

# 不可压缩超弹性球体中微孔运动的分岔和混沌\*

马敏富<sup>1</sup> 赵振涛<sup>2</sup> 陈威屹<sup>1</sup> 袁学刚<sup>1,3†</sup>

(1. 北方民族大学 数学与信息科学学院, 银川 750021)

(2. 大连民族大学 机电工程学院, 大连 116600)

(3. 大连民族大学 理学院, 大连 116600)

**摘要** 针对一类径向横观各向同性不可压缩 neo-Hookean 材料组成的球体,研究了周期扰动载荷作用下球体中心处微孔的动力学行为.根据平衡微分方程和初边值条件等导出描述微孔径向对称运动的强非线性的非自治常微分方程,通过对微分方程解的定性分析,讨论了微孔的定性行为:(1) 在常值载荷作用下,讨论了材料参数和结构参数对系统平衡点的影响,特别分析了微孔的二次转向分岔;通过对系统势阱的分析,讨论了微孔在常值载荷作用下的周期和振幅跳跃现象.(2) 在周期扰动载荷作用下,利用时程曲线, Poincaré 截面和最大 Lyapunov 指数分别讨论了二次转向分岔情形下微孔的拟周期和混沌运动,给出了系统产生混沌的条件,并进一步分析了周期扰动载荷对微孔混沌运动的影响.

**关键词** neo-Hookean 类材料, 微孔, 周期扰动载荷, 分岔和混沌

**中图分类号:** O322

**文献标志码:** A

## Bifurcation and Chaos of Micro-Void Motion in Incompressible Hyperelastic Sphere\*

Ma Minfu<sup>1</sup> Zhao Zhentao<sup>2</sup> Chen Weiyi<sup>1</sup> Yuan Xuegang<sup>1,3†</sup>

(1. College of Mathematics and Information, North Minzu University, Yinchuan 750021, China)

(2. College of Mechanical and Electronic Engineering, Dalian Minzu University, Dalian 116600, China)

(3. School of Science, Dalian Minzu University, Dalian 116600, China)

**Abstract** The dynamical behaviors are studied for a sphere with a micro-void at the center under periodic perturbation loads, where the sphere is composed of a class of radially transversely isotropic incompressible neo-Hookean materials. A strongly nonlinear nonautonomous ordinary differential equation describing the radially symmetric motion of the micro-void is derived in terms of the equilibrium differential equation and initial-boundary conditions. Through qualitatively analyzing the solutions of the differential equation, some interesting qualitative behaviors of the micro-void are discussed. (1) For constant loads, the effects of material parameters and structural parameters on equilibrium points of the system are presented, and the bifurcation behaviors, especially the secondary turning bifurcation of the micro-void are analyzed. By analyzing the well potentials, the phenomena of period and amplitude jump of the micro-void are conducted. (2) For periodic perturbation loads, the quasiperiodic and chaotic motions of the micro-void are discussed in terms of the secondary turning bifurcation by using the time response curves, Poincaré sections and the maximal Lyapunov characteristic exponents, the existence conditions of chaos

are given, and the effects of periodic perturbation loads on the chaotic motions of the micro-void are further analyzed.

**Key words** neo-Hookean materials, micro-void, periodic perturbation load, bifurcation and chaos

## 引言

橡胶、类橡胶等是典型的超弹性材料,被广泛应用于汽车、建筑、电子、航空航天等诸多领域,具有很好的减震或吸能作用<sup>[1,2]</sup>.作为一种具有储能函数的非线性弹性物质,其本构关系可以完全由它们的应变能函数给出,如 neo-Hookean、Ogden、Mooney-Rivlin 和 Yeoh 材料模型等<sup>[3]</sup>.特别地,neo-Hookean 材料模型因其形式简单以及无条件稳定性等优点,为非线性弹性体动力学建模和求解提供了很大的便利<sup>[4,5]</sup>.

当非线性材料和结构受到外部拉伸时,会出现空穴的生成、增长以及相邻空穴的贯通等现象,由此引起了众多学者的关注.其中,Polignone 等<sup>[6]</sup>基于超弹性材料组成的球体,研究了微孔的生成和增长以及微孔的静态分岔问题.Yuan 等<sup>[7]</sup>推导出微孔运动的二阶非线性常微分方程,并分析了微分方程解的定性性质,讨论了材料参数对微孔进行周期振荡的影响.Tang 等<sup>[8]</sup>基于非线性动力学理论,研究了粘弹性材料组成的结构稳定性问题.任九生等<sup>[9]</sup>研究了周期载荷作用下不可压缩超弹性球体中的空穴生成问题,并对系统进行数值模拟,得出周期载荷的平均载荷与空穴运动之间的关系.Yuan 等<sup>[10]</sup>对于超弹性材料组成的球形薄膜,推导出描述薄膜径向对称运动的二阶非线性常微分方程.详细讨论了在周期阶梯载荷作用下球形薄膜随时间产生的非线性周期振动并给出相应的数值模拟.近年来,随着非线性动力学理论的发展以及数值计算的进步,使得与超弹性材料相关的更复杂问题的求解成为可能.张弛等<sup>[11]</sup>研究了受轴向激励弹性支承梁的稳定性问题,在非弹性理论框架下推导控制方程,并对其数值模拟.Xu 等<sup>[12]</sup>研究了一类不可压缩热超弹性材料组成的圆柱体的有限变形问题.利用边界条件等推导出隐式解析解,数值算例表明,圆柱体中部的径向变形几乎是均匀的,当轴向载荷较大时,两端附近的变形沿轴向变化较明显.曾青等<sup>[13]</sup>针对一类拟周期激励的分段非线性轧

