

机械臂负载移动性能与运动调控研究^{*}

陈星宇 张舒[†]

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要 工业的不断发展对机械臂的负载要求越来越高,而负载的增加会对机械臂末端的精度造成影响. 本文以 Franka 七轴串联机械臂为对象,采用 M-DH 法和雅可比迭代法对其正、逆运动学展开分析;采用三次函数插值法进行关节空间的轨迹规划. 基于拉格朗日方程建立了机械臂的动力学模型,并通过 Admas 和 Simulink 联合动力学仿真验证了动力学模型的有效性. 最后基于定位控制,对末端位置误差收敛速率、负载质量、控制参数之间的关系展开研究.

关键词 串联机械臂, 负载, 定位精度, 动力学建模, 控制补偿

中图分类号:O313

文献标志码:A

Research on Movement Performance and Motion Control of Manipulator with Load^{*}

Chen Xingyu Zhang Shu[†]

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract The continuous development of industry has higher and higher load requirements for the robot arm, and the increase of load will affect the accuracy of the end of the robot arm. In this paper, the forward and inverse kinematics of a seven-axis serial manipulator are analyzed by M-DH method and Jacobi iteration method. The trajectory planning of joint space is carried out by cubic function interpolation method. A dynamic model of the manipulator is established based on Lagrange equation, and the effectiveness of the model is verified by numerical methods. Finally, based on the positioning control, the relationship between the convergence rate of the end position error, the load quality and the control parameters is studied.

Key words serial manipulator, load, positioning accuracy, dynamic modeling, control compensation

引言

随着国内市场需求的日益提升和机器人技术的不断发展,机械臂已逐渐替代人力成为自动生产线上的主导力量^[1],如在喷涂、焊接、零件装配、机械加工等作业中^[2-4]. 然而,机械臂的发展也面临许

多挑战,其中之一在于机械臂对于负载能力的要求逐渐提高,如家具搬运^[5],水果采摘^[6]等,而大负载的出现会导致许多问题. 例如,大负载的出现会对机械臂的运动性能带来影响,大惯性力使机械臂的负载效应变得明显,从而影响其末端的定位精度^[7,8]. 因此,研究大负载如何影响机械臂末端精度

2023-09-19 收到第 1 稿,2023-10-20 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12072237)和中央高校基本科研业务费专项基金(22120220590), National Natural Science Foundation of China (12072237) and Fundamental Research Funds for the Central Universities (22120220590).

[†] 通信作者 E-mail: zhangshu@tongji.edu.cn

成为一个极为重要的科学问题。

机械臂种类繁多,若按机械臂轴数来分,常见的有四轴、六轴、七轴。其中,四轴机械臂具有出色的刚性和高速度,但灵活性相对较低,适用于高速和高重复性的任务;六轴机械臂则具有高度的灵活性,但需要较大的运动空间,且随着连杆数量的增加,其动力学方程也变得更加复杂,适用于喷涂、焊接等任务;与六轴机械臂相较之下,七轴机械臂在灵活性和精度方面表现更加出色,同时运动空间小,但其刚性较低,逆运动学问题求解也更为复杂,因此,七轴机械臂适用于空间有限但需要高度灵活性的任务^[9-11]。

机械臂的特性分析主要包括运动学分析和动力学分析。运动学分析涉及正、逆运动学方程的求解。其中正运动学主要采用 DH(Denavit-Hartenberg)参数法得到连杆变换矩阵从而得到正运动学方程^[12,13],此外,还可以通过螺旋理论^[14]、Gibbs-Appell 公式^[15]建立运动学方程。而逆运动学常用的方法可分为解析法和数值法,对于复杂的机械臂一般找不到其解析解只能采用数值法,常用的数值法有雅可比迭代法^[16]、粒子群法^[17]等。对于动力学分析,常用的动力学建模方法有 Lagrange 法^[18]、Kane 法^[19]、Newton-Euler 法^[20]等。

机械臂的轨迹规划主要分为两种,一种是在关节空间中,一种是在笛卡尔空间中^[21]。其中关节空间的轨迹规划计算方便简单,但其末端运动路径不直观,一般用于对末端执行器运动路径需求小的作业,方法有多项式插值法^[22]、RRT 算法(Rapidly Exploring Random Tree)^[23];而笛卡尔空间的轨迹规划计算困难复杂,但能直观地看到末端运动路径,一般用于对末端执行器运动路径有需求的作业,方法有遗传算法^[24]、梯形加减速法^[25]等。

要保证大负载下末端的移动性能则需要对机械臂的控制进行补偿。对于大负载所引起的关节变形的控制补偿,毛晨涛等^[26]通过激光跟踪仪测量辨识大负载机器人的关节刚度系数,并对控制律进行优化设计。王旭等^[27]提出了通过直接计算关节变形量补偿变形误差的方法。

对于大负载引起的惯性力的增加,罗天洪等^[8]提出了基于神经网络补偿的机械臂轨迹控制策略。李佳兵等^[28]利用 PSO(Particle Swarm Optimization)优化算法对大负载机械臂载荷参数自动控制

进行设计。对于大负载所引起的残余振动,马驰骋、张春林等^[29]通过施加速度负反馈控制的方法,有效地抑制系统的残余振动。Liu 等^[30]提出了一种关节空间多目标轨迹规划方案来减小承载有效载荷柔性机械臂的残余振动。Xiao^[31]针对变负载提出了一种 H_{∞} 自适应控制策略来保证位置跟踪。

本文以七轴串联机械臂为对象,开展运动学分析、路径规划、动力学分析、稳定性分析、定位控制误差分析等研究工作,旨在探索大负载对机械臂末端精度的影响。针对这一研究,本文主要开展以下几项工作:(1)机械臂运动学建模及路径规划;(2)含大负载的机械臂动力学建模;(3)控制律的设计与稳定性分析;(4)控制参数和末端负载对机械臂末端移动性能的影响。

1 七轴串联机械臂的运动学分析

机械臂的动力学分析是对机械臂系统施加精确控制的基础,而运动学分析则是建立动力学模型和施加动力学控制的前提条件。因此,本节将进行 Franka 七轴串联机械臂的运动学分析。

1.1 M-DH 参数法

DH 参数法是串联机械臂中最常用的一种运动学建模方法,目前,主要的 DH 参数法有两种,一个是标准的 DH 参数法,一个是改进的 DH 参数法(M-DH 法(Modified Denavit-Hartenberg)),其二者的区别主要在于四个参数的选取标准不同。本文采用的建模方法为 M-DH 参数法。

