)^2$ 阶力矩向量. 利用矩阵逆运算, 直接从方程(18) 可解得向量 \bar{E} .

同理, 从负复指数 $e^{-j(m\omega_1 + n\omega_2)t}$ 部分, 可以得到另一组谐波系数 $F_{m,n}$. 其中, 谐波系数 $E_{m,n}$ 与 $F_{m,n}$ 互为共轭.

2.2 振动响应计算

在双惯量弹性系统中, 外界激励力矩分两部分, 一是恒定力矩 T_0 , 这时 $\omega_p = 0$; 另一个是力矩波动, 力矩波动频率 $\omega_p = \omega_1$ (一般电机力矩波动为恒定力矩的 5%). 在不考虑负载力矩情况下, 对于双惯量弹性负载系统的受迫振动响应, 将按谐波力矩和恒力矩两种情况进行讨论.

在双惯量弹性负载系统(7)中, 设惯量 $J = 1$, 阻尼系数 $C = 2.64$, 平均刚度 $K = 17410$, 总扭刚度 $K(t)$ 曲线如图 2 所示; 参数频率一 $\omega_1 = 2\pi f_1, f_1 = 10.125\text{Hz}$, 调制指数一 $\beta_1 = 0.06$; 参数频率二 $\omega_2 = 2\pi f_2, f_2 = 10\text{Hz}$, 调制指数二 $\beta_2 = 0.07$.

表 1 算例 1 中部分谐波系数 $E_{m,n}$ 计算值
Table 1 Value of partial harmonic coefficient $E_{m,n}$ in Example 1

$E_{m,n}$ 计算值		
$E_{-1,0} = -1.19\text{e}-3 + j 3.10\text{e}-5$	$E_{-1,1} = 6.54\text{e}-4 - j 1.63\text{e}-4$	$E_{0,0} = 3.88\text{e}-2 - j 8.43\text{e}-4$
$E_{0,-1} = -1.39\text{e}-3 + j 3.62\text{e}-5$	$E_{-2,2} = 3.75\text{e}-6 - j 1.77\text{e}-6$	$E_{1,-1} = 7.51\text{e}-4 - j 2.19\text{e}-4$
$E_{1,-2} = -2.86\text{e}-5 + j 7.84\text{e}-6$	$E_{-3,3} = 2.46\text{e}-8 - j 1.44\text{e}-8$	$E_{2,-2} = 6.11\text{e}-6 - j 4.22\text{e}-6$
$E_{2,-3} = -2.80\text{e}-7 + j 1.56\text{e}-7$	$E_{-4,4} = 1.95\text{e}-10 - j 9.32\text{e}-11$	$E_{3,-3} = 5.54\text{e}-8 - j 7.75\text{e}-8$
$E_{3,-4} = -2.86\text{e}-9 + j 2.98\text{e}-9$	$E_{-5,5} = 1.97\text{e}-12 - j 3.03\text{e}-13$	$E_{4,-4} = 2.56\text{e}-10 - j 1.49\text{e}-9$
...

算例 1: 若驱动谐波力矩(电机驱动力矩波动)波幅 $T=0.5$, 激励频率 $\omega_p = \omega_1$, 计算双惯量弹性负载系统的受迫扭振动响应。

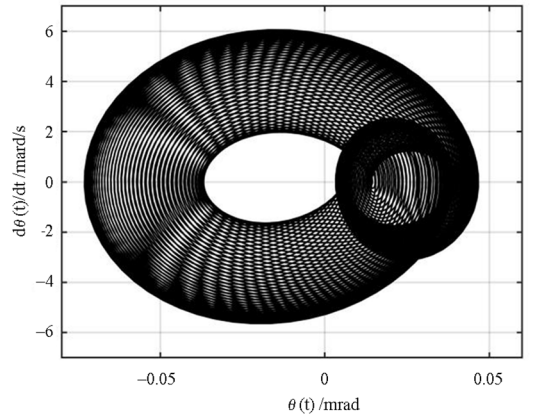
取级数项 $m = -11, \dots, -1, 0, 1, \dots, 11, n = -11, \dots, -1, 0, 1, \dots, 11$. 根据所给的动力学参数, 由公式(18)计算谐波系数矩阵中元素 $E_{m,n}$, 在频率 ω_p 附近的部分谐波系数数据列于表 1.