机辊系统,发现存在多种路径可以产生奇异非混沌吸引子并进行了证明,该研究为非光滑动力学系统中的混沌控制提供了相应的理论依据.Aranda-Iglesias 等<sup>[14]</sup>研究了超弹性材料组成的圆柱结构的轴对称非线性振动,证明了圆柱壳的运动可以由周期到拟周期和混沌的变化,并讨论了参数对结构非线性振动的影响.张文等<sup>[15]</sup>针对一类单自由度齿轮动力学系统,将其动力学方程简化为二阶微分方程,通过打靶法得到嵌入混沌吸引子中的不稳定周期轨道,并利用 OGY 方法实现了混沌控制.同时考虑材料和几何非线性,Zhao 等<sup>[16]</sup>研究了动态加载下粘-超弹性球壳的非线性动力学行为,根据变分原理和有限粘弹性理论推导出描述粘-超弹性球壳径向对称运动的耦合的积分-微分型方程,并发现材料的粘性系数改变时,系统的共振频率发生偏移,混沌和多周期振动交替出现.随后,Zhao 等<sup>[17]</sup>又研究了动态载荷和结构阻尼对不可压缩超弹性球壳的非线性动力学行为的影响,并使用 Melnikov 方法对混沌运动进行了分析.此外,李双宝等<sup>[18]</sup>介绍了非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展.李冠强等<sup>[19]</sup>基于 Duffing 振子系统,对控制方程进行数值模拟,进一步揭示了对称系统到非对称系统的演变过程.

本文研究了周期扰动载荷作用下微孔的复杂动力学行为.首先,针对一类径向横观各向同性不可压缩超弹性 neo-Hookean 材料组成的球体,建立描述内部微孔径向对称运动的数学模型,并将其约化为二阶非线性常微分方程;其次,讨论了材料和结构参数对非线性系统平衡点的影响,并进行了定性分析;最后,结合数值算例分析了周期扰动载荷下微孔的拟周期和混沌运动.

## 1 模型建立

### 1.1 控制方程

基于弹性力学理论,描述弹性体运动的平衡微分方程为:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{f}$  是体积力矢量,  $\rho$  是质量密度,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  是与物质点  $\mathbf{X}$  相关的位置向量,  $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  和  $\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  是相应的速度和加速度; 同时,  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$  是 Cauchy 应力张量,  $\mathbf{F}$  是变形梯度张量,  $W = W(\mathbf{F}) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  是与弹性体材料有关的应变能函数,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是  $\mathbf{F}$  的三个主值, 且  $J = \det \mathbf{F} = \sqrt{I_3} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ .

本文研究了在一类周期扰动载荷作用下, 超弹性球体中心处微孔的径向对称运动. 令  $(R, \Theta, \Phi)$  和  $(r, \theta, \varphi)$  分别为初始构型和当前构型下的球体坐标. 特别地, 在球对称变形假设下, 式(1)可以简化为如下的偏微分方程

$$\frac{\partial \sigma_{rr}(r, t)}{\partial R} \left( \frac{\partial r}{\partial R} \right)^{-1} + \frac{2}{r} [\sigma_{rr}(r, t) - \sigma_{\theta\theta}(r, t)] = \rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad (2)$$

在式(2)中,  $\sigma_{rr}(r, t)$ ,  $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$  是 Cauchy 应力张量的两个主值, 分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p(r, t) \\ \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p(r, t) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $p(r, t)$  是待定的静水压力,  $\mathbf{F}$  的主值由下式给出

$$\lambda_1 = \frac{\partial r(R, t)}{\partial R}, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{r(R, t)}{R} \quad (4)$$

本文假设球体由一类径向横观各向同性 neo-Hookean 材料组成, 相应的应变能函数为<sup>[6]</sup>

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{\mu}{2} [(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \\ &a(\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 + 1)] \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\mu$  是剪切模量,  $a \geq 0$  是反映各向异性程度的无量纲材料参数.

球体的外表面受到径向周期性扰动, 并且微孔表面无约束, 相应的应力边界条件为

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(A, t) &= P(t) \left[ \frac{A}{r(A, t)} \right]^2, \\ \sigma_{rr}[r(\varepsilon, t), t] &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $P(t) = p_0 + \eta \sin \omega t$  是与时间  $t$  相关的径向扰动载荷,  $p_0$  为常值载荷,  $\eta$  为外激励幅值,  $\omega$  为

扰动载荷的外激励频率,  $A$  和  $\varepsilon$  分别表示球体的外表面半径和微孔的初始半径.