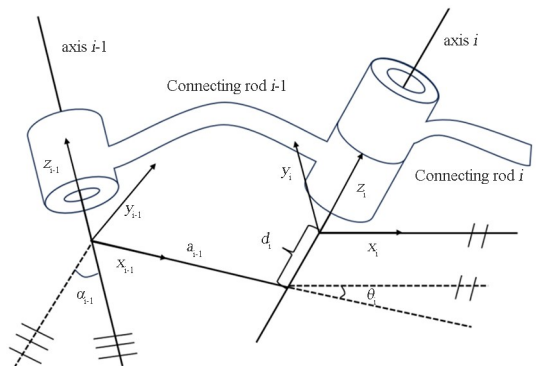


图 1 连杆坐标系的建立

Fig. 1 The establishment of connecting rod coordinate system

如图 1 所建立的 M-DH 坐标系,其中,连杆坐标系 $\{i-1\}$ 的 z_{i-1} 轴与 $i-1$ 关节的轴线重合,方向任意; x_{i-1} 轴与 z_{i-1} 轴与 z_i 轴之间的公垂线重合,若 z_{i-1} 轴与 z_i 轴相交,则 x_{i-1} 轴垂直于 z_{i-1} 轴

与 z_i 轴所形成的平面; y_{i-1} 轴由右手法则确定; 原点 o_{i-1} 建立在 x_{i-1} 轴和 z_{i-1} 轴的交点, 若 z_{i-1} 轴和 z_i 轴相交, 则原点建立在 z_{i-1} 轴与 z_i 轴的交点处。

对于基底坐标系 ($\{0\}$ 坐标系), 其与机械臂的底端固定, 方向可任意选择. 为了方便起见, 一般与当关节 1 的旋转角度为 0 时的连杆坐标系 $\{1\}$ 重合。

对于末端坐标系 ($\{n\}$ 坐标系), 其原点和 x_n 轴的方向可以任意选择, 为了方便起见, 对于原点的选择一般使连杆参数 $d_n=0$, 对于 x_n 轴的选择一般使连杆参数 $\theta_n=0$ 。

由此可以得到相邻连杆间的坐标变换矩阵为:

$${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i \sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i \cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中参数 a_{i-1} 为 $\{i-1\}$ 坐标系的 z_{i-1} 轴沿着 x_{i-1} 轴到 $\{i\}$ 坐标系 z_i 轴的距离, 参数 α_{i-1} 为 $\{i-1\}$ 坐标系的 z_{i-1} 轴绕着 x_{i-1} 轴转到 $\{i\}$ 坐标系 z_i 轴的角度, 参数 d_i 为 $\{i-1\}$ 坐标系的 x_{i-1} 轴沿着 z_i 轴到 $\{i\}$ 坐标系 x_i 轴的距离, 参数 θ_i 为 $\{i-1\}$ 坐标系的 x_{i-1} 轴绕着 z_i 轴转到 $\{i\}$ 坐标系 x_i 轴的角度。

1.2 正运动学分析

本文以 Franka 七轴串联机械臂为对象, 其模型如图 2 所示。

根据 Franka 七轴串联机械臂模型图, 建立其



图 2 Franka 七轴机械臂模型图

Fig. 2 Franka seven-axis manipulator model

M-DH 坐标系如图 3 所示。

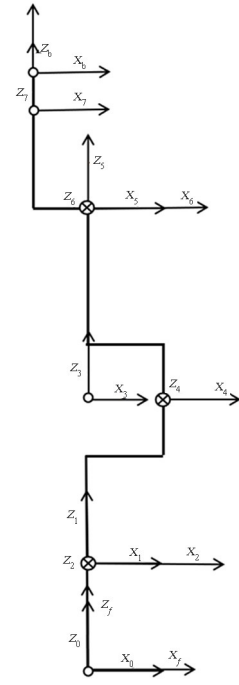


图 3 M-DH 坐标系

Fig. 3 M-DH coordinate system

下表是该机械臂的 DH 参数:

表 1 Franka 七轴机械臂 DH 参数表
Table 1 Franka seven-axis manipulator DH parameter table

Joint	θ_i	d_i	α_{i-1}	a_{i-1}
1	q_1	d_1	0	0
2	q_2	0	$-\pi/2$	0
3	q_3	d_3	$\pi/2$	0
4	q_4	0	$-\pi/2$	a_4
5	q_5	d_5	$\pi/2$	a_5
6	q_6	0	$-\pi/2$	0
7	q_7	d_7	$\pi/2$	a_7

其中 $d_1=0.333\text{m}$, $d_3=0.315\text{m}$, $d_5=0.383\text{m}$, $d_7=0.159\text{m}$, $a_4=0.083\text{m}$, $a_5=-0.083\text{m}$, $a_7=-0.089\text{m}$ 。

将 DH 参数代入式(1)中, 求出相邻连杆间的变换矩阵后, 依次相乘可得到 Franka 七轴串联机械臂的正运动学方程, 如下:

$${}^0_bT = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T {}^5_6T {}^6_7T {}^7_bT \quad (2)$$

1.3 逆运动学分析

机械臂的逆运动学分析是根据机械臂末端相对于机械臂基底坐标系的位姿来求解出机械臂每

个关节的旋转角度. 因此, 本小节将采用雅可比迭代法, 对 Franka 七轴串联机械臂的逆运动学方程进行求解.

根据机械臂的末端笛卡尔速度和关节速度微分运动方程, 有:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (3)$$

其中 \mathbf{J} 表示机械臂的雅可比矩阵, 而 $d\mathbf{X}, d\mathbf{q}$ 的形式如下:

$$d\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ d\alpha \\ d\beta \\ d\gamma \end{Bmatrix} \quad d\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ d\theta_3 \\ d\theta_4 \\ d\theta_5 \\ d\theta_6 \\ d\theta_7 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

则可得到:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}\dot{\mathbf{X}} \quad (5)$$

将机械臂末端的微小运动 $d\mathbf{X}$ 用各关节的运动 $d\mathbf{q}$ 叠加来近似得到. $d\mathbf{X}$ 越小, 其近似效果越好, 即认为机械臂各关节的旋转角度由初始角度 \mathbf{q} 一步一步旋转到期望角度 \mathbf{q}_e , 假设每一步的步长为 $\Delta\mathbf{q}$, 有:

$$\Delta\mathbf{q} = (\mathbf{J}^T\mathbf{J})^{-1}\mathbf{J}^T \cdot d\mathbf{X} \quad (6)$$

因为七轴串联机械臂属于冗余机械臂, 因此雅可比矩阵求逆需引入伪逆矩阵, 即:

$$\text{pinv}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \quad (7)$$

其中 $\text{pinv}(\ast)$ 表示求伪逆.

