

# 随机激励作用下船舶横摇运动的奇异非混沌动力学\*

何智超 乐源<sup>†</sup> 李高磊 刘润

(西南交通大学力学与航空航天学院,成都 611756)

**摘要** 基于一类规则横浪作用下的单自由度船舶横摇运动模型,考虑恢复力矩和阻尼力矩的非线性因素,以一低干舷船模为例,利用龙格库塔法求解了横摇运动方程,通过时间庞加莱截面绘制了系统的分岔图;考虑其受随机风荷载扰动下不同周期吸引子演变成奇异非混沌吸引子的具体过程,发现周期激励系统在随机激励扰动下同样存在奇异非混沌吸引子,且当分岔参数离混沌区域越远,所需要随机激励的幅值越大才能诱发奇异非混沌吸引子.通过最大李雅普诺夫指数验证吸引子的非混沌性;采用奇异连续谱和分形图刻画吸引子的奇异性.

**关键词** 船舶横摇, 随机激励, 奇异非混沌, 李雅普诺夫指数, 奇异连续谱

**中图分类号**:O313

**文献标志码**:A

## Strange Nonchaotic Dynamics of Nonlinear Ship Rolling in Regular Beam Seas and Stochastic Wind\*

He Zhichao Yue Yuan<sup>†</sup> Li Gaolei Liu Run

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

**Abstract** Based on a single-degree-of-freedom ship sailing in regular beam seas, the nonlinear rolling equation is established. The Runge-Kutta methods is used to solve the differential equation of motion, and the bifurcation diagram is plot by Poincaré surface of section. The process of different periodic attractors transforming into strange nonchaotic attractors under random wind excitation is studied by numerical simulation. It is found that a larger random excitation intensity is required to induce SNAs when the parameter is varied further from the chaotic range. The maximum Lyapunov exponent is used to verify the nonchaotic characteristics of the attractors, and singular continuous spectrum and the trajectories in the complex plane can demonstrate the strange property of the attractors.

**Key words** ships rolling, stochastic excitation, strange nonchaotic, Lyapunov exponent, singular continuous spectrum

### 引言

当船舶在波浪上航行时,在波浪的作用下可能产生围绕其原始平衡位置做 6 个自由度的摇荡运

动,分别为纵荡、横荡、垂荡、横摇、纵摇以及首摇<sup>[1]</sup>.在上述运动方式中,尤其以横摇运动造成的危害最大,轻则造成大量的财产损失,重则影响船舶设备正常运行,导致船舶倾覆,威胁船舶及船员

2022-12-08 收到第 1 稿,2023-01-05 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(12072291,11732014,12172306), National Natural Science Foundation of China(12072291,11732014,12172306).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:leyuan2003@sina.com

的安全.因此,船舶的横摇运动状态一直是学者研究的重点之一.Nayfeh<sup>[2]</sup>利用多尺度法求解了单自由度船舶横摇运动微分方程的二阶近似解,并利用 Floquet 理论确定了不同参数域下稳态解的存在区间.赵文浩等<sup>[3]</sup>研究了船舶系统存在的多稳态现象,引入间歇控制方法将系统的运动轨迹控制到期望的周期轨道上.袁远等<sup>[4]</sup>利用分岔分析方法对规则横浪中船舶横摇运动的稳定性进行了分析,提出了船舶奇异倾覆的概念,验证了周期倍化分岔是船舶倾覆的机理之一.刘利琴等<sup>[5]</sup>运用 Melnikov 函数和路径积分法研究了随机横浪中船舶的混沌运动特性和发生混沌运动的临界参数条件,发现当系统作用有幅值较大的白噪声激励时,船舶响应存在两种情况,并会在这两种状态间随机跳跃,导致船舶发生倾覆.胡开业等<sup>[6]</sup>用一种有界随机噪声模型模拟船舶在随机横浪中所受的外激励,运用随机 Melnikov 方法对船舶在随机横浪中的全局稳定性进行了分析,得到了船舶稳定横摇运动的噪声激励幅值区间.D Deleanu 等<sup>[7]</sup>研究了随机横浪作用下船舶横摇安全池随参数变化的演变情况,当随机激励幅值增大时,安全池内部和外部均会受到侵蚀,并且通过对比发现舦龙骨能够有效防止船舶发生倾覆.Liu 等<sup>[8]</sup>考虑船舶同时受风荷载和随机波浪荷载的作用,利用离散傅里叶方法对船舶横摇运动的稳定性进行了分析,通过数值模拟发现风荷载会导致原先对称的异宿轨道丧失对称性,同时风荷载幅值的增大会使得横摇运动的安全池快速收缩.关于船舶系统在随机激励下的奇异非混沌动力学特性,目前尚无相关研究.