球体在时间  $t = 0$  时处于未变形状态, 则初始条件可以表示为

$$r(R, 0) = R, \dot{r}(R, 0) = 0 \quad (7)$$

其中,  $\dot{r}$  表示  $r(t)$  关于时间  $t$  的一阶导数.

因此, 描述在径向周期扰动载荷作用下超弹性球体的径向对称运动的数学模型由式(2)~式(7)给出.

## 1.2 模型求解

根据材料的不可压缩约束, 有  $\partial r(R, t) / \partial R = R^2 / r^2(R, t)$ . 等式两边关于  $R$  积分, 可以得到

$$r = r(R, t) = [R^3 + r_1^3(t) - \varepsilon^3]^{1/3}, t \geq 0 \quad (8)$$

其中  $r_1(t) = r(R_1, t) \geq 0$  是与微孔半径相关的待定函数. 根据式(7)和式(8), 有

$$r_1(0) = \varepsilon, \dot{r}_1(0) = 0 \quad (9)$$

对球体的平衡微分方程以及初边值条件进行整理可得

$$\begin{aligned} P(t) \left( \frac{A}{r_2} \right)^2 &= \rho \left[ r_1 \left( 1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \dot{r}_1 + \right. \\ &\left. \left( \frac{r_1^4}{2r_2^4} - \frac{2r_1}{r_2} + \frac{3}{2} \right) (\dot{r}_1)^2 \right] - K(r_2, r_1) \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $r_2 = r(A, t)$ ,  $K(r_2, r_1) = 2\mu \int_{r_1}^{r_2} [2a\kappa^{-8} + (1 - 2a)\kappa^{-4} - \kappa^2] d\xi / \xi$ ,  $\kappa = r/R$ . 式(10)决定了微孔半径  $r_1(t)$  随时间的变化规律.

为了便于定性分析, 引入如下形式的无量纲变换

$$\begin{aligned} x(t) &= r_1(t) / A, \quad \delta = (A^3 - \varepsilon^3)^{1/3} / A, \\ P(\tau) &= P(t) / \mu, \quad P = p_0 / \mu, \tilde{\eta} = \eta / \mu, \\ \tau &= t \sqrt{\mu / \rho A^2}, \quad \tilde{\omega} = \omega \sqrt{\rho A^2 / \mu} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\tau$  为无量纲时间. 根据式(10), 式(11), 得到如下形式的无量纲方程

$$\begin{aligned} [x - x^2 (\delta^3 + x^3)^{-1/3}] \ddot{x} + \\ \left[ \frac{1}{2} x^4 (\delta^3 + x^3)^{-4/3} - 2x (\delta^3 + x^3)^{-1/3} + \frac{3}{2} \right] \dot{x}^2 + \\ H(x, \delta, P, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} H(x, \delta, P, \tilde{\eta}, \tilde{\omega}) &= -(x^3 + \delta^3)^{-2/3} P(\tau) + \\ &2 \int_{[x^3/(1-\delta^3)]^{1/3}}^{(x^3+\delta^3)^{1/3}} \frac{2a\kappa^{-9} + (1-2a)\kappa^{-5} - \kappa}{\kappa^3 - 1} d\kappa \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\ddot{x}$  表示  $x$  关于无量纲时间  $\tau$  的二阶导数. 此外, 初始条件(9)变为

$$x(0) = (1 - \delta^3)^{1/3}, \dot{x}(0) = 0 \quad (14)$$

## 2 常值载荷 ( $\tilde{\eta} = 0$ )

当  $\tilde{\eta} = 0$  时,  $P(\tau) = P$ , 即微孔仅受常值载荷的

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\left(\frac{1}{2}x^4(\delta^3+x^3)^{-4/3} - 2x(\delta^3+x^3)^{-1/3} + \frac{3}{2}\right)y^2 - H(x, \delta, P, 0, \tilde{\omega}) \\ x - x^2(\delta^3+x^3)^{-1/3} \end{pmatrix} \quad (15)$$

### 2.1 平衡点及其定性分析

令  $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ , 由式(15)可知系统的平衡点由  $H(x, \delta, P, 0, \tilde{\omega}) = 0$  确定. 设  $H(x, \delta, P, 0, \tilde{\omega}) = 0$  的解为  $x_i$ , 则  $(x_i, 0)$  为系统的平衡点. 特别地, 当  $\epsilon = 0$  时,  $\delta = 1$ , 通过  $H(x, 1, P, 0, \tilde{\omega}) = 0$  可以描述实心球中空穴的生成和增长. 对函数  $H(x, \delta, P, 0, \tilde{\omega})$  进行 Taylor 展开得到

$$P = \frac{5}{2} + \frac{40\pi - 17\sqrt{3} - 80\arctan\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}a + \left(\frac{1}{3} + \frac{40\sqrt{3}\pi - 393}{135}a\right)x^3 + o(x^3) \doteq P_{cr} + M_n x^3 + o(x^3), (x \rightarrow 0+) \quad (16)$$

其中,  $P_{cr}$  是微孔生成的临界载荷.