由此, 求逆运动学解的具体步骤为:

- 设置好最大迭代次数, 初始末端位姿矩阵和期望末端位姿矩阵, 设定好位姿误差范数 g ;
- 计算下一步机械臂的各关节变换角度;
- 更新机械臂各关节角度 \mathbf{q} , 其中 $\mathbf{q} = \mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}$;
- 更新此时机械臂末端位姿状态 \mathbf{X} ;
- 计算此时误差 $d\mathbf{X}$ 的 1 范数 ($\|\mathbf{X}\|$);
- 迭代次数+1;
- 判断 $\|\mathbf{dX}\| \leq g$, 若是, 则退出迭代, 若不是, 则返回步骤 b , 直至 $\|\mathbf{dX}\| \leq g$ 或达到最大迭代次数;

h. 输出此时各关节的角度 \mathbf{q}, \mathbf{q} 即为期望末端位姿的逆运动学解.

1.4 关节空间轨迹规划

本小节采用三次多项式插值法对机械臂关节

空间进行轨迹规划, 其函数 $\theta(t)$ 的形式如下:

$$\theta(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 \quad (8)$$

由约束条件:

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta(t_d) = \theta_d \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_d) = \dot{\theta}_d \end{cases} \quad (9)$$

其中, 起始位置的关节角度 θ_0 是已知的, 而期望位置的关节角度 θ_d 可通过给定末端位姿后, 通过逆运动学方程求解得到. 而起始位置的关节角速度和期望位置的关节角速度由自己给定, 也是已知的. 因此, 可得到:

$$\begin{cases} a = \theta_0 \\ b = \dot{\theta}_0 \\ c = \frac{3}{t_d^2}(\theta_d - \theta_0) - \frac{2}{t_d}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_d}\dot{\theta}_d \\ d = \frac{2}{t_d^3}(\theta_d - \theta_0) + \frac{1}{t_d^2}(\dot{\theta}_d + \dot{\theta}_0) \end{cases} \quad (10)$$

2 七轴串联机械臂的动力学分析

2.1 含负载 Franka 七轴串联机械臂动力学建模

机械臂包含多个连杆和关节, 其动力学系统具有多输入多输出的性质, 存在复杂的耦合关系和严重的非线性. 因此, 本节以含负载的 Franka 七轴串联机械臂为对象, 采用拉格朗日法对其进行动力学分析.

对于任意机械系统, 规定其拉格朗日函数的形式为系统的动能 L 与势能 U 之差, 即:

$$L = T - U \quad (11)$$

则该系统的动力学方程可写成:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

其中动能(采用极惯性矩方法求解), 势能分别为:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial ({}^0\mathbf{T})}{\partial q_i} \bar{I}_i \frac{\partial ({}^0\mathbf{T})^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (13)$$

$$U = - \sum_{i=1}^n m_i g ({}^0\mathbf{T}^i \mathbf{p}_{ci}) \quad (14)$$

极惯性矩阵表示为:

$$\bar{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} -{}^i I_{xx} + {}^i I_0/2 & {}^i I_{xy} & {}^i I_{xz} & m^i \bar{x} \\ {}^i I_{xy} & -{}^i I_{yy} + {}^i I_0/2 & {}^i I_{yz} & m^i \bar{y} \\ {}^i I_{xz} & {}^i I_{yz} & -{}^i I_{zz} + {}^i I_0/2 & m^i \bar{z} \\ m^i \bar{x} & m^i \bar{y} & m^i \bar{z} & m \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中, $I_0 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ 表示连杆相对原点的惯性矩. 重力矢量 $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ 9.8 \ 0] \text{ m/s}^2$.

推导出机械臂系统的总动能和总势能后, 将其代入式(12)可得:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (16)$$

其中 $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ 是机械臂的质量矩阵, $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ 是机械臂的科氏矩阵, $\mathbf{G}(\mathbf{q})$ 是机械臂的重力矩阵, 其具体形式分别如下:

$$\mathbf{D}_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_j} \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{\partial \mathbf{D}_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{D}_{ji}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \right] \dot{q}_k \right\} \quad (18)$$

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{q}) = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (19)$$

由于现实工况中, 考虑机械臂各个关节存在摩擦力 f , 则式(12)变为:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \quad (20)$$

其中, 摩擦力模型采用 Stribeck 模型, 本小节考虑实际中关节正反向运动的摩擦力参数可能不同, 因此摩擦力 f 形式如下:

$$f(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{cases} \{F_c^+ + (F_s^+ - F_c^+) \exp[-(\dot{q}/v_s^+)^\zeta]\} + \sigma^+ \dot{q} & (\dot{q} > 0) \\ -\{F_c^- + (F_s^- - F_c^-) \exp[-(\dot{q}/v_s^-)^\zeta]\} + \sigma^- \dot{q} & (\dot{q} < 0) \\ F_e & (\dot{q} = 0, |F_e| \leq F_s) \\ F_s^+ & (\dot{q} = 0, F_e > 0, |F_e| \geq F_s) \\ -F_s^- & (\dot{q} = 0, F_e < 0, |F_e| \geq F_s) \end{cases} \quad (21)$$

其中, F_c 、 F_s 、 v_s 、 σ 分别表示库伦摩擦力, 静摩擦力, Stribeck 速度, 黏性摩擦系数. ζ 是经验参数, (这里参考 Lugre 的静态模型, $\zeta = 2$). 此外, F_e 表示外力, 而正、负分别表示沿关节转动正方向和负方向.

本文假设 Stribeck 模型参数和机械臂各连杆的质量相关, 参照文献[32]中得到数据, 可得 Franka 各关节摩擦力参数的信息, 如下表:

表 2 Stribeck 模型参数

Table 2 Stribeck model parameters

Joint	1	2	3	4	5	6	7
F_c^-	0.1361	0.1481	0.1264	0.1321	0.1013	0.1002	0.0978
F_c^+	0.1759	0.2029	0.1537	0.1668	0.0969	0.0945	0.0890
F_s^-	0.3664	0.4603	0.2895	0.3348	0.0922	0.0838	0.0648
F_s^+	0.3617	0.4563	0.2841	0.3298	0.0853	0.0768	0.0576
v_s^-	0.2178	0.1896	0.2409	0.2273	0.3001	0.3027	0.3084
v_s^+	0.2969	0.2530	0.3329	0.3117	0.4251	0.4290	0.4379
σ^-	0.1907	0.2283	0.1599	0.1780	0.0809	0.0775	0.0699
σ^+	0.1151	0.1272	0.1051	0.1110	0.0796	0.0785	0.0761

2.2 基于 Matlab 的动力学仿真

本文以 Franka 七轴串联机械臂为对象, 通过将 Franka 七轴串联机械臂模型导入到 SolidWorks 软件中, 为模型施加材料属性 ($\rho = 4650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) 后测得其相关参数, 见表 3.