于是, 该双惯量弹性负载系统受迫扭振动响应 $\theta_1(t)$ 表达为:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} E_{m,n} e^{j(20.25+20.25m+20n)\pi t} + \frac{1}{2} \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} E_{m,n}^* e^{-j(20.25+20.25m+20n)\pi t} \\ &= \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} \operatorname{Re}(E_{m,n}) \cos[20.25(m+1) + 20n]\pi t - \\ &\quad \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} \operatorname{Im}(E_{m,n}) \sin[20.25(m+1) + 20n]\pi t \end{aligned}$$

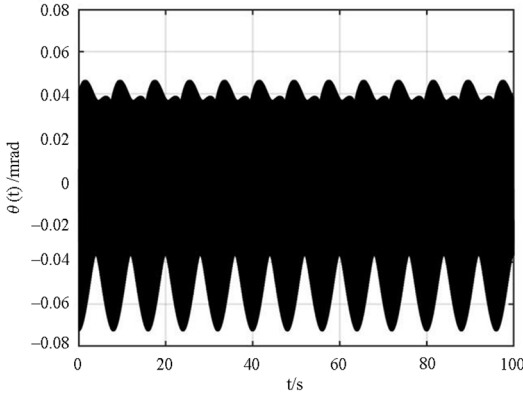
设置时间起点为 0, 步长 0.001 秒, 时间历程为 100 秒, 根据上述双惯量弹性负载系统受迫扭振动的响应表达, 计算该系统受迫振动响应时间历程 $\theta_1(t)$ 和频谱 $\Theta_1(\omega)$, 结果如图 5 所示, 其中, 振动响应有效值 $0.0318\text{m}\cdot\text{rad}$.

系统在外界激励力矩作用下, 从振动响应频谱 $\Theta_1(\omega)$ 可以看到, 在各主谐峰(基频 ω_p 的高阶谐频)的左右侧和直流分量的右侧, 存在着密集型的边频族分布。



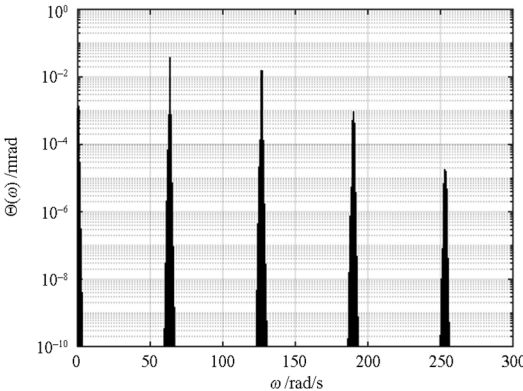
(c) 扭振动响应相轨迹 $\theta_1(t)$

(c) Phase trajectory of torsional vibration response $\theta_1(t)$
图 5 在谐波力矩驱动下的双周期参数系统受迫扭振动响应
Fig. 5 Forced torsional vibration under a harmonic torque



(a) 扭振动响应时间历程 $\theta_1(t)$

(a) Time history of torsional vibration response $\theta_1(t)$



(b) 扭振动响应谱 $\Theta_1(\omega)$

(b) Spectrum of torsional vibration response $\Theta_1(\omega)$

算例 2: 在恒力矩驱动下, 计算双惯量弹性负载系统的受迫扭振动响应。

设恒力矩幅 $T_0=10$, 这时驱动频率 $\omega_p = 0$, 根据所给动力学参数, 从式(18)计算谐波系数矩阵中元素 $E_{m,n}$, 部分计算值见表 2.

