

# 仿猫类落地姿态的准零刚度隔振器<sup>\*</sup>

张伟<sup>1,2</sup> 石沐辰<sup>1</sup> 柳超然<sup>1†</sup>

(1. 北京工业大学 机械结构非线性振动与强度北京市重点实验室, 北京 100124)

(2. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004)

**摘要** 对设备加装隔振装置是保证其高效工作的重要方法之一. 本文从仿生学的角度, 根据猫科动物落地时优秀的抗冲击能力, 通过观察其落地动作姿态, 利用非线性补偿原理, 以空气弹簧作为正刚度结构, 设计出一种具有非对称刚度特性的高静低动刚度隔振器. 以其为研究对象, 建立了动力学模型, 利用特定的方法对非对称刚度系统进行分析求解, 并与数值结果和有限元仿真结果进行对比. 结果表明, 在较低阻尼以及较高激励幅值下, 还会出现倍周期响应甚至混沌响应. 同时, 通过将本文设计的隔振结构和单一空气弹簧的隔振性能对比, 可以得到隔振效果明显优于单一空气弹簧的结论, 从而验证了所设计隔振结构的有效性和可行性.

**关键词** 准零刚度, 非对称刚度, 仿生, 分岔, 混沌, 空气弹簧

中图分类号: O322

文献标志码: A

## Quasi-Zero-Stiffness Vibration Isolator Inspired by the Cat Landing Attitude<sup>\*</sup>

Zhang Wei<sup>1,2</sup> Shi Muchen<sup>1</sup> Liu Chaoran<sup>1†</sup>

(1. Beijing University of Technology, Beijing Key Laboratory on Nonlinear Vibrations and Strength of Mechanical Structures, Beijing 100124, China)

(2. Guangxi University, School of Civil Engineering and Architecture, Nanning 530004, China)

**Abstract** Installing vibration isolation devices on equipment is one of the important methods to ensure its stable use. From the perspective of bionics, according to the excellent impact resistance of cats when landing, this paper designs a high static and low dynamic stiffness isolator with asymmetric stiffness characteristics by observing their landing action posture and using the principle of nonlinear compensation and using the air spring as the positive stiffness structure. Taking it as the research object, a dynamic model is established, and a specific method is used to analyze and solve the asymmetric stiffness system, and compare it with the numerical results and finite element simulation results. The results show that at lower damping and higher excitation amplitudes, there is also a period response or even a chaotic response. At the same time, by comparing the vibration isolation structure and the vibration isolation performance of a single air spring designed in this paper, the conclusion that the vibration isolation effect is significantly better than that of a single air spring can be obtained, which verifies the effectiveness and feasibility of the designed vibration isolation structure.

**Key words** quasi-zero stiffness, asymmetric stiffness, bionics, bifurcation, chaos, air springs

2023-08-20 收到第 1 稿, 2023-09-22 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(12302002, 12332001, 11832002), 北京市博士后基金(2023-zz-80), National Natural Science Foundation of China (12302002, 12332001, 11832002), Beijing Postdoctoral Research Foundation (2023-zz-80).

† 通信作者 E-mail: chaoran@bjut.edu.cn

## 引言

航天、国防、高端制造等领域中高精密设备的运行需要“超静”工作环境,而振动已逐渐成为影响高精密设备运行精度和工作质量的重要因素。因此,研究隔振理论与技术,降低振动的不利影响,对提高我国航天国防实力和高端制造业水平具有重要意义。对于线性隔振器,需降低其刚度才能有效拓宽隔振频带,但低刚度会降低承载能力。为了解决这种矛盾,以准零刚度隔振器为代表的非线性隔振器成为了近些年非常热门的研究对象。目前相关理论已经趋于成熟,但仍有若干学者对隔振器功能做出改善和补充。如谢英江<sup>[1]</sup>利用电磁弹簧和空气弹簧刚度易于改变的特性,用两种弹簧并联得到准零刚度隔振器,解决了多数隔振器只能应用于单一隔振对象的问题。Zhang等<sup>[2]</sup>利用磁力弹簧,通过电磁感应原理进行能量俘获,并将电磁与压电进行了耦合,为隔振器增加了俘能效果。

除了人工制造的隔振器之外,自然界中有很多生物天生就具有隔离动力冲击的能力<sup>[3,4]</sup>,以猫科动物为例,学者们发现猫科动物即便从高处坠落,也不会受到很大的损伤<sup>[5,6]</sup>。学者们致力于探究其中的原理,发现除了猫可以在空中快速调整姿态之外,其与地面接触过程中身体作用机理也尤为重要。Alexander等<sup>[7]</sup>对猫脚掌底部的肉垫的力学特性进行了研究,并利用简单的两自由度弹簧质量阻尼模型研究这一问题,发现肉垫具有很明显的非线性特性。张晓鹏等<sup>[8]</sup>在此基础上进一步研究,发现猫脚掌肉垫具有的是刚度硬化特性,并且具有较大的阻尼系数。Zhang等<sup>[9]</sup>利用各种设备捕捉到了猫科动物跳落时的运动姿态,发现在落地过程中,猫科动物可以分四个阶段进行缓冲,也就是所谓多级缓冲。

为了应用这些原理,Yan等<sup>[10]</sup>用磁铁来模拟猫的底肉垫,充分体现了其刚度硬化特性;同时,用连杆和弹簧分别模拟指骨和骨间肌肉,从而完整地模仿猫爪设计了一种隔振器,并取得良好隔振效果。Yu等<sup>[11]</sup>受多级缓冲机理启发,设计了一款新型航天员多级缓冲座椅,通过理论分析和数值模拟计算发现,与传统座椅相比,多级缓冲座椅能显著降低着陆时航天员所受的过载加速度。