表 3 Franka 七轴机械臂的相关参数

Table 3 Related parameters of Franka seven-axis manipulator

Joint	1	2	3	4	5	6	7
m/kg	3.57	4.64	3.02	3.45	1.15	1.07	0.89
\bar{x}/m	0	0.1e-3	3.6e-2	-4.1e-2	-1e-2	-6.4e-2	0.7e-2
\bar{y}/m	1.6e-2	-8.0e-2	1.3e-2	-4.8e-2	4.1e-2	0.9e-2	-0.7e-2
\bar{z}/m	-9.6e-2	-1.8e-2	-5.3e-2	-1.4e-2	-0.109	-2.3e-2	-3.2e-2
$I_{xx}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0.0664	0.0697	0.0209	0.0225	0.0276	0.0034	0.0019
$I_{yy}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0.0635	0.011	0.0284	0.0184	0.024	0.008	0.0019
$I_{zz}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0.0095	0.0666	0.015	0.0327	0.0052	0.0086	0.0015
$I_{xy}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0	-1e-4	-0.0031	-0.0135	0	-8e-4	2e-4
$I_{xz}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0	0	-1e-4	1e-4	0	0.0011	-1e-4
$I_{yz}/\text{kg} \cdot \text{m}^2$	-5.4e-4	6e-4	-1e-4	0	-0.0023	-1e-4	-2e-4

首先将表 3 的参数和式(15)代入到式(13)中, 并通过 Matlab 对其进行计算得到机械臂的总动能 T , 接着将求得的 T 代入到式(17)和式(18), 分别求得机械臂的质量矩阵和科氏矩阵, 随后通过 Matlab 对式(14)进行计算得到机械臂的总势能 U , 最后将求得的 U 代入到式(19)中求得机械臂的重力矩阵, 至此, 基于 Matlab 的动力学方程建立初步完成.

2.3 动力学模型的验证

动力学模型的验证主要通过对比 Matlab 的动力学仿真输出的各关节轨迹图和基于 Simulink 和 Adams 的联合动力学仿真输出的各关节轨迹图。本小节所采用负载质量的大小为 2kg, 其体积为 $0.1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m}$ 。

基于 Matlab 的动力学仿真本质上是一个正动力学问题, 首先对驱动关节施加 PD 控制, 即:

$$\tau = K_p e + K_d \dot{e} \quad (22)$$

其中,

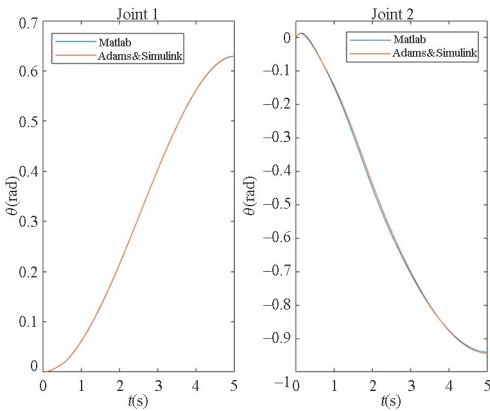
$$e = q_e - q, \quad \dot{e} = \dot{q}_e - \dot{q} \quad (23)$$

其中, q_e 表示期望轨迹对应的关节旋转角度, q 表示瞬时时刻的关节旋转角度。

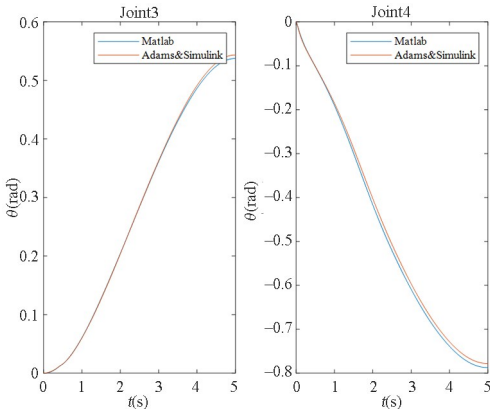
令机械臂各关节的起始旋转角度均为 0, 而期望的关节旋转角度为:

$$q_e = \left[\frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, -\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \right] \quad (24)$$

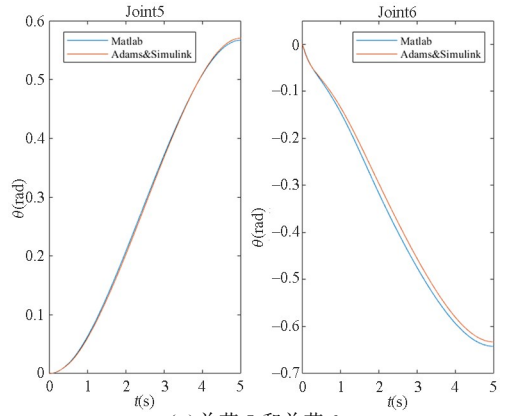
接着采用三次插值法对各个关节进行轨迹规划, 令 $t_d = 5\text{s}$, 频率为 1000Hz, 即 $dt = 0.001\text{s}$, 由此可得各关节角度的一组轨迹数据。



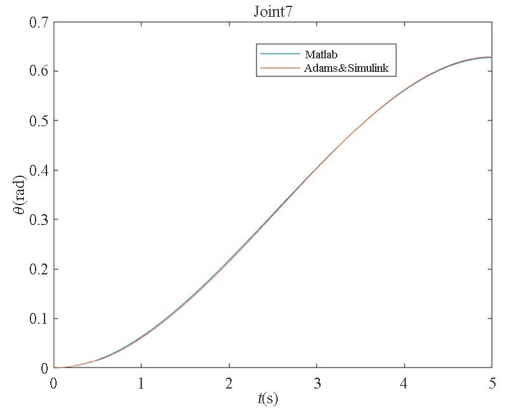
(a) 关节 1 和关节 2
(a) Joint 1 and joint 2



(b) 关节 3 和关节 4
(b) Joint 3 and joint 4



(c) 关节 5 和关节 6
(c) Joint 5 and joint 6



(d) 关节 7
(d) Joint 7

图 4 关节 1~7 轨迹时程图

Fig. 4 Joint 1~7 trajectory timeline diagram

接着, 将 SolidWorks 中已经附上材料属性的 Franka 七轴串联机械臂的模型导入到 Adams 软件中, 并为各个关节设置约束条件和初始条件后导入到 Simulink 中添加 Stribeck 摩擦和 PD 控制(令 $T = 5\text{s}$, 期望轨迹采用基于 Matlab 动力学仿真的期望轨迹, 并利用 ode45 求解器进行求解), 由此得到另一组轨迹数据。将 Matlab 得到数据与联合仿真得到的数据绘制成轨迹时程图进行比较, 结果如图 4 所示。