奇异非混沌吸引子(strange nonchaotic attractors, SNAs)是奇异但非混沌的吸引集,在动力学中,这些吸引子被认为是介于规则性与混沌性之间的过渡,在这种转变中,“奇异”出现在“混沌”之前.“奇异”指的是在相平面上动力学变量的关系是非光滑的,具有几何结构上的分形;“非混沌”指的是吸引子不敏感依赖于系统的初始条件,即最大李雅普诺夫指数为负数,这也是 SNAs 不同于混沌吸引子的地方之一.研究表明, SNA 不是在一些特殊参数值上存在的退化现象,而是在拟周期激励系统中普遍存在的一种独立于混沌和周期之外的新型运动状态<sup>[9]</sup>.自 Grebogi 等<sup>[10]</sup>于 1984 年首次揭示了 SNAs 的存在性以来,人们意识到“奇异”并非等

价于“混沌”,并通过理论分析和数值模拟对各类非线性动力系统产生的 SNAs 进行了广泛的研究.目前,奇异非混沌吸引子已经成为非线性动力学领域重要的研究内容之一.

Ding 等<sup>[11]</sup>等从数值和解析的角度证实了 SNAs 在拟周期系统中的存在,并举例说明了在典型的拟周期系统中可能出现的多种动力学行为. Lindner 等<sup>[12]</sup>等利用开普勒太空望远镜记录了天琴座内一些恒星的亮度在主频率和次频率上波动的光线曲线,这两种频率的比率接近于黄金分割值,而由次频率驱动的非线性动力系统通常存在 SNAs,这是实验室外首次证实 SNAs 的存在. Khovanov 等<sup>[13]</sup>研究了随机激励对拟周期激励下 Duffing 振子运动特性的影响,利用频闪截面法和局部最大李雅普诺夫指数验证了系统在随机激励作用下吸引子的奇异性与非混沌性. Wang 等<sup>[14]</sup>发现 SNAs 除了在拟周期激励系统中存在以外,自治系统以及周期激励系统在随机激励扰动下也会产生 SNAs,并通过功率谱,奇异连续谱,分形图等工具进行了验证. Aravindh 等<sup>[15]</sup>研究了受周期激励的 Duffing 振子不同周期窗口在随机激励扰动下周期吸引子的演变情况,从数值上证明了在周期窗口的末端混沌鞍和周期轨道共存.曾青等<sup>[16]</sup>考虑了一类拟周期激励的分段非线性轧机辊系系统,用有理数逼近无理数和相敏感函数刻画其奇异性,通过数值结果发现有三种路径可以演变成奇异非混沌吸引子,即分形路径、阵发路径和 Heagy-Hammel 路径. Li 等<sup>[17]</sup>将随机激励作用在一类单自由度分段线性系统上,发现随机激励同样可以诱导该系统的周期吸引子演变成 SNAs,并揭示了 SNAs 的演变过程.此外,在边界激变附近的周期三吸引子也可以在随机激励扰动下演变成 SNAs,利用相图阐明了该 SNAs 具有阵发性.

考虑到实际海况,船舶在航行的过程往往除了受到波浪激励的作用外,不可避免地还会受到随机的风荷载.本文考虑一类单自由度的船舶横摇系统,研究其在简谐激励和随机激励共同作用下的奇异非混沌动力学.通过数值模拟探究了不同周期吸引子在随机激励作用下演变成 SNAs 的具体过程.利用奇异连续谱和分形图刻画了吸引子的奇异性,利用最大李雅普诺夫指数验证了非混沌性.

## 1 船舶非线性横摇运动模型

当船舶在正横规则波作用下,将产生横摇运动.一般情况下,船舶发生横摇运动时,其受到恢复力矩、阻尼力矩、惯性力矩以及波浪扰动力矩的作用.假设波长远大于船长,并且附加转动惯量为常数,根据达朗贝尔原理,船舶在正横波作用下的运动微分方程可写为<sup>[2]</sup>:

$$I\ddot{\phi} = -\delta I(\ddot{\phi} - \ddot{\eta}) - D(\dot{\phi} - \dot{\eta}) - K(\phi - \eta) \quad (1)$$

式中,  $I$  为转动惯量,  $\delta I$  为附加转动惯量,  $\phi$  为绝对横摇角,  $\eta$  为波倾角.