除了参考猫科动物之外,Fang等<sup>[12]</sup>通过多级

剪式结构模仿鸟类的肢体设计出一款隔振器,并将其应用于航空航天领域。Ling等<sup>[13]</sup>利用一个菱形剪式结构,模拟了蟑螂受压时的受力状态,充分还原了蟑螂强大的受压能力。刘川<sup>[14]</sup>同样利用一个菱形剪式结构,来模拟有蹄生物的腿部弯折过程。可以看出,剪式结构在仿生隔振领域应用范围极广。但是,由于其固有的几何特性,剪式结构在平衡点位置一般具有不对称刚度,因此传统的计算方法并不一定能完全吻合实际结果。对于非对称刚度,Abolfathi<sup>[15]</sup>通过研究引入二次项的Duffing方程,也即Helmholtz-Duffing方程,初步得到了比较精确的位移解答。对于具有非对称刚度特性的隔振器,在工作点附近采用高于三阶的泰勒展开进行近似,能得到更准确的结果。Shaw等<sup>[16]</sup>虽然建立了非线性隔振器的五阶泰勒展开式模型,但研究对象仍然停留在对称隔振器。Yan等<sup>[17]</sup>利用非线性补偿原理,将菱形剪式结构作为负刚度和磁铁并联。磁铁的刚度硬化特性抵消了剪式结构的刚度软化特性,使得隔振器的刚度特性接近于对称。总的来说,对于非对称刚度的研究,目前的讨论还并不充分,有很高的研究价值。

为此,本文用空气弹簧和剪式结构并联,构建了一种准零刚度隔振器。剪式结构有很强的非对称特性,为了得到更精确的结果,本文将隔振器在工作点附近做了五阶展开,以谐波平衡法求出与数值解高度吻合的解析解,并导出幅频特性曲线。通过分岔图、庞加莱截面图等分析系统的动力学行为。通过有限元分析方法验证理论分析的正确性。研究结果表明,本文设计的隔振器具有很高的可行性。

## 1 隔振系统建模

### 1.1 仿生模型构建

Marey<sup>[18]</sup>利用一种高频次摄影工具,拍摄了猫在非自发情况下的坠落姿态图,证明了猫在无意识情况下发生坠落时,身体是四肢同时着陆。这种坠落姿势下,猫的身体受力平均,使得猫的四肢受伤概率几乎相等<sup>[5]</sup>。因此,可以将猫的四肢假设为相同的模型。结合猫双腿着陆时的运动姿态,仿造模型如图1所示。

这样的结构还需要生物体的主动控制功能才能生效,考虑到隔振器并不具有生物体的主动控制

功能,选择加入虚线连接,通过四根相同长度的连杆交叉连接,令其成为剪式结构.为了让结构能够顺利地发生变形,同时加入滑轨,用空气弹簧和剪式结构共同组成非线性弹簧,最终隔振器结构如图 2 所示.

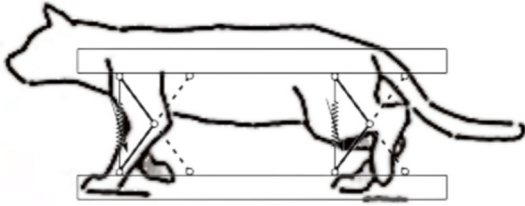


图 1 猫科动物仿生结构模型

Fig. 1 A biomimetic structural model of a feline

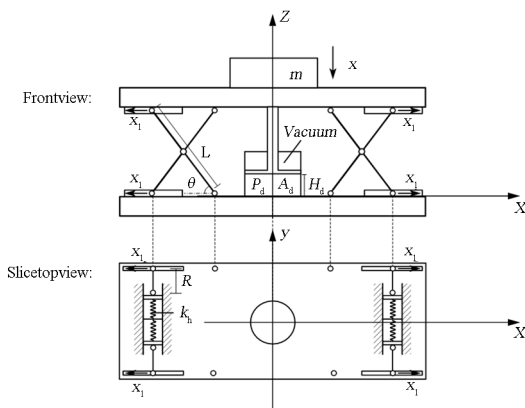


图 2 一侧固定的剪式结构

Fig. 2 Scissor structure fixed on one side

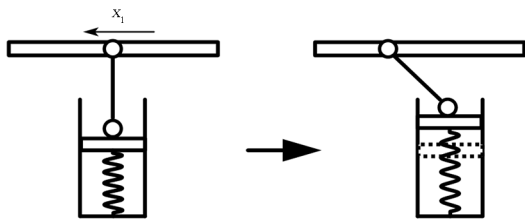


图 3 负刚度结构运动机理

Fig. 3 Kinematic mechanism of negative stiffness structure

质量块  $m$  向下运动时,会带动剪式结构的外支向外移动,通过对弹簧进行预压缩,就可以得到负刚度特性,负刚度结构运动机理如图 3 所示.

### 1.2 隔振器静力学分析

隔振器的各参数表示如图 2 所示,图中个别难以表示的参数说明如下:选用四根完全相同的连杆和四组完全相同的弹簧组成负刚度结构.弹簧预压缩长度为  $H_h$ ,假设各接触面之间密切接触并且光滑.

设质量  $m$  向下运动距离  $x$  后  $\theta$  的大小变为  $\tilde{\theta}$ ,从而可以得到:

$$L \sin \theta - L \sin \tilde{\theta} = x \tag{1}$$

假设弹簧在这个过程中的长度改变量为  $\Delta H$ .通过观察图 3,利用勾股定理,可以得到:

$$\Delta H = R - \sqrt{R^2 - (L \cos \tilde{\theta} - L \cos \theta)^2} \tag{2}$$

由于几何限制,弹簧的长度改变量至多达到连杆长度  $R$ ,也即  $\Delta H \rightarrow R$  时,式(2)发生间断无法取值,在数学上具有奇异性.