从图 4 七个关节轨迹时程图对比来看, 可以发现二者轨迹曲线定性吻合, 因此验证了本文建立的动力学模型的有效性。

3 机械臂控制系统的稳定性分析

对于一个系统而言, 无论其处于何种初始状态条件, 如果其能量是耗散的, 那么该系统在经过一个初始扰动后, 就会不断损耗能量直至达到平衡点位置静止, 这就是李雅普诺夫直接法的物理判据。该方法不需要通过求解复杂的系统非线性微分方

程就可以得出系统是否稳定的结论,因此本小节采用李雅普诺夫直接法对动力学控制系统的稳定性进行分析^[33].

首先构造出李雅普诺夫函数,其形式如下:

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (25)$$

因为质量矩阵 $\mathbf{D}(\mathbf{q})$ 和 \mathbf{K}_p 都是正定的,因此该李雅普诺夫函数是正定的,当且仅当 $\dot{\mathbf{q}} = 0, \mathbf{e} = 0$ 时, $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$. 随后,对式(25)求一次导,因为定位控制有 $(\dot{\mathbf{q}}_e) \equiv 0$, 所以可得:

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (26)$$

结合式(16)、式(18)和式(26)可得:

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{G} - \mathbf{f} - \mathbf{K}_p \mathbf{e}) \quad (27)$$

令式(27)括号里的式子等于 $-\mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}$, 即:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} + \mathbf{f} \quad (28)$$

可得:

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad (29)$$

由于 \mathbf{K}_d 是正定的,所以此时的 $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leq 0$ 在整个空间中恒成立,当且仅当 $\dot{\mathbf{q}} = 0$ 时, $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$. 所以式(28)控制律下的机械臂系统的定位控制能够实现全局渐近稳定.

随后对该控制律进行验证,采用 P2(全局坐标为 $[-0.3 \ 0.15 \ 0.04]$ m) 为期望位置,起始位置为 P1(全局坐标为 $[-0.45 \ 0 \ 0.2]$ m), 分别采用式(22)和式(28)的控制率,基于 Matlab 进行动力学仿真,并对其末端位置准确度分别进行测量,其末端位置准确度的计算公式如下:

$$AP_p = \sqrt{(\bar{x} - x_c)^2 + (\bar{y} - y_c)^2 + (\bar{z} - z_c)^2} \quad (30)$$

其中, $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 表示多次对同一位姿重复响应后得到的位置平均值,而 x_c, y_c, z_c 表示指令位置.

经计算可得,式(22)控制下 $AP_p = 8.24 \times 10^{-3}$ m, 式(28)控制下 $AP_p = 0.42 \times 10^{-7}$ m.

随后对其末端的姿态准确度进行测量,其末端姿态准确度的计算公式如下:

$$\begin{aligned} AP_a &= (\bar{a} - a_c) \\ AP_b &= (\bar{b} - b_c) \\ AP_c &= (\bar{c} - c_c) \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ 表示多次对同一位姿重复响应后得到

的姿态角的平均值,而 a_c, b_c, c_c 表示指令姿态角.

经计算可得,式(22)控制下 $AP_a = -0.0898$ 、 $AP_b = -0.1781$ 、 $AP_c = -6.5579 \times 10^{-4}$ (单位弧度), 式(28)控制下 $AP_a = 9.6593 \times 10^{-6}$ 、 $AP_b = -6.1366 \times 10^{-6}$ 、 $AP_c = 4.6010 \times 10^{-5}$ (单位弧度).

对比位姿准确度,可以发现单独的 PD 控制并不能实现机械臂的定位控制,而添加重力补偿项和摩擦力补偿项的控制律能够很好地将定位控制的位姿误差维持在一个很小的范围内.

4 控制参数和负载质量对机械臂末端移动性能的影响规律

4.1 负载质量对机械臂末端移动性能的影响

本节采用定位控制,令起始位置为 P1(全局坐标为 $[-0.4 \ 0 \ 0.2]$ m), 期望位置为 P2(全局坐标为 $[-0.3 \ 0.15 \ 0.04]$ m). 令末端负载质量由 1kg 每次增加 0.5kg 到 5kg 共 9 种不同的工况,进行动力学仿真,得到其中一末端位置准确度的时程图如下:

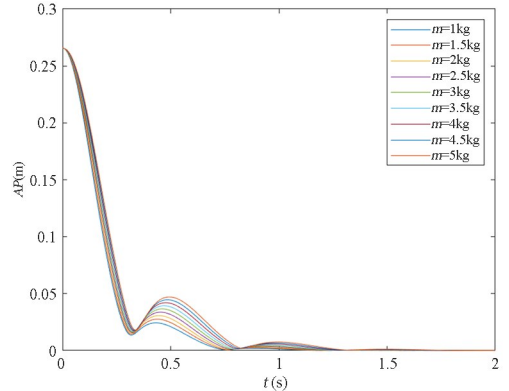


图5 末端位置准确度时程图
Fig. 5 End position accuracy timeline

图5中越往外的曲线对应的负载质量越大,因此可以初步判断当末端质量越大时,机械臂末端误差收敛速率越慢.

为了验证该猜想,采用对数衰减率 δ 来体现其收敛速率 v_{AP} , δ 的定义如下:

$$\delta = \ln \frac{A_i}{A_{i+1}} \quad (32)$$

其中 A_i, A_{i+1} 表示相邻两振幅.