令  $M_n = 0$ , 求得微孔分岔的临界材料参数  $a_0$ , 当  $a < a_0$  时, 对任意的  $\delta \in (0, 1)$ , 系统的平衡点曲线单调递增, 此时系统只有一个中心  $(x_1, 0)$ ; 当  $a > a_0$  时, 存在临界结构参数  $\delta_0$ , 当  $0 < \delta \leq \delta_0$  时, 系统只有一个中心  $(x_2, 0)$ ; 当  $\delta_0 < \delta < 1$  时, 存在两个临界载荷  $P_{t1}$  和  $P_{t2}$ , 出现二次转向分岔的情况: (1) 若  $P < P_{t1}$  或者  $P > P_{t2}$ , 系统只有一个中心  $(x_3, 0)$ ; (2) 若  $P_{t1} < P < P_{t2}$ , 系统有两个中心  $(x_4, 0)$ ,  $(x_6, 0)$  和一个鞍点  $(x_5, 0)$  ( $x_4 < x_5 < x_6$ ), 如图 1 所示.

### 2.2 微孔的周期运动

进一步求得式(12)的首次积分

$$\frac{1}{2}[x^3 - x^4(\delta^3 + x^3)^{-1/3}]\dot{x}^2 + S(x, \delta, P) = C \quad (17)$$

其中  $C$  是与初始条件相关的“能量常数”,  $S(x, \delta, P)$  为系统的势能函数, 具体形式为

$$S(x, \delta, P) = \int_{(1-\delta^3)^{1/3}}^x z^2 H(z, \delta, P, 0, \tilde{\omega}) dz \quad (18)$$

作用, 式(12)是完全可积的 Hamilton 系统. 令  $y = \dot{x}$ , 式(12)转化为如下形式

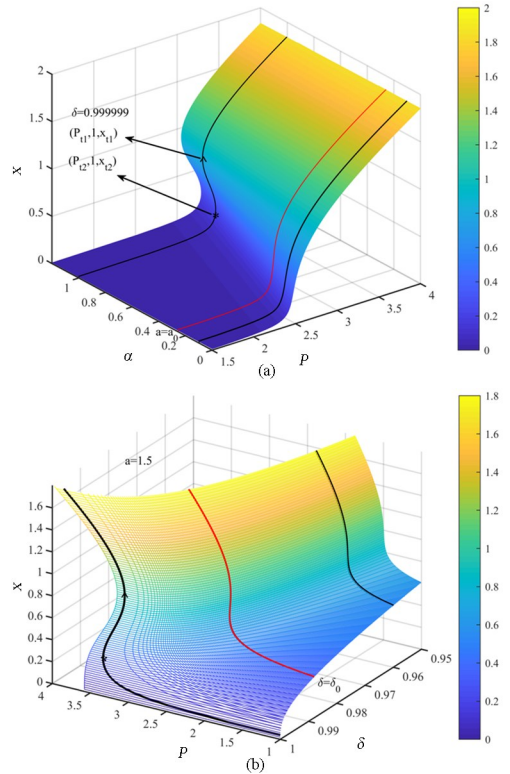


图 1 系统的平衡点曲线

Fig.1 Equilibrium point curves of the system

对给定的材料参数, 微孔在常值载荷作用下的非线性振动周期为

$$T = \int_{(1-\delta^3)^{1/3}}^{x_{\max}} \left[ \frac{x^3 - x^4(\delta^3 + x^3)^{-1/3}}{-2S(x, \delta, P)} \right]^{1/2} dx \quad (19)$$

其中  $x_{\max}$  对应微孔的最大半径.

给定初始条件时, 系统可围绕任一势阱作周期运动, 也可以同时围绕两个势阱作周期运动, 且势阱与系统的中心相对应, 如图 2(a)、图 2(b)所示. 由图 2(c)、图 2(d)可知, 对给定的材料参数, 当微孔半径足够小时: (1) 若  $a < a_0$ , 微孔的振幅随着外载荷的增大而增大, 但是存在临界载荷  $P_m$ , 振幅变化速度开始增加, 说明结构的刚度开始有了明显的减小; (2) 若  $a > a_0$ , 微孔的振幅逐渐增大, 同样存在临界载荷  $P_m$ , 此时振幅出现了跳跃现象, 其