于是, 受迫扭振动响应 $\theta_2(t)$ 表达为

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \frac{1}{2} \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} [E_{m,n} e^{j(20.25m+20n)\pi t} + \\ &\quad E_{m,n}^* e^{-j(20.25m+20n)\pi t}] \\ &= \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} \operatorname{Re}(E_{m,n}) \cos(20.25m + 20n)\pi t - \\ &\quad \sum_{m=-11}^{11} \sum_{n=-11}^{11} \operatorname{Im}(E_{m,n}) \sin(20.25m + 20n)\pi t \end{aligned}$$

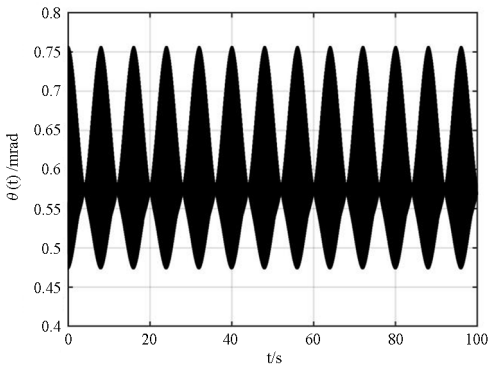
设置时间起点为 0, 步长 0.001 秒, 时间历程为 100 秒, 根据上述响应表达, 计算该双惯量弹性负载系统受迫扭振动响应, 其中振动响应时间历程 $\theta_2(t)$ 、响应频谱 $\Theta_2(\omega)$ 结果如图 6 所示, 振动谱特征与例 1 中的类同. 其中, 振动响应有效值 $0.0613\text{m}\cdot\text{rad}$.

与线性系统不同, 双周期参数系统在恒力矩驱

动下,仍然产生稳态的扭振动响应,而且,恒力矩越大,扭振动响应越大。

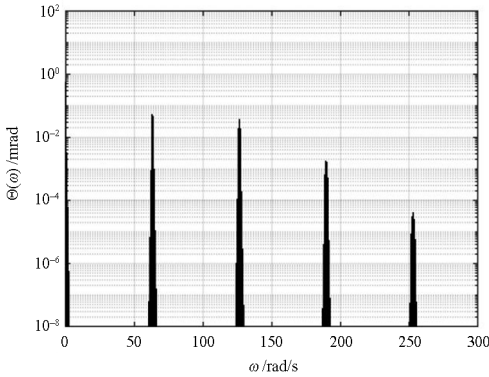
表 2 算例 2 中部分谐波系数 $E_{m,n}$ 计算值
Table 2 Value of partial harmonic coefficient $E_{m,n}$ in Example 2

$E_{m,n}$ 计算值		
$E_{0,0}=5.78e-1$	$E_{0,1}=-2.73e-2 + j 6.15e-4$	$E_{1,0}=-2.39e-2 + j 6.20e-4$
$E_{1,-1}=1.69e-3 - j 4.36e-6$	$E_{-1,2}=-4.48e-4 + j 8.85e-5$	$E_{2,-1}=-4.91e-4 + j 1.34e-4$
$E_{2,-2}=3.09e-5 - j 2.10e-6$	$E_{-2,3}=-3.43e-6 + j 7.52e-7$	$E_{3,-2}=-5.02e-6 + j 2.72e-6$
$E_{3,-3}=2.81e-7 - j 7.45e-8$	$E_{-3,4}=-3.20e-8 + j 1.96e-9$	$E_{4,-3}=-5.83e-8 + j 5.54e-8$
$E_{4,-4}=3.03e-9 - j 1.92e-9$	$E_{-4,5}=-3.04e-10 + j 7.73e-11$	$E_{5,-4}=-4.92e-10 - j 1.20e-9$
...



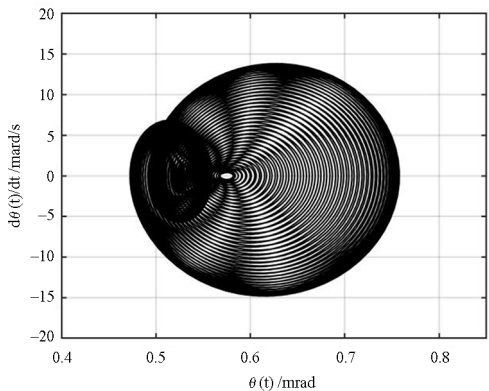
(a) 扭振动响应时间历程 $\theta_2(t)$

(a) Time history of torsional vibration response $\theta_2(t)$



(b) 扭振动响应谱 $\Theta_2(\omega)$

(b) Spectrum of torsional vibration response $\Theta_2(\omega)$



(c) 扭振动响应相轨迹 $\theta_2(t)$

(c) Phase trajectory of torsional vibration response $\theta_2(t)$

图 6 恒力矩驱动下的扭振动响应

Fig. 6 Torsional vibration response under a constant torque

3 双周期参数振动特征

无论在算例 1 还是在算例 2,在受迫振动响应谱中,都存在着密集型的边频分布,形成双周期参数振动响应特有的边频族特征.以算例 2 为例,对受迫振动响应谱图作局部放大处理,如图 7 所示.