通过联立式(1)、式(2),可以将  $\cos \tilde{\theta}$  用  $x$  表示.设质量块向下运动  $x$  时,剪式结构的连杆对上部支座产生向下的力  $F_h$ ,根据相互作用力原理,连杆自身受到与  $F_h$  等大反向的力.以连杆连接成的整体作为研究对象,根据虚功原理,设质量块进一步发生一虚位移  $\delta x$ ,以弹簧做功为正功,有:

$$k_h (H_h - \Delta H) \delta(\Delta H) - F_h \delta x = 0 \tag{3}$$

联立式(1)~式(3),并根据三角函数运算法则,可以解得  $F_h$  为式(4)表达:

$$F_h = \frac{4k_h \left\{ H_h - R + \sqrt{R^2 - \left[ -L \cos \theta + L \sqrt{1 - \left( \sin \theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right]^2} \right\}}{\sqrt{R^2 - \left[ -L \cos \theta + L \sqrt{1 - \left( \sin \theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right]^2} \sqrt{1 - \left( \sin \theta - \frac{x}{L} \right)^2}} \cdot \left[ -L \cos \theta + L \sqrt{1 - \left( \sin \theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right] \left( \sin \theta - \frac{x}{L} \right) \tag{4}$$

空气可以假设为理想气体,那么根据理想气体状态方程,正刚度机构(空气弹簧)的反力表达式如式(5):

$$F_d = P_d A_d \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{H_d}} \right)^{1.4} \tag{5}$$

产生的总反力为  $F_d$  与  $F_h$  之和.注意到虚功原理运算的定义中设  $F_h$  方向向下,与  $F_d$  方向相反,实际的合力应为  $F_d - F_h$ ,即:

$$F = F_d - F_h = P_d A_d \left( \frac{1}{1 - \frac{x}{H_d}} \right)^{1.4} - \frac{4k_h \left\{ H_h - R + \sqrt{R^2 - \left[ -L \cos\theta + L \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right]^2} \right\}}{\sqrt{R^2 - \left[ -L \cos\theta + L \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right]^2} \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{x}{L} \right)^2}} \cdot \left[ -L \cos\theta + L \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{x}{L} \right)^2} \right] \left( \sin\theta - \frac{x}{L} \right) \quad (6)$$

对式(6)进行无量纲化处理,令:

$$\dot{P} = \frac{P_d A_d}{k_h H_h}, \dot{x} = \frac{x}{H_h}, \eta = \frac{H_h}{R}, \beta = \frac{L}{R}, \epsilon = \frac{L}{H_h}, \mu = \frac{H_h}{H_d}$$

得到无量纲化后的合力表达式:

$$\dot{F} = \dot{P} \left( \frac{1}{-\mu \dot{x} + 1} \right)^{1.4} - \frac{4 \left\{ \eta - 1 + \sqrt{1 - \left[ -\beta \cos\theta + \beta \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}}{\epsilon} \right)^2} \right]^2} \right\}}{\sqrt{1 - \left[ -\beta \cos\theta + \beta \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}}{\epsilon} \right)^2} \right]^2} \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}}{\epsilon} \right)^2}} \cdot \left[ -\epsilon \cos\theta + \epsilon \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}}{\epsilon} \right)^2} \right] \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}}{\epsilon} \right) \quad (7)$$

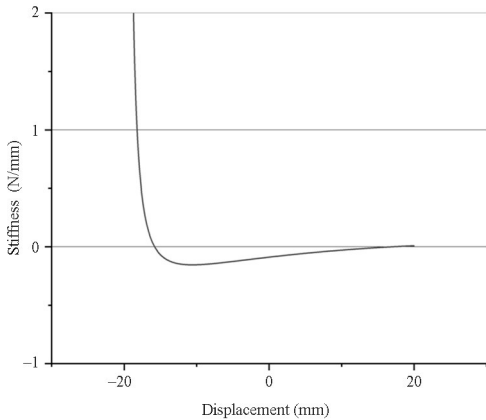


图4 负刚度结构刚度曲线

Fig. 4 Negative stiffness structural stiffness curve

为了使得在工作点位置隔振器具有较低的静

刚度,应该令合力在工作点附近对位移具有较低的一阶导数.

当负刚度机构参数为  $H_h = 10\text{mm}$ ,  $k_h = 0.1\text{N/mm}$ ,  $L = 100\text{mm}$ ,  $R = 15\text{mm}$ ,  $\cos\theta = 0.866$  时的刚度曲线如图4所示.

可以观察到,刚度曲线在一定范围内存在负值,同时也有较强的非对称性.其中,刚度曲线驻点左侧的斜率明显高于右侧.将该结构与刚度硬化的正刚度结构并联,就可以一定程度上抵消这种非对称性.同时,为了避免出现负刚度,最好的方法是令隔振器的总刚度在最小值处等于零.通过在式(7)中加入重力项  $G$ ,  $\dot{x}_e$  可由式(8)给出:

$$\dot{F} = \dot{G} = \dot{P} \left( \frac{1}{-\mu \dot{x}_e + 1} \right)^{1.4} - \frac{4 \left\{ \eta - 1 + \sqrt{1 - \left[ -\beta \cos\theta + \beta \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}_e}{\epsilon} \right)^2} \right]^2} \right\}}{\sqrt{1 - \left[ -\beta \cos\theta + \beta \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}_e}{\epsilon} \right)^2} \right]^2} \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}_e}{\epsilon} \right)^2}} \cdot \left[ -\epsilon \cos\theta + \epsilon \sqrt{1 - \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}_e}{\epsilon} \right)^2} \right] \left( \sin\theta - \frac{\dot{x}_e}{\epsilon} \right) \quad (8)$$

其中,  $\dot{G} = G/(k_h H_h)$ .