相轨迹为非对称“∞”型同宿轨道。

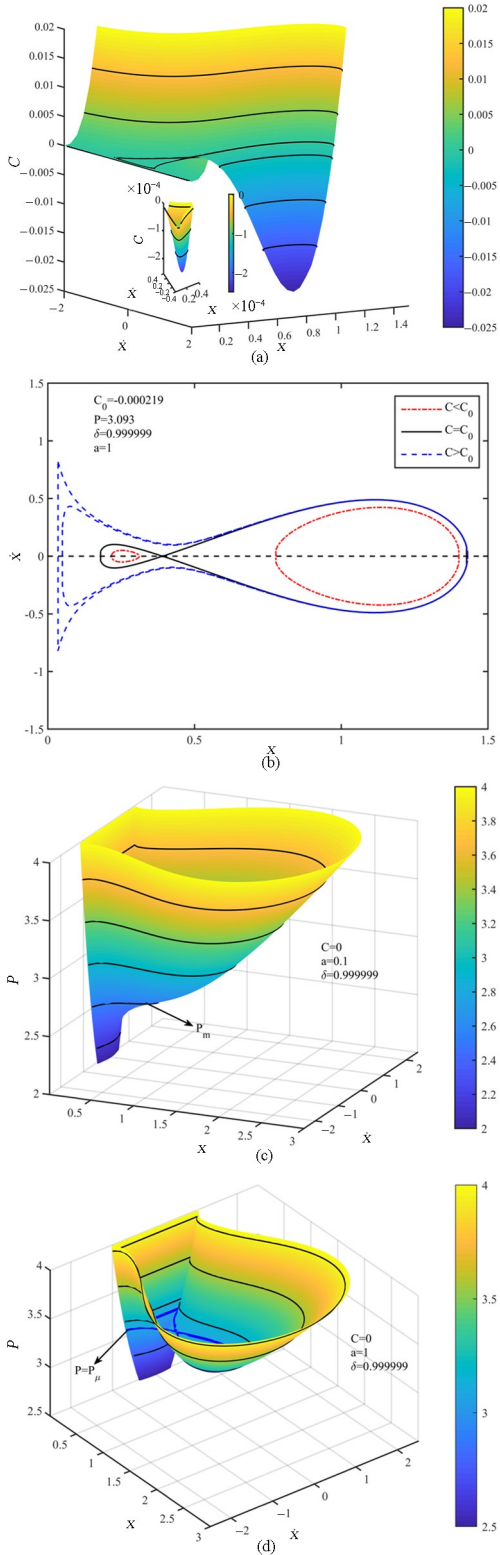


图 2 不同参数对应的势阱和等高线  
Fig.2 Well potential and contour lines corresponding to different parameters

### 3 周期扰动载荷 ( $\tilde{\eta} > 0$ )

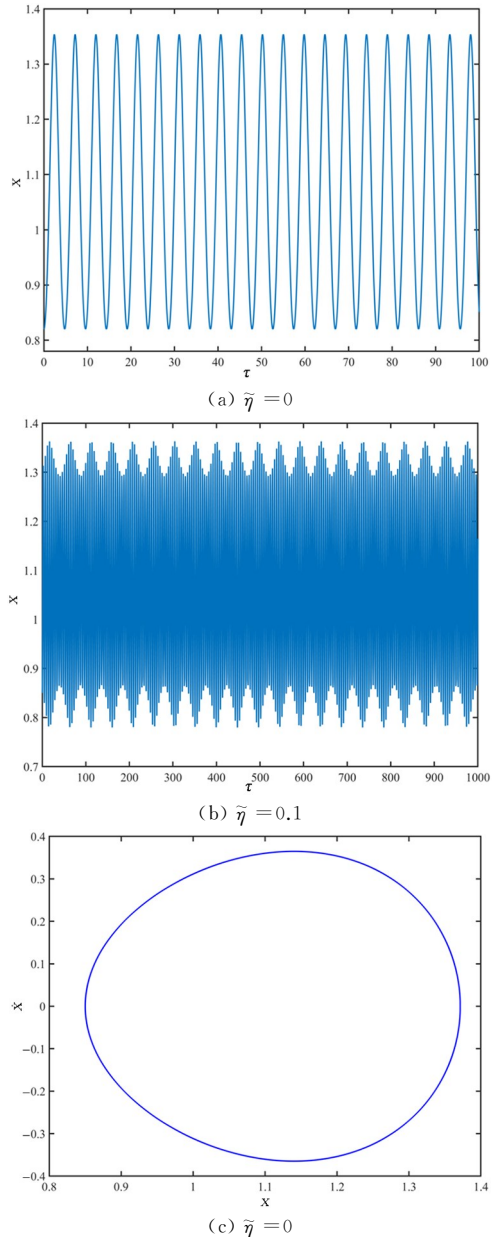
当  $\tilde{\eta} > 0$  时,  $P(\tau) = P + \tilde{\eta} \sin \tilde{\omega} \tau$ , 此时微孔的运动方程是关于时间  $\tau$  的非自治系统, 为近可积的

Hamilton 系统. 通过给定参数  $a = 1, P = 3.093, \delta = 0.999999$ , 进一步研究微孔受到周期扰动载荷作用下在中心和鞍点附近的动力学行为。