由此可得末端负载质量与收敛速率的关系图. 观察图6,可发现末端误差收敛速率与质量之间的曲线呈现二次函数关系 ($v = am^2 + bm + c$), 因此本小节采用 Matlab 的 Cftool 工具对该曲线进

行函数拟合,其拟合结果如下:

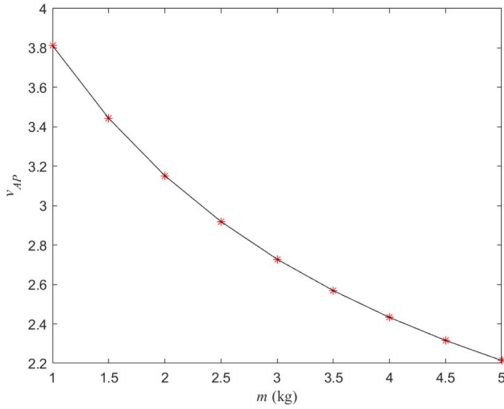


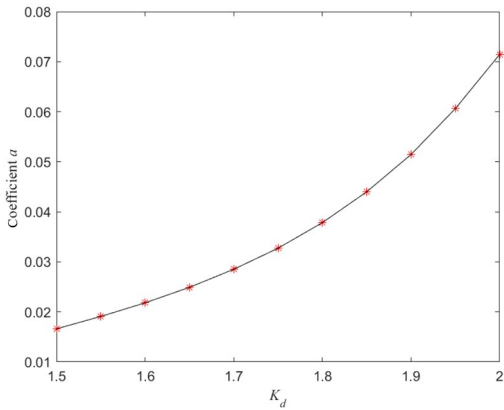
图 6 末端误差收敛速率和负载质量关系图 ($K_d = 2, K_p = 15$)
Fig. 6 Terminal error convergence rate and load mass relationship diagram ($K_d = 2, K_p = 15$)

$$v_{AP} = 0.07145m^2 - 0.8141m + 4.523 \quad (33)$$

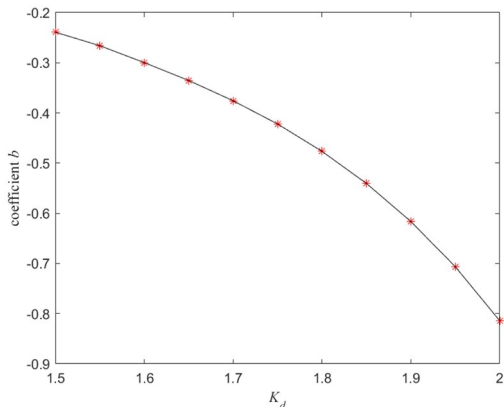
其中 m 表示末端负载质量, v_{AP} 表示位置准确度误差收敛速率。

4.2 K_d 参数和负载质量对机械臂末端移动性能的影响

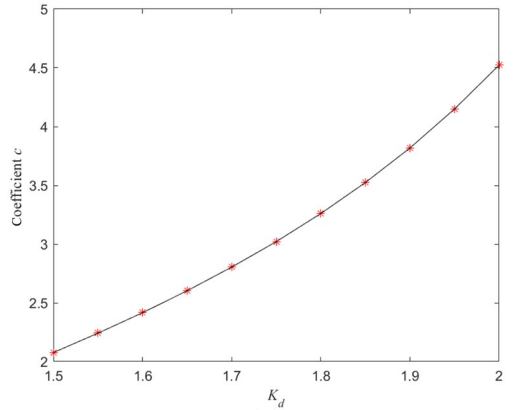
本节将考虑 K_d 参数、负载质量和末端收敛速度三者之间的关系. 首先将 K_d 由 2 每次下降 0.5 到 1.5, 共 11 个不同控制参数取值 (其中 $K_p \equiv 15$),



(a) 参数 a
(a) Coefficient a



(b) 参数 b
(b) Coefficient b



(c) 参数 c
(c) Coefficient c

图 7 末端收敛速率系数 a, b, c 与 K_d 的关系图
Fig. 7 The relationship between terminal convergence rate coefficients a, b, c and K_d

最终得到误差收敛速率与末端质量的多项式函数各系数 (a, b, c) 与 K_d 之间的关系曲线图。

观察图 7, 可发现末端误差收敛速率各系数与 K_d 之间的曲线近似二次函数曲线 (coefficient = $xK_d^2 + yK_d + z$), 其中, 系数 a 与 K_d 成二次增加, 系数 b 与 K_d 成二次减小, c 与 K_d 成二次增加. 因此本文采用 Matlab 的 Cftool 工具对该曲线进行函数拟合, 其拟合结果如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.1809K_d^2 - 0.5284K_d + 0.4033 \\ b &= -1.651K_d^2 + 4.665K_d - 3.529 \\ c &= 4.462K_d^2 - 10.82K_d + 8.293 \end{aligned} \quad (34)$$

从以上数据最终可以得到收敛速率 v_{AP} 与末端质量 m 与 K_d 之间的关系式为:

$$\begin{aligned} v_{AP} &= (0.1809K_d^2 - 0.5284K_d + 0.4033)m^2 + \\ &(-1.651K_d^2 + 4.665K_d - 3.529)m + \\ &(4.462K_d^2 - 10.82K_d + 8.293) \end{aligned} \quad (35)$$

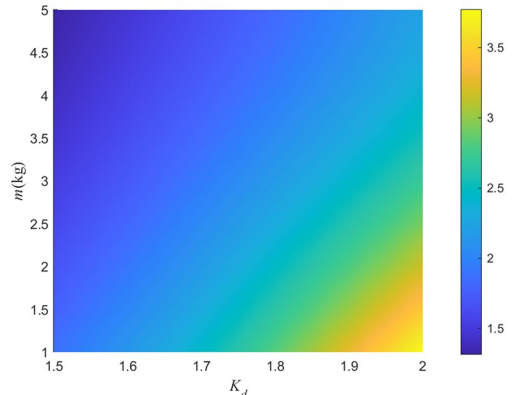
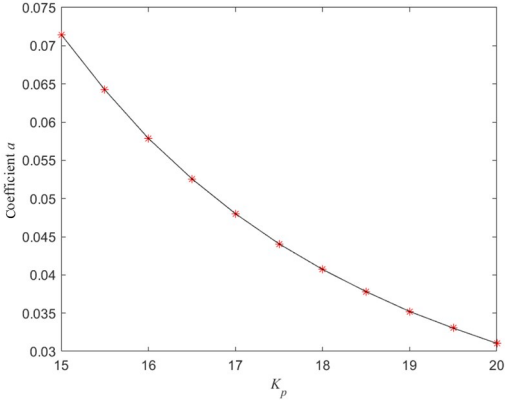


图 8 末端收敛速度、负载质量、 K_d 三者关系图
Fig. 8 The relationship diagram of terminal convergence speed, load quality, and K_d