按照本文的位移量化规则,是以负刚度机构产生的反力为零时,即处于图3中左图所示的状态时为位移零点.在具有对称负刚度的情形下,一般将该点设为静平衡位置<sup>[19]</sup>,即  $\dot{x} = 0$  时.而由于本文设计结构具有特殊的几何特性,往往该点并不能满足准零刚度的设计要求.为了得到准零刚度参数条

件,以及适配的隔振质量,需要令静平衡位置的刚度及其一阶导数等于零,二阶导数大于零.即:

$$\begin{cases} F'(x_e) = 0 \\ F''(x_e) = 0 \\ F'''(x_e) > 0 \end{cases} \quad (9)$$

令负刚度结构参数取值与图4中所取一致,并将工作位置取在  $x = -12.5\text{mm}$ ,根据式(9)可

以得到:一组气缸参数:  $H_d = 18.16\text{mm}$ ,  $P_d = 0.033\text{MPa}$ ,  $A_d = 200.96\text{mm}^2$ . 虽然隔振器理论上可以达到准零刚度,但由于参数选取的舍入误差影响,实际的刚度取值可能偏离理论值,进行可能产生负刚度,影响稳定性. 因此一般令工作点的刚度略大于零,这也符合实际工程中的安全性要求<sup>[19]</sup>.

因此,为了使正刚度增大,进一步取:  $H_d = 25\text{mm}$ ,  $P_d = 0.04\text{MPa}$  其他参数不变. 得到的总刚度曲线如图5所示.

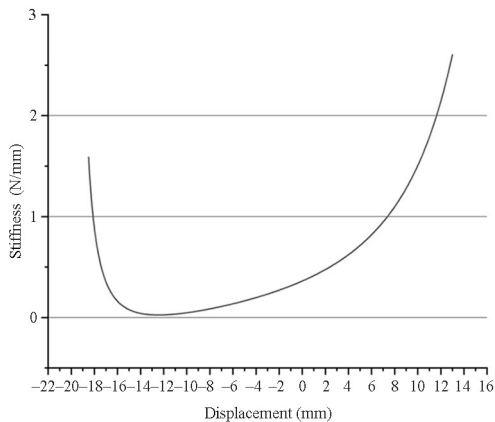


图5 总刚度结构刚度曲线

Fig. 5 Total stiffness structural stiffness curve

分析刚度曲线可以得到,刚度的最小值接近于零,但刚度始终大于零. 这样既达到了较好的隔振效果,又有较高的安全性. 经过计算,刚度最小值位置位于  $x = -12.45256$  处,工作点位置应该在该点处选取. 将  $\hat{x}_e = -12.45256$  代入式(8)中,可以得到适配的隔振质量为  $0.6184\text{kg}$ .

将式(7)在静平衡位置  $\hat{x} = \hat{x}_e$  进行泰勒展开处理. 通过分析,展开到三阶时,会使得力的函数关于静平衡点成为奇函数,从而失去非对称性;若展开到四阶,会使得力一位移曲线开口朝下,与原式有较大差别. 因此,为了精确性考虑,将式(7)进行五阶泰勒展开. 同时,令  $\hat{y} = \hat{x} - \hat{x}_e$ , 这样使得工作点位置成为新的零点,并略去重力项,得到式(10):

$$\hat{F}_{\text{taylor}} = s_1 \hat{y} - s_2 \hat{y}^2 + s_3 \hat{y}^3 - s_4 \hat{y}^4 + s_5 \hat{y}^5 \quad (10)$$

其中,  $s_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i \hat{F}}{d\hat{x}^i} \right|_{\hat{x}=\hat{x}_e}$ ,  $\hat{x}_e$  满足式(8). 按照本文的设计标准,一阶项的系数应该接近于0,二阶项的系数应该等于0,但由于误差的影响,在实际取值中可能有较小的偏离.

### 1.3 隔振器动力学分析

假设隔振器具有垂直方向的线性阻尼,并且受

到简谐力的激励,可以得到动力学表达式:

$$mH_h \ddot{\hat{y}} + cH_h \dot{\hat{y}} + \hat{F}_{\text{taylor}} k_h H_h = F_1 \cos \omega t \quad (11)$$

令:

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_n}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \tau = \omega_n t,$$

$$\hat{F}_1 = \frac{F_1}{k_h H_h}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_h}{m}}$$

无量纲化后的动力学表达式为:

$$\ddot{\hat{y}} + 2\xi \dot{\hat{y}} + \hat{F}_{\text{taylor}} = \hat{F}_1 \cos \Omega \tau \quad (12)$$

一般情况下,只考虑这类非线性系统的周期1运动. 但实际情况中,这类非线性系统还存在诸多复杂的特性,特别以混沌与分岔最具代表性. 本文主要考察系统关于阻尼变化的复杂力学行为.

取  $\hat{F}_1 = 15$ ,  $\Omega = 1$ , 得到关于阻尼比的分岔图如图6.