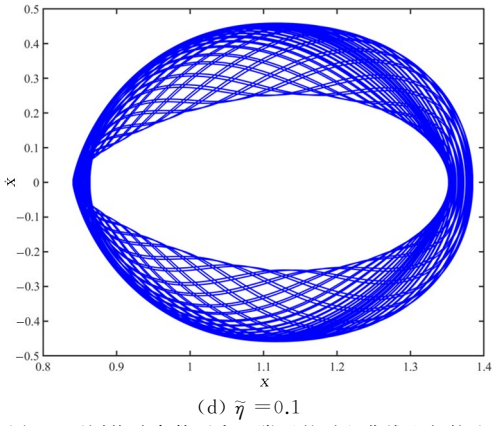
#### 3.1 微孔的拟周期运动

当初值取在系统的中心附近时, 通过时程曲线, 相轨迹和 Poincaré 截面重点关注微孔围绕单势阱和两势阱的拟周期运动。

当  $\tilde{\eta} = 0$  时, 系统进行周期运动, 随着  $\tilde{\eta}$  的增大, 时程曲线不再呈现周期性变化, 但从长时间的变化历程可以看出, 时程曲线的包络线整体上仍呈现出周期性变化的特点, 系统进行拟周期运动, 如图 3(a)、图 3(b) 所示. 说明当扰动参数增大到一定取值时, 系统的运动轨迹将变得更加复杂。



(c)  $\tilde{\eta} = 0$

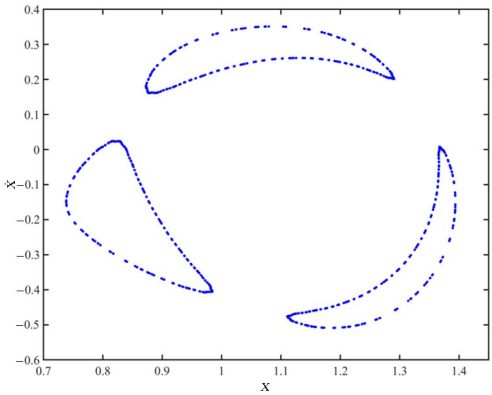


(d)  $\bar{\eta} = 0.1$

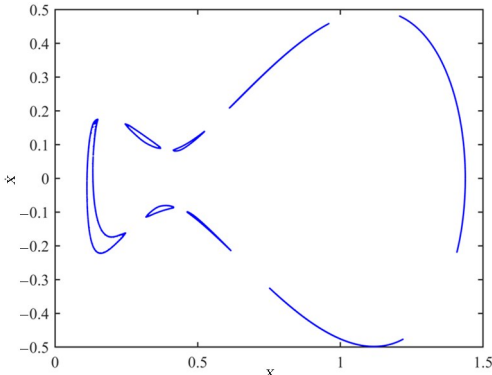
图3 不同扰动参数下中心附近的时程曲线和相轨迹

Fig.3 Time response curves and phase diagrams near the center under different perturbation parameters

注意到,在周期扰动作用下,微孔表现出拟周期运动,Poincaré 截面变为多个独立的封闭曲线,且单势阱和双势阱运动都有类似的表现,如图4所示。



(a)  $\bar{\eta} = 0.1$



(b)  $\bar{\eta} = 0.0005$

图4 周期扰动下的 Poincaré 截面,(a) 单势阱运动,(b) 双势阱运动

Fig.4 Poincaré sections under periodic perturbation of (a) one well potential and (b) double well potentials

对于非线性系统,结构振动的周期与初始条件有关,因此在外激励频率给定,初始条件不同时,受迫振动表现出不同的超谐或亚谐共振.图5给出了系统的外激励频率  $\tilde{\omega}$  和基频  $\bar{\omega}$  之间满足关系  $\tilde{\omega} =$

$n\bar{\omega}$  时的 Poincaré 截面,当  $n=3$  时,等势线破裂为 3 个封闭的曲线,当  $n=4$  时,等势线破裂为 4 个封闭的曲线,当  $n=5$  时,等势线破裂为 5 个封闭的曲线.可以看出,当满足非线性共振条件时基频越小,其系统的 Poincaré 截面断裂形成更多封闭的曲线。

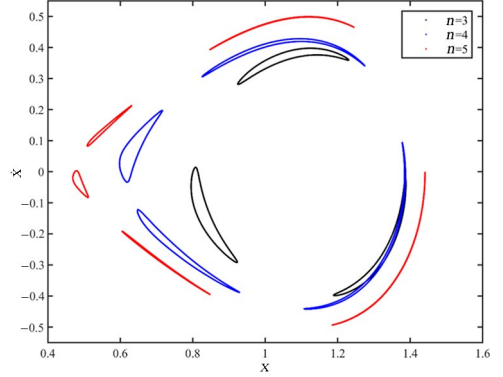
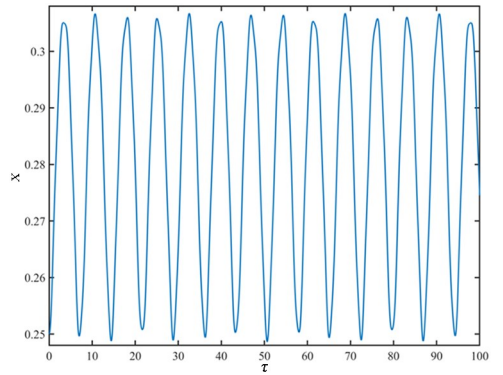