在直流分量附近,存在 5 个数量级较大的边频分量,它们分别是 $0, \omega_1 - \omega_2, 2(\omega_1 - \omega_2), 3(\omega_1 - \omega_2)$ 和 $4(\omega_1 - \omega_2)$;在第一个谱族附近,存在 10 个数量级较大的边频分量,它们分别是 $5\omega_1 - 4\omega_2, 4\omega_1 - 3\omega_2, 3\omega_1 - 2\omega_2, 2\omega_1 - \omega_2, \omega_1, \omega_2, 2\omega_2 - \omega_1, 3\omega_2 - 2\omega_1, 4\omega_2 - 3\omega_1, 5\omega_2 - 4\omega_1$;在第二、三、四个谱族附近,同样存在这种密集型边频族现象.双周期参数系统的受迫振动响应频谱具有丰富的边频,形成组合频率特征的边频族,谐波分量具体数值详见表 2,其中边频间隔 $\Delta = \omega_1 - \omega_2$ 为两个参数频率之差.

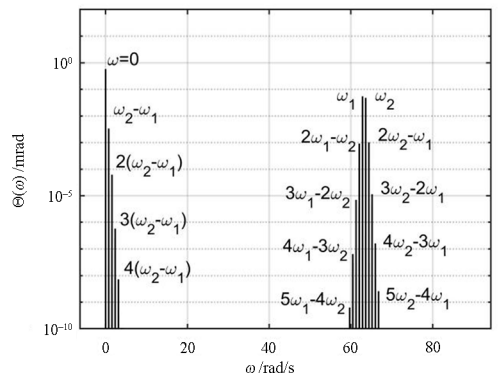


图 7 恒力矩驱动下的扭振动频谱局部放大图

Fig. 7 Local enlarged figure of torsional vibration spectrum under a constant torque

为了验证组合频率特征边频族的客观存在性,搭建谐波减速器试验台,对一批双刚轮谐波减速器试验样件,在试验台架上进行扭振实测.其中的一个试验样件,柔轮齿与刚轮齿都有较大的周节累积

加工误差,扭振测试结果如图8所示.在扭振动频谱局部放大图中,组合特征边频谱现象明显.其中, $f_1 = 34\text{Hz}$, $f_2 = 33.58\text{Hz}$,边频间隔约为 $\Delta \approx 0.42\text{Hz}$.

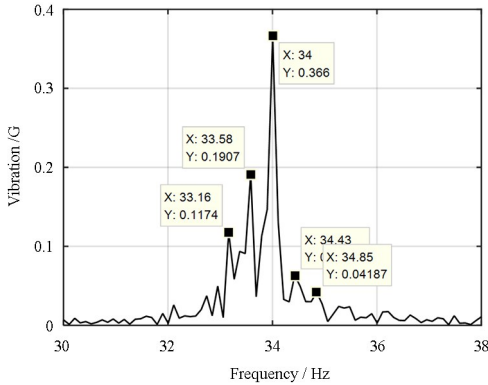


图8 某双刚轮谐波减速器扭振谱的组合频率特征
Fig. 8 Characteristic of combination frequency in torsional vibration spectrum of dual rigid wheel harmonic reducer

实验表明:对于周节累积加工误差谐波减速器扭振,采用双参数振动建模,振动理论谱与实测结果一致性好,反映了动力学建模的有效性.

4 逼近计算误差

为了评估三角级数逼近计算精度,根据公式(7),定义逼近误差为:

$$e(t) = (J\ddot{\theta} + C\dot{\theta})/K + (1 + \beta_1 \cos\omega_1 t + \beta_2 \cos\omega_2 t)\dot{\theta} - T \cos\omega_p t / K \quad (19)$$

其中, $\hat{\theta}(t)$ 为响应逼近; $e(t)$ 为逼近误差,单位为角位移或位移.