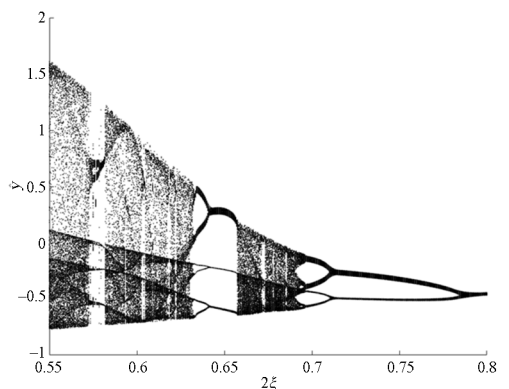
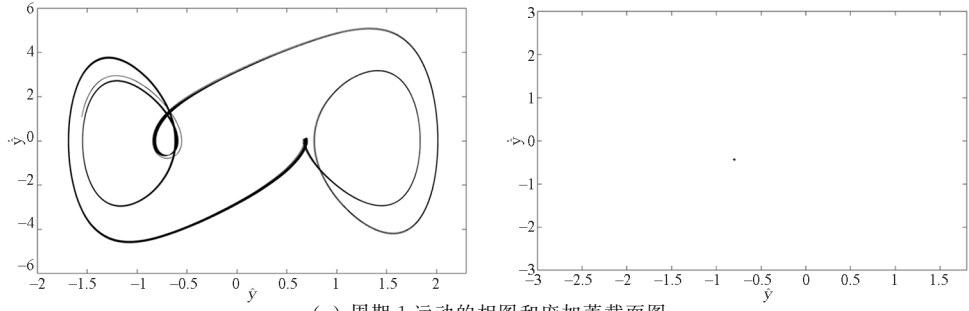


图6 关于  $2\xi$  的分岔图

Fig. 6 Bifurcation plot about  $2\xi$

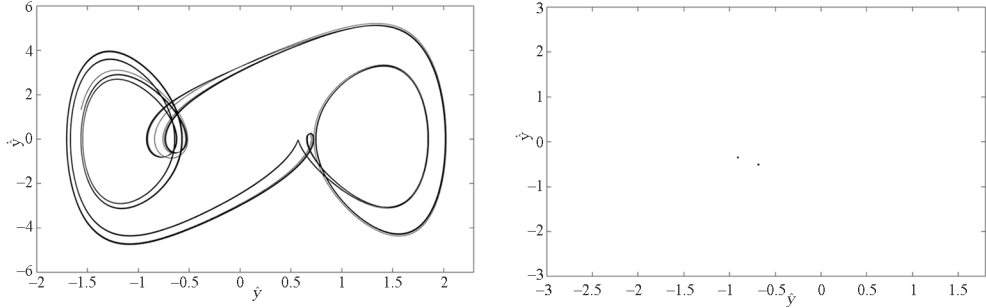
分析可得,在该区间内,  $2\xi = 0.706, 0.76, 0.82$  时,分别发生的是周期4运动,周期2运动,周期1运动. 而在较小的阻尼区间内,则发生混沌运动. 进一步考察这种现象,分别令  $2\xi = 0.82, 0.76, 0.706$ , 得到的分岔图和庞加莱截面图如图7.

通过分析可以得到,当  $2\xi = 0.706$ , 相图分为四股,庞加莱截面有四簇结点;当  $2\xi = 0.76$ , 相图分为两股,庞加莱截面有两簇结点;当  $2\xi = 0.82$ , 相图只有一股,庞加莱截面有一簇结点;当阻尼比较小时,相图和庞加莱截面图体现出很强的混沌行为,并且随着阻尼的减小,这种现象还会不断加剧. 同时,这也验证了,当阻尼足够小时,非线性系统的响应会呈现很复杂的行为. 因此,令隔振器工作在合适的阻尼条件下,有助于抑制这种复杂力学行为的发生.