图5 不同初始条件下的 Poincaré 截面

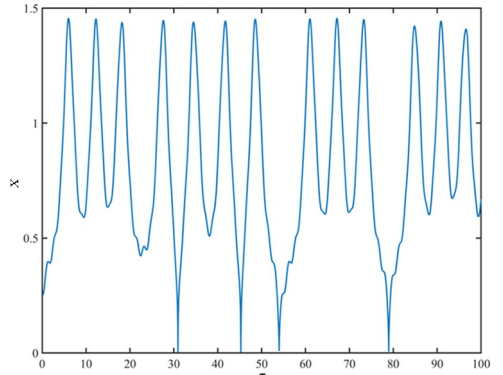
Fig.5 Poincaré sections with different initial conditions

### 3.2 微孔的混沌运动

为探究微孔在鞍点附近的动力学行为,首先分析了鞍点附近时程曲线的变化,由图6可以看出,微孔在鞍点附近对扰动参数的变化更加敏感。



(a)  $\bar{\eta} = 0.001$



(b)  $\bar{\eta} = 0.1$

图6 不同扰动参数下鞍点附近的时程曲线

Fig.6 Time response curves near the saddle point under different perturbation parameters

如图 7 所示,当  $\tilde{\eta}=0.0001$  时,Poincaré 截面由分散在同宿轨道附近不规则散点构成;当扰动参数

增大时,Poincaré 截面的区域明显增大.随着迭代步数  $K$  的增加,最大 Lyapunov 指数均出现了收敛,证明了算法的有效性.当  $\tilde{\eta}=0.0001$  时,最大 Lyapunov 指数大于零,结合时程曲线、Poincaré 截面的表现可以发现,系统做无规则的混沌运动;且最大 Lyapunov 指数随扰动参数  $\tilde{\eta}$  的增大而增大,说明系统非线性运动的不规则性进一步加强.特别地,基于 3.1 节中拟周期运动的讨论,本文对混沌运动的成因做如下的分析,当初值充分靠近鞍点时,相邻等势线之间的距离更小,发生等势线破裂时容易出现跨等势线的运动或环面相交导致混沌现象.

#### 4 结论

本文针对一类径向横观各向同性不可压缩 neo-Hookean 材料组成的球体,分析了周期扰动载荷对微孔定性行为的影响,通过对该问题进行数学建模和定性分析,得到的主要结论为:

(1)在常值载荷作用下,讨论了材料参数和结构参数对微孔分岔行为的影响.结果表明,材料参数和结构参数都会导致系统的二次转向分岔现象,并且随着外载荷的增大,系统的平衡点个数出现“1—3—1”的变化情况.通过分析系统平衡点和势阱的变化情况发现,材料参数和结构参数影响微孔的分岔并影响其生长速率.特别地,存在临界载荷,导致结构刚度的明显变化,甚至产生振幅跳跃现象.

(2)在周期扰动载荷作用下,基于二次转向分岔的讨论,给出了结构出现混沌运动的条件.特别地,不同的初值选择导致微孔具有完全不同的运动方式:①初值取在中心附近时,发现微孔呈现拟周期运动;②初值取在鞍点附近时,通过时程曲线、Poincaré 截面和最大 Lyapunov 指数等方法发现微孔呈现混沌运动,并通过拟周期运动中出现的等势线破裂现象进行了解释.

#### 参考文献

- [1] 朱云,邹鸿翔,魏克湘.自供能智能减震器自耦合控制研究[J].动力学与控制学报,2021,19(5):53—58.  
ZHU Y, ZOU H X, WEI K X. Self-coupling control of self-powered intelligent shock absorber [J].