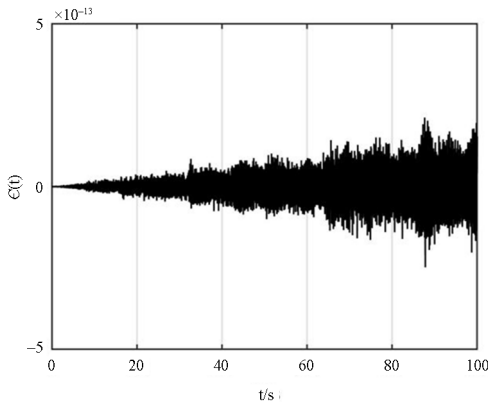


图9 算例1中逼近计算误差时间历程 $e(t)$ ($k=11$)
Fig. 9 Time history of approximation error in example1 $e(t)$ ($k=11$)

力幅 T 大小影响逼近误差,所以采用逼近计算误差 $e(t)$ 考核计算精度

$$\epsilon(t) = \frac{e(t)}{|x|_{\max}} \quad (20)$$

算例1的逼近计算误差时间历程 $\epsilon(t)$,如图9所示,逼近计算误差 ϵ 小于 $5e-13$ (参考Runge-Kutta法计算误差小于 $1e-3$).因此,用二重三角级数逼近双参数系统振动响应,其逼近计算精度足高.

当然,双周期参数振动响应的逼近计算误差与二重三角级数逼近的项数有关,当级数逼近项数越多,逼近计算误差越小,同时,计算机耗时也越多.

5 小结

在谐波传动中,如果柔轮齿与刚轮齿同时引入了周节累积误差,则谐波减速器在动力传递中将出现双周期参数振动问题.

基于组合频率的二重三角级数,可以对双周期参数系统受迫振动响应进行逼近,得到不含时间变量的谐波系数递推式,形成三维矩阵代数方程.通过引入中间变量,矩阵重新排列,对三维矩阵方程进行降维计算,实现对双周期参数系统的受迫振动响应谐波系数的求解,算法行之有效,并且准确性好.

通过计算分析可知,双周期参数系统受迫振动响应具有密集型组合频率边频族的特征,其中边频间隔 $\Delta = \omega_1 - \omega_2$,为两个参数频率之差.

参考文献

- [1] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学: 振动、冲击、噪声 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [2] 王建军,韩勤锴,李其汉. 参数振动系统响应的频谱成分及其分布规律 [J]. 力学学报, 2010, 42(3): 535-540.
WANG J J, HAN Q K, LI Q H. Spectral components and their distributions of the response for parametric vibration system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2010, 42(3): 535-540. (in Chinese)
- [3] SINHA S C, WU D H, JUNEJA V, et al. Analysis of dynamic systems with periodically varying parameters via Chebyshev polynomials [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1993, 115(1): 96-102.
- [4] KOVACIC I, RAND R, MOHAMED SAH S. Mathieu's equation and its generalizations: overview of

- stability charts and their features [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2018, 70(2): 020802.
- [5] HUANG D S, SHAO H X. Computation method for forced vibration response of a multiple DOF parametric system [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, 20 (11): 2050126.
- [6] HUANG D S, HONG L, LIU C. Computational technique to free vibration response in a multi-degree of freedom parametric system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 142: 106777.
- [7] GAO N, MEESAP C, WANG S Y, et al. Parametric vibrations and instabilities of an elliptical gear pair [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2020, 26 (19/20): 1721–1734.
- [8] WANG S Y, ZHAO X X, XIA Y, et al. Mechanical-electromagnetic coupling elastic vibration instability of symmetrical three-phase external rotor induction motor [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97 (1): 1–20.
- [9] GU J J, TONG T, HUANG D S, et al. Study on torsional vibration of a harmonic driver based on time-varying stiffness caused by manufacturing error [J]. *Journal of Vibroengineering*, 2021, 23(3): 619–631.
- [10] XU C, WANG Z Z, ZHANG H L, et al. Investigation on mode-coupling parametric vibrations and instability of spillway radial gates under hydrodynamic excitation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 106: 715–741.
- [11] DENG J. Numerical simulation of stability and responses of dynamic systems under parametric excitation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2023, 119: 648–676.