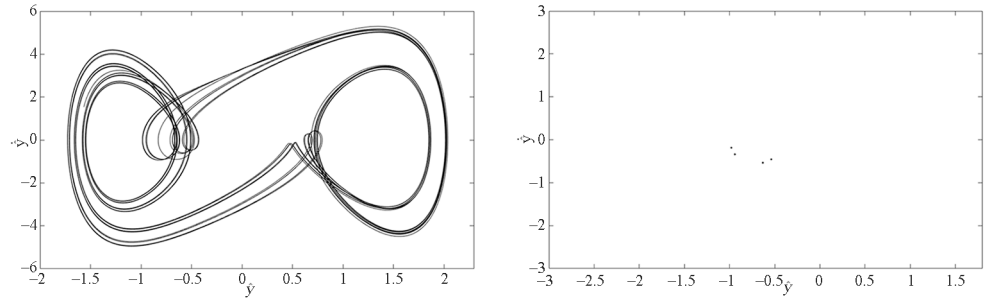
(a) 周期 1 运动的相图和庞加莱截面图

(a) Phase diagram and Poincaré cross-section of the movement of Cycle 1



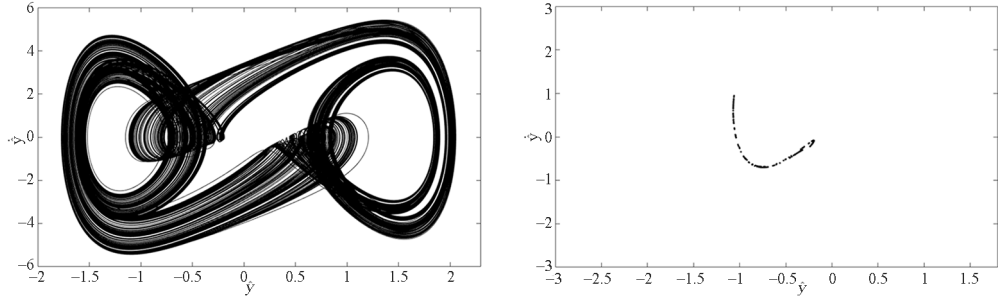
(b) 周期 2 运动的相图和庞加莱截面图

(b) Phase diagram and Poincaré cross-section of the movement of Cycle 2



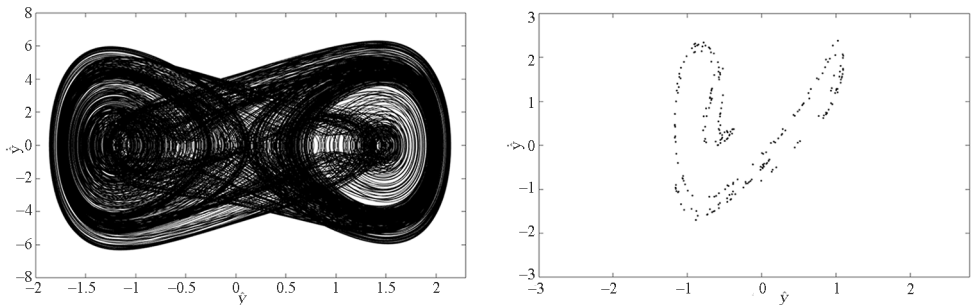
(c) 周期 4 运动的相图和庞加莱截面图

(c) Phase diagram and Poincaré cross-section of the movement of Cycle 4



(d) 混沌运动的相图和庞加莱截面图①

(d) Phase diagram and Poincaré cross-section of chaotic motion ①



(e) 混沌运动的相图和庞加莱截面图②

(e) Phase diagram and Poincaré cross-section of chaotic motion ②

图 7 取不同  $\xi$  时的相图和庞加莱截面图Fig. 7 Take the phase diagram and Poincaré cross-sectional diagram at different  $\xi$

## 2 动力学模型的解析求解和传递率

### 2.1 解析求解

五阶展开的方程对于力的传递率结果表达式相当复杂,工程实际当中,一般是对于基础位移进行隔离.许多学者也未对力的传递率进行深入研究<sup>[15,20]</sup>.本文优先对位移传递率进行分析.动力学方程变为:

$$\ddot{y} + 2\xi\dot{y} + \dot{F} = \dot{Z}\Omega^2 \cos\Omega\tau \quad (13)$$

其中,  $\dot{Z} = \frac{Z}{H_b}$ .

对于具有非对称刚度特性的系统,其响应一般包含零偏项<sup>[21]</sup>,即写作  $\dot{y} = a_0 + a \cos(\Omega\tau + \varphi)$  的形式.为了同时解得响应幅值和零偏量,在式(13)中,将阻尼项和  $\dot{F}$  展开为傅里叶级数,并代入式(13)中,令  $\dot{y} = a_0 + a \cos(\Omega\tau + \varphi)$ ,对比等式两边的常数项和一次谐波项,可以得到幅频表达式由两式构成:

$$\Omega^4(Z^2 - a^2) + \Omega^2[2(b_1a^2 + b_2a^4 + b_3a^6) - 4a^2\xi^2] - [b_1^2a^2 + 2b_1b_2a^4 + (b_2^2 + 2b_1b_3)a^6 + 2b_2b_3a^8 + b_3^2a^{10}] = 0 \quad (14)$$

$$s_1a_0 + s_2a_0^2 + s_3a_0^3 + s_4a_0^4 + s_5a_0^5 + \frac{1}{2}(s_2 + 3s_3a_0 + 6s_4a_0^2 + 10s_5a_0^3)a^2 + \frac{3}{8}(s_4 + 5s_5a_0)a^4 = 0 \quad (15)$$

其中

$$b_1 = 5a_0^4s_5 + 4a_0^3s_4 + 3a_0^2s_3 + 2a_0s_2 + s_1,$$

$$b_2 = \frac{3}{4}s_3 + 3s_4a_0 + \frac{15}{2}s_5a_0^2, \quad b_3 = \frac{5}{8}s_5.$$

通过联立式(14)和式(15),理论上就可以得到幅频特性曲线.但是在数学上五次方程并不存在一般的求根公式.根据参考文献[15],在振幅不大时,刚度几乎是关于静平衡点对称分布的,零偏量几乎可以忽略.因此,在保证小振幅的前提下,暂不考虑零偏量,但仍保持展开到五阶不变以保证精度.将  $\dot{y} = a \cos(\Omega\tau + \varphi)$  代入式(13)中,利用谐波平衡法,对比等式两端的谐波项系数,可以得到位移激励下的幅频表达式如式(16):

$$\left(-a\Omega^2 + s_1a + \frac{3}{4}s_3a^3 + \frac{9}{16}s_5a^5\right)^2 + 4\xi^2a^2\Omega^2 = Z^2\Omega^4 \quad (16)$$

将相对位移的幅频表达式和利用四阶龙格库塔法得出的数值解进行对比,如图8所示.

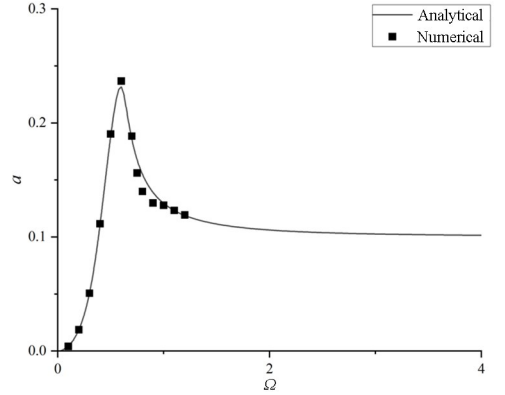


图8 相对位移数值解和解析解对比图

Fig. 8 Numerical and analytical solutions of relative displacement

可以看出,虽然忽略了零偏项,但所求出的解析结果和数值结果仍然有较高的拟合度,说明结果具有较高的可靠性.