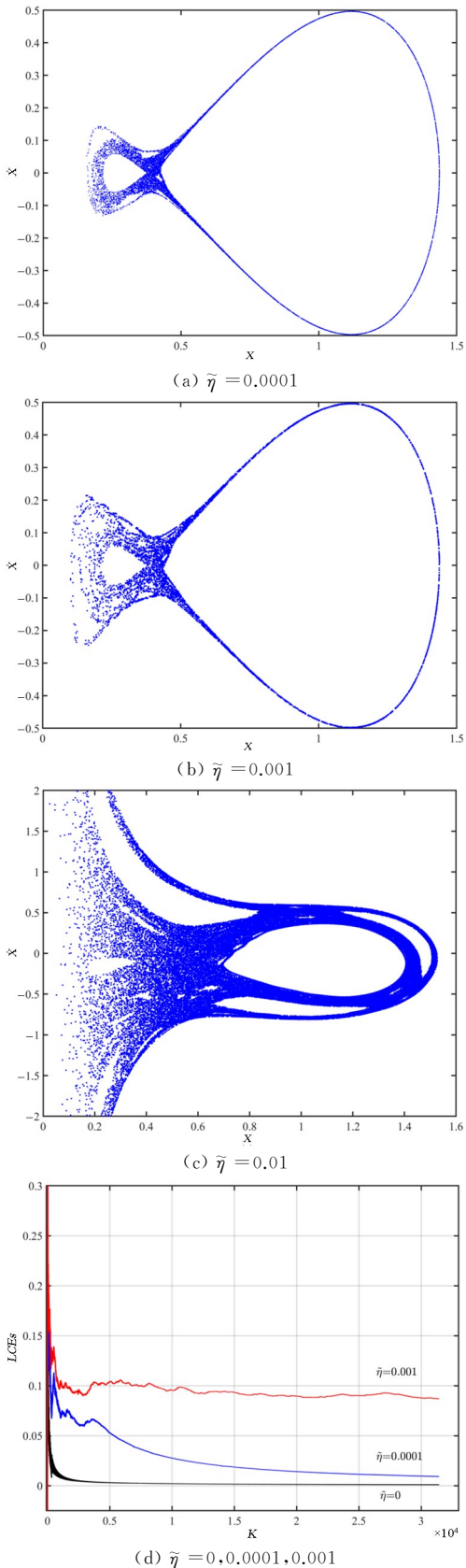


图 7 不同扰动参数下鞍点附近的 Poincaré 截面和最大 Lyapunov 指数  
Fig.7 Poincaré sections and maximal Lyapunov characteristic exponents near the saddle point under different perturbation parameters

- Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 53–58. (in Chinese)
- [2] FERNÁNDEZ M, JAMSHIDIAN M, BÖHLKE T, et al. Anisotropic hyperelastic constitutive models for finite deformations combining material theory and data-driven approaches with application to cubic lattice metamaterials [J]. Computational Mechanics, 2021, 67(2): 653–677.
- [3] OGDEN R W. Non-linear elastic deformations [M]. New York, USA: Dover Publications, 1997.
- [4] WANG R, DING H, YUAN X G, et al. Different types of solitary waves in a thermo-hyperelastic neo-Hookean cylindrical shell [J]. Composite Structures, 2020, 243: 112178.
- [5] ZAJKANI A, BANDIZAKI A. Stability and instability analysis of the substrate supported panels in the forming process based on perturbation growth and bifurcation threshold models [J]. Journal of Manufacturing Processes, 2018, 31: 703–711.
- [6] POLIGNONE D A, HORGAN C O. Cavitation for incompressible anisotropic nonlinearly elastic spheres [J]. Journal of Elasticity, 1993, 33(1): 27–65.
- [7] YUAN X G, ZHU Z Y, CHENG C J. Dynamical analysis of cavitation for a transversely isotropic incompressible hyper-elastic medium; periodic motion of a pre-existing micro-void [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, 42(3): 442–449.
- [8] TANG Y J, KANG J T, WANG Y Q. Cavity expansion in nonlinear viscoelastic solids: a nonlinear dynamic study [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 144: 104076.
- [9] 任九生, 沈佳铖, 袁学刚. 周期载荷下不可压超弹性材料的空穴动生成 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(18): 10–13.  
REN J S, SHEN J C, YUAN X G. Dynamical cavitation for an incompressible hyper-elastic material sphere under periodic load [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(18): 10–13. (in Chinese)
- [10] YUAN X G, ZHANG H W, REN J S, et al. Some qualitative properties of incompressible hyperelastic spherical membranes under dynamic loads [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(7): 903–910.
- [11] 张弛, 毛晓晔, 丁虎, 等. 受轴向激励弹性支承梁的稳定性分析 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(3): 66–76.  
ZHANG C, MAO X Y, DING H, et al. Stability analysis of axially excited beam with elastic boundary [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 66–76. (in Chinese)
- [12] XU J, YUAN X G, ZHANG H W, et al. Combined effects of axial load and temperature on finite deformation of incompressible thermo-hyperelastic cylinder [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(4): 499–514.
- [13] 曾青, 乐源, 李高磊. 一类分段非线性轧机辊系系统的奇异非混沌动力学研究 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(3): 1–7.  
ZENG Q, YUE Y, LI G L. Research on strange nonchaotic dynamics of piecewise nonlinear rolling mill system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 1–7. (in Chinese)
- [14] ARANDA-IGLESIAS D, RODRÍGUEZ-MARTÍNEZ J A, RUBIN M B. Nonlinear axisymmetric vibrations of a hyperelastic orthotropic cylinder [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2018, 99: 131–143.
- [15] 张文, 谢建华, 李高磊, 等. 单自由度齿轮系统的混沌控制 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(4): 1–7.  
ZHANG W, XIE J H, LI G L, et al. Chaos control of a single degree of freedom gear system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 1–7. (in Chinese)
- [16] ZHAO Z T, NIU D T, ZHANG H W, et al. Nonlinear dynamics of loaded visco-hyperelastic spherical shells [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(2): 911–933.
- [17] ZHAO Z T, YUAN X G, ZHANG W Z, et al. Dynamical modeling and analysis of hyperelastic spherical shells under dynamic loads and structural damping [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 95: 468–483.
- [18] 李双宝, 马茜茜, 张伟. 非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 9–20.  
LI S B, MA X X, ZHANG W. Research progress in Melnikov method for global dynamics of non-smooth systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(2): 9–20. (in Chinese)
- [19] 李冠强, 谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 1–7.  
LI G Q, XIE J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of the double-impact duffing oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 1–7. (in Chinese)