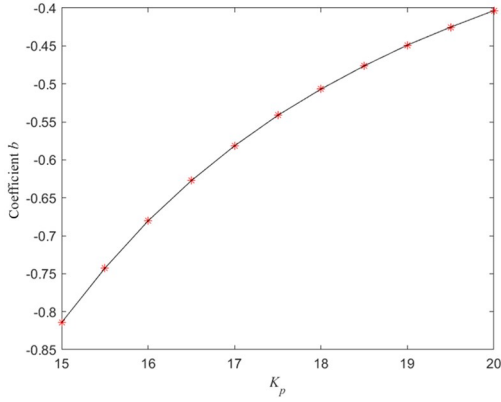
图 8 中, 颜色越深表示数值越小, 由此可得末

端收敛速度与质量成负相关,与 K_d 值成正相关。

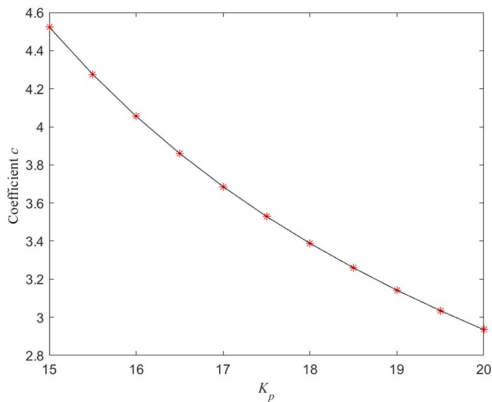
4.3 K_p 参数和负载质量对机械臂末端移动性能的影响



(a) 参数 a
(a) Coefficient a



(b) 参数 b
(b) Coefficient b



(c) 参数 c
(c) Coefficient c

图9 末端收敛速率系数 a 、 b 、 c 与 K_p 的关系图

Fig. 9 The relationship between terminal convergence rate coefficients a , b , c and K_p

本小节将考虑 K_p 参数、负载质量和末端收敛速度三者之间的关系.首先,将 K_p 由15每次增加0.5到20,共11个不同控制参数取值(其中 $K_d \equiv 2$),进行动力学仿真,最终得到误差收敛速率与末端质量的多项式函数各系数(a , b , c)与 K_p 之间的

关系曲线图。

观察图9,可得末端误差收敛速率各系数与 K_p 之间的曲线近似二次函数曲线(coefficient = $xK_p^2 + yK_p + z$),其中,系数 a 与 K_p 成二次减小,系数 b 与 K_p 成二次增加, c 与 K_p 成二次减小.因此本文采用Matlab的Cftool工具对该曲线进行函数拟合,其拟合结果如下:

$$\begin{aligned} a &= 0.001148K_p^2 - 0.04802K_p + 0.5329 \\ b &= -0.01076K_p^2 + 0.4567K_p - 5.236 \\ c &= 0.03197K_p^2 - 1.43K_p + 18.77 \end{aligned} \quad (36)$$

从以上数据最终可以得到收敛速率 v_{AP} 与末端质量 m 与 K_p 之间的关系式为:

$$\begin{aligned} v_{AP} &= (0.001148K_p^2 - 0.04802K_p + 0.5329)m^2 + \\ &(-0.01076K_p^2 + 0.4567K_p - 5.236)m + \\ &(0.03197K_p^2 - 1.43K_p + 18.77) \end{aligned} \quad (37)$$

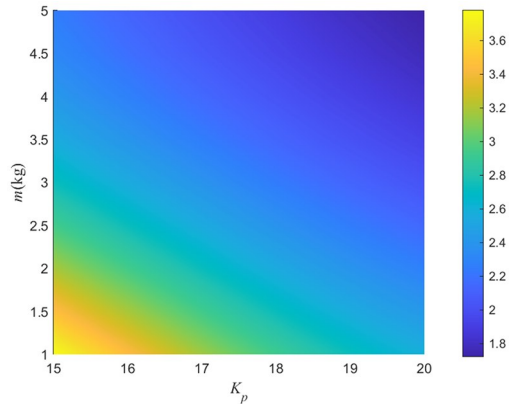


图10 末端收敛速度、负载质量、 K_p 三者关系图

Fig. 10 The relationship diagram of terminal convergence speed, load quality, and K_p

图10中,颜色越深表示数值越小,由此可得末端收敛速度与质量成负相关,与 K_p 值成负相关。

5 结论

本文针对大负载引起的大惯性力不利于机械臂的提速增稳的问题,以Franka七轴串联机械臂为对象进行了运动学分析和动力学分析,随后对动力学控制系统的稳定性展开研究,采用李雅普诺夫直接法对定位控制的控制律进行设计并验证,结果表明,所设计的控制律能在满足系统需求的情况下实现全局渐近稳定.最后,基于定位控制对机械臂负载质量如何影响末端移动性能展开研究,其结果表明,负载质量增加,末端误差收敛速率减小(呈现二次函数关系);当 K_d 值增加时,末端位置准确度收敛速率增大;当 K_p 值增加时,末端位置准确度