位移传递率定义为被隔振质量的位移幅值和基础激励的位移幅值之比,由式(17)导出:

$$T_d = \frac{\sqrt{a^2 + 2a\dot{Z}\cos\varphi + \dot{Z}^2}}{\dot{Z}} \quad (17)$$

取  $\dot{Z} = 0.1, 2\xi = 0.25$ .在相同的质量和阻尼以及其他尺寸参数的条件下,将该传递率与单一空气弹簧的位移传递率对比.当空气弹簧在平衡位置小幅振动时,腔室体积可以视作刚度基本不变<sup>[22]</sup>.因此,单空气弹簧的传递率可以近似表达为线性系统的传递率.两传递率的对比图如图9.

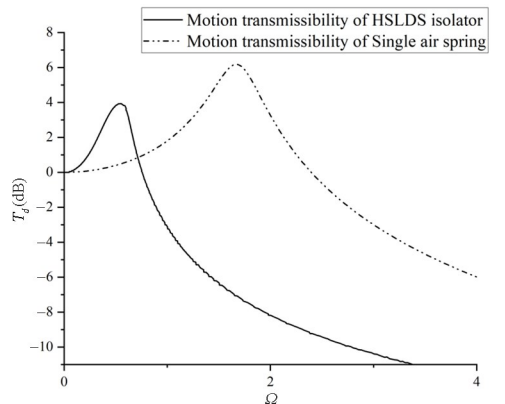


图9 位移传递率对比图

Fig. 9 Displacement transmittance comparison chart

可以观察到,高静低动刚度隔振器有效降低了系统的固有频率,虽然在极低频率内的传递率大于线性系统,但在绝大多数范围内有更好的隔振效果,隔振频带得到有效地拓宽.

### 3 隔振器的有限元仿真

考虑到隔振器的几何结构相对复杂,因此采取一定的简化,将空气弹簧和非线性弹簧组合,并根据计算结果输入非线性弹簧的力学特性.简化后的模型如图10所示.

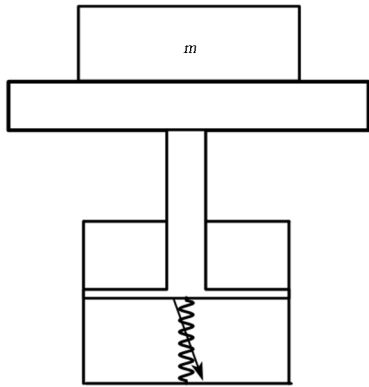


图10 简化模型示意图  
Fig.10 Simplified model diagram

利用ABAQUS作为仿真软件,选取mm作为基本长度单位.几何参数和非线性弹簧参数均按照1.2节进行定义.额外的, $m = 0.0006184t$ ,  $c = 0.00196596N/(mm/s)$ ,并根据帮助文档,绝对零度 $T_0 = -273k$ ,通用气体常数 $R = 8313.85mJ/(mol \cdot k)$ ,空气的摩尔质量 $2.9 \cdot 10^{-5}t/mol$ ,定压摩尔热容 $28110mJ/(mol \cdot k)$ 令 $\Omega = 0.6$ ,即 $\omega = 7.63$ ,激励形式为基础位移激励,用周期形式的边界条件实现.由于空气弹簧具有较高的非线性,选用显式算法,并且用二次显式单元划分网格.为了节约计算成本,将除弹簧和空气外的其他部分约束为刚体.

忽略前期的瞬态响应阶段,只考虑稳态响应,得到的相对位移结果如图11.

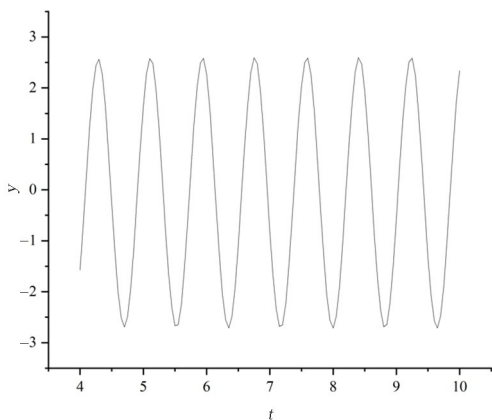


图11 激励角频率7.63时的响应曲线  
Fig.11 Response curve at excitation angular frequency 7.63

时的响应曲线,并在相对位移幅频曲线中标注其无量纲化幅值,结果如图12.

可以看到,有限元计算结果和谐波平衡法计算得到的解析解几乎吻合,但峰值传递率偏高,这是有限元计算的固有误差导致的.总的而言,有限元方法验证了近似解析解法的正确性,进而说明了隔振器的可行性.

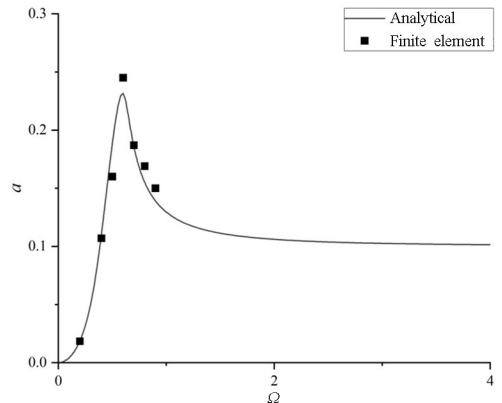


图12 有限元对比图  
Fig.12 Finite element comparison chart

### 4 结论

本文设计了一款基于猫科动物身体结构的具有非对称刚度特性的仿生型隔振器,对其进行了动力学行为分析,并利用近似解法求得了非线性恢复力经过高阶展开后的运动微分方程的解析解,并分别与数值结果和有限元结果进行对比.结果表明,非线性系统具有很复杂的动力学行为,并不单由周期1运动组成,通过控制阻尼等参数,可以有效地抑制倍周期运动.隔振器相对于单一空气弹簧,具有很好的隔振效果,有效拓宽了隔振频带,这些结论对于具有非对称刚度的仿生型隔振器的分析与设计具有重大意义.

### 参考文献

- [1] 谢英江. 变载荷下电磁准零刚度隔振器的设计分析与控制[D]. 北京: 军事科学院, 2022.  
XIE Y J. Design analysis and control of electromagnetic quasi-zero stiffness vibration isolator under variable load [D]. Beijing: Academy of Military Sciences, 2022. (in Chinese)
- [2] ZHANG Y Q, YANG T, DU H F, et al. Wideband vibration isolation and energy harvesting based on a coupled piezoelectric-electromagnetic structure [J].

继续分别求出 $\Omega = 0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9$



- Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 184: 109689.
- [3] 邢运, 杨嘉陵. 动物进化的抗冲击策略及其仿生机理研究[J]. 力学进展, 2021, 51(2): 295-341.  
XING Y, YANG J L. Research progress of impact-resistance strategies and biomimetic mechanism in animal evolution [J]. Advances in Mechanics, 2021, 51(2): 295-341. (in Chinese)
- [4] 孙秀婷, 钱佳伟, 齐志凤, 等. 非线性隔振及时滞消振方法研究进展[J]. 力学进展, 2023, 53(2): 308-356.  
SUN X T, QIAN J W, QI Z F, et al. Review on research progress of nonlinear vibration isolation and time-delayed suppression method [J]. Advances in Mechanics, 2023, 53(2): 308-356. (in Chinese)
- [5] DIAMOND J M. Why cats have nine lives [J]. Nature, 1988, 332(6165): 586-587.
- [6] MILGRAM J, MERBL Y, AROCH I, et al. Epidemiological, clinical and hematological findings in feline high rise syndrome in israel: a retrospective case-controlled study of 107 cats [J]. Israel Journal of Veterinary Medicine, 2013, 68(1): 28-37.
- [7] ALEXANDER R M, BENNETT M B, KER R F. Mechanical properties and function of the paw pads of some mammals [J]. Journal of Zoology, 1986, 209(3): 405-419.
- [8] 张晓鹏, 杨嘉陵, 于晖. 猫科动物脚掌肉垫缓冲力学特性分析[J]. 生物医学工程学杂志, 2012, 29(6): 1098-1104.  
ZHANG X P, YANG J L, YU H. Mechanical buffering characteristics of feline paw pads [J]. Journal of Biomedical Engineering, 2012, 29(6): 1098-1104. (in Chinese)
- [9] ZHANG Z Q, YU H, YANG J L, et al. How cat lands: insights into contribution of the forelimbs and hindlimbs to attenuating impact force [J]. Science Bulletin, 2014, 59(26): 3325-3332.
- [10] YAN G, QI W H, SHI J W, et al. Bionic paw-inspired structure for vibration isolation with novel nonlinear compensation mechanism [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 525: 116799.
- [11] YU H, ZHANG Z Q, LIU H, et al. A new landing impact attenuation seat in manned spacecraft biologically-inspired by felids [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2015, 28(2): 434-446.
- [12] FANG S T, CHEN K Y, LAI Z H, et al. A bio-inspired system for simultaneous vibration isolation and energy harvesting in post-capture spacecraft [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 199: 110466.
- [13] LING P, MIAO L L, ZHANG W M, et al. Cockroach-inspired structure for low-frequency vibration isolation [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 171: 108955.
- [14] 刘川. 舰船用限位仿生隔离系统隔振抗冲击性能研究[D]. 沈阳: 沈阳工业大学, 2022.  
LIU C. Research on vibration isolation and impact resistance of limit bionic isolation system for ships [D]. Shenyang: Shenyang University of Technology, 2022. (in Chinese)
- [15] ABOLFATHI A. Nonlinear vibration isolators with asymmetric stiffness [D]. Southampton, UK: University of Southampton, 2012.
- [16] SHAW A D, NEILD S A, WAGG D J. Dynamic analysis of high static low dynamic stiffness vibration isolation mounts [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(6): 1437-1455.
- [17] YAN G, WU Z Y, WEI X S, et al. Nonlinear compensation method for quasi-zero stiffness vibration isolation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 523: 116743.
- [18] MAREY M. Des mouvements que certains animaux exécutent pour retomber sur leurs pieds lorsqu'ils sont précipités d'un lieu élevé [J]. Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances Del Academie Des Sciences, 1894, 119: 714-717.
- [19] CARRELLA A. Passive vibration isolators with high-static-low-dynamic-stiffness [D]. Southampton, UK: University of Southampton, 2008.
- [20] WANG Y, JING X J. Nonlinear stiffness and dynamical response characteristics of an asymmetric X-shaped structure [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 125: 142-169.
- [21] 周兴华. 具有非对称刚度和阻尼特性的准零刚度隔振器技术研究[D]. 长春: 吉林大学, 2021.  
ZHOU X H. Research on quasi-zero-stiffness vibration isolator with asymmetric stiffness and damping characteristics [D]. Changchun: Jilin University, 2021. (in Chinese)
- [22] 李迪望. 高气密性空气弹簧隔振器研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2020.  
LI D W. Research on air spring vibration isolator with high air tightness [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2020. (in Chinese)