收敛速率减小。

参考文献

- [1] 张宇. 国外工业机器人发展历史回顾[J]. 机器人产业, 2015(3): 68—82.
- [2] LOPES A, ALMEIDA F. A force-impedance controlled industrial robot using an active robotic auxiliary device [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2008, 24(3): 299—309.
- [3] HUANG Y J, CHIBA R, ARAI T, et al. Robust multi-robot coordination in pick-and-place tasks based on part-dispatching rules [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2015, 64: 70—83.
- [4] BOŽEK P, TRNKA K. Path planning with motion optimization for car body-in-white industrial robot applications [J]. *Advanced Materials Research*, 2012, 605/606/607: 1595—1599.
- [5] 尹守乾. 高速重载堆垛机器人设计及力学特性研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2022.
- YIN S Q. Design and mechanical characteristics of high speed and heavy load stacking robot [D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2022. (in Chinese)
- [6] 张浩. 基于圆柱坐标的香蕉采摘机器人负载机械臂系统设计[D]. 广州: 广东工业大学, 2021.
- ZHANG H. Design of banana harvesting robot heavy-load arm system based on cylindrical coordinates [D]. Guangzhou: Guangdong University of Technology, 2021. (in Chinese)
- [7] 刘本德, 曲兴华, 张姝颖, 等. 负载对工业机器人末端定位精度影响的分析[J]. *机械设计与研究*, 2015, 31(4): 40—43.
- LIU B D, QU X H, ZHANG S Y, et al. Payload based analysis of positioning accuracy of industrial robot [J]. *Machine Design & Research*, 2015, 31(4): 40—43. (in Chinese)
- [8] 罗天洪, 张剑, 陈才, 等. 重载机械臂对未知载荷参数的补偿控制[J]. *机械设计与制造*, 2016(5): 171—174.
- LUO T H, ZHANG J, CHEN C, et al. Sliding neural networks control for overloaded manipulator with payload unknown parameters [J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2016(5): 171—174. (in Chinese)
- [9] 贺恒. 机械臂分类及选型逻辑研究[J]. *一重技术*, 2022(4): 21—24.
- HE H. Research on classification and type selection of manipulator [J]. *CFHI Technology*, 2022(4): 21—24. (in Chinese)
- [10] 朱鑫翔. 四轴机器人作业能力评价与研究[D]. 芜湖: 安徽工程大学, 2017.
- ZHU X X. Evaluation and research on the operational capability of series four-axis robot [D]. Wuhu: Anhui Polytechnic University, 2017. (in Chinese)
- [11] 陈家睿. 七轴机械臂的轨迹规划[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2022.
- CHEN J R. Trajectory optimization for 7-DOF kinematically redundant arms [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2022. (in Chinese)
- [12] SARAF M, AGARWAL A, CHAUDHARY A, et al. Kinematic modelling and motion mapping of robotic arms [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1969(1): 012002.
- [13] ZHAO J Z, WAN H Q, LI W, et al. Kinematic modelling analysis and simulation of 6-DOF manipulator [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2023, 2501(1): 012017.
- [14] GE D W. Kinematics modeling of redundant manipulator based on screw theory and Newton-Raphson method [J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2022, 2246(1): 012068.
- [15] MEHRJOOEE O, FATHOLLAHI DEHKORDI S, HABIBNEJAD KORAYEM M. Dynamic modeling and extended bifurcation analysis of flexible-link manipulator [J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2020, 48(1): 87—110.
- [16] 高涵. 面向卫星装配的六自由度机械臂运动学分析及仿真[J]. *机电工程技术*, 2020, 49(8): 30—32.
- GAO H. Kinematics analysis and simulation for six degree of freedom satellite assembly manipulator [J]. *Mechanical & Electrical Engineering Technology*, 2020, 49(8): 30—32. (in Chinese)
- [17] 余鑫, 武海雷, 丁萌, 等. 基于改进粒子群的绳驱连续型机械臂逆运动学分析[J]. *飞控与探测*, 2023, 6(1): 41—47.
- YU X, WU H L, DING M, et al. Kinematics analysis of cable-driven continuum manipulator based on improved particle swarm optimization [J]. *Flight Control & Detection*, 2023, 6(1): 41—47. (in Chinese)
- [18] SUBEDI D, TYAPIN I, HOVLAND G. Dynamic modeling of planar multi-link flexible manipulators

- [J]. *Robotics*, 2021, 10(2): 70.
- [19] QI F, CHEN B, GAO S Y, et al. Dynamic model and control for a cable-driven continuum manipulator used for minimally invasive surgery [J]. *The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery: MRCAS*, 2021, 17(3): e2234.
- [20] 谭帅. 六自由度串联机器人多目标轨迹优化与摩擦补偿控制方法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2022.
- TAN S. Research on multi-objective trajectory optimization and friction compensation control method of 6-DOF serial robot [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2022. (in Chinese)
- [21] 龙樟, 李显涛, 帅涛, 等. 工业机器人轨迹规划研究现状综述[J]. *机械科学与技术*, 2021, 40(6): 853-862.
- LONG Z, LI X T, SHUAI T, et al. Review of research state of trajectory planning for industrial robots [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2021, 40(6): 853-862. (in Chinese)
- [22] 周伟. 基于粒子群算法的机械臂轨迹规划研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2022.
- ZHOU W. Research on trajectory planning of robotic arm based on particle swarm optimization [D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2022. (in Chinese)
- [23] 石英男, 胥光申, 盛晓超. 基于七次多项式插值的RRT避障规划[J]. *轻工机械*, 2022, 40(6): 1-6.
- SHI Y N, XU G S, SHENG X C. RRT obstacle avoidance planning based on seventh degree polynomial interpolation [J]. *Light Industry Machinery*, 2022, 40(6): 1-6. (in Chinese)
- [24] 李元元. 直角坐标机器人路径规划与精密运动控制[D]. 北京: 华北电力大学, 2011.
- LI Y Y. Path planning and precision motion control on Cartesian robot [D]. Beijing: North China Electric Power University, 2011. (in Chinese)
- [25] 程晶晶. 自驱动关节臂坐标测量机测量轨迹规划方法研究[D]. 淮南: 安徽理工大学, 2022.
- CHENG J J. Research on measurement trajectory planning method of self-driven AACMM [D]. Huainan: Anhui University of Science & Technology, 2022. (in Chinese)
- [26] 毛晨涛, 张翔, 祖洪飞, 等. 工业机器人重载下关节变形补偿[J]. *振动工程学报*, 2021, 34(4): 697-703.
- MAO C T, ZHANG X, ZU H F, et al. A joint deformation compensation method for heavy-load industrial robots [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, 34(4): 697-703. (in Chinese)
- [27] 王旭, 李东升, 王明明. 工业机器人大负载刚度辨识及误差补偿研究[J]. *机械传动*, 2017, 41(5): 30-33.
- WANG X, LI D S, WANG M M. Research of the stiffness identification and error compensation of industrial robot under heavy load [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2017, 41(5): 30-33. (in Chinese)
- [28] 李佳兵, 王茜, 高紫韵, 等. 基于PSO优化算法的重载机械臂载荷参数自动控制方法[J]. *中阿科技论坛*, 2020(2): 52-54.
- LI J B, WANG Q, GAO Z Y, et al. Automatic load parameter control method of heavy-duty manipulator based on PSO optimization algorithm [J]. *China-Arab States Science and Technology Forum*, 2020(2): 52-54. (in Chinese)
- [29] 马驰骋, 胡帅钊, 高坤明, 等. 含变质量负载的双连杆机械臂振动控制[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(2): 61-68.
- MA C C, HU S Z, GAO K M, et al. A study on vibration control of double-link manipulators with variable mass loads [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(2): 61-68. (in Chinese)
- [30] LIU Y, DU Z, ZHANG S N. Minimum-time trajectory planning for residual vibration suppression of flexible manipulator carrying a payload [C]//2020 6th International Conference on Electrical Engineering, Control And Robotics (EECR 2020). Bristol, UK: IOP Publishing LTD, 2020, 853(1): 012044.
- [31] XIAO D, GHOSH B K, XI N, et al. Sensor-based hybrid position/force control of a robot manipulator in an uncalibrated environment [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2000, 8(4): 635-645.
- [32] 陈毅. 堆垛机器人末端轨迹精确跟踪控制研究[D]. 徐州: 中国矿业大学, 2022.
- CHEN Y. Research on terminal trajectory accurate tracking control of stacking robot [D]. Xuzhou: China University of Mining and Technology, 2022. (in Chinese)
- [33] VOGT W G. Relative stability via the direct method of Lyapunov [J]. *Journal of Basic Engineering*, 1964, 86(1): 87-90.