对于正横波,  $\eta(t)$  可表示为:

$$\eta = F \cos \Omega t$$

令相对横摇角  $\theta = \phi - \eta$ , 方程(1)可写为:

$$(I + \delta I)\ddot{\theta} + K(\theta) + D(\dot{\theta}) = IF\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (2)$$

式中,  $F$  为波倾角幅值,  $\Omega$  为波浪遭遇频率,  $K(\theta)$  为恢复力矩,  $D(\dot{\theta})$  为阻尼力矩. 船舶在横倾  $\theta$  角后, 浮心会自原来的位置沿曲线移动到新的位置, 导致重力和浮力的作用点不在同一铅垂线上, 因而产生一个复原力矩  $M_R$ , 此时  $M_R = \Delta \overline{GZ} = \Delta \overline{GM} \sin \theta$ , 其中  $\Delta$  为船舶排水量,  $\overline{GZ}$  为船舶复原力臂,  $\overline{GM}$  为船舶初稳性高. 利用泰勒公式对正弦函数展开可以得到关于  $\theta$  的奇数次项, Nayfeh 在文献[2]中已经证明五次项能满足较高精度, 故复原力矩可写为  $M_R = \Delta \overline{GZ}(\theta) = \Delta(r_1 \theta + r_3 \theta^3 + r_5 \theta^5) = k_1 \theta + k_3 \theta^3 + k_5 \theta^5$ . 对于非线性阻尼力矩, 常见的有  $D(\dot{\theta}) = d_1 \dot{\theta} + d_2 |\dot{\theta}| \dot{\theta}$  和  $D(\dot{\theta}) = d_1 \dot{\theta} + d_3 \dot{\theta}^3$  两种. Bikdash, M 等在文献[18]中证明了立方阻尼模型可以很好地近似船舶的实际情况并且避免绝对值的处理, 故文中的阻尼力矩取  $D(\dot{\theta}) = d_1 \dot{\theta} + d_3 \dot{\theta}^3$ .

加入随机激励, 并重写方程(2), 得到正横规则波与随机激励共同作用下船舶的横摇运动方程:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_5 \theta^5 + 2\mu \dot{\theta} + \mu_3 \dot{\theta}^3 = f \cos \Omega t + D\xi \quad (3)$$

式中,  $\omega_0^2 = \frac{k_1}{I + \delta I}$ ,  $\alpha_3 = \frac{k_3}{I + \delta I}$ ,  $\alpha_5 = \frac{k_5}{I + \delta I}$ ,  $2\mu = \frac{d_1}{I + \delta I}$ ,  $\mu_3 = \frac{d_3}{I + \delta I}$ ,  $f = \frac{I}{I + \delta I} F \Omega^2$ ,  $D\xi$  表示强度

为  $D$  的高斯白噪声. 本文的高斯白噪声均值取为 0, 方差为 1.

## 2 刻画吸引子的奇异性及非混沌性

### 2.1 最大李雅普诺夫指数

令  $\phi = \Omega t$ ,  $x = \theta$ ,  $y = \dot{\theta}$ , 式在相空间  $R^2 \times T$  中写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -(\omega_0^2 \theta + \alpha_3 \theta^3 + \alpha_5 \theta^5) - (2\mu \dot{\theta} + \mu_3 \dot{\theta}^3) + f \cos \varphi + D\xi \\ \dot{\varphi} = \Omega \end{cases} \quad (4)$$

引入二维 Poincaré 映射

$$\Pi: \Sigma \rightarrow \Sigma$$

$$\Sigma \equiv \{(x, y, \varphi) \in R \times R \mid \varphi \bmod 2\pi = 0\} \quad (5)$$

则映射方程写为

$$x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = f_2(x_n, y_n) \quad (6)$$

根据定义, 李雅普诺夫指数可表示为<sup>[19]</sup>:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \frac{\partial x_n}{\partial x_0} \right|}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_k} \right| \quad (7)$$

当最大李雅普诺夫指数为非正时, 表明系统对初值没有敏感依赖性, 即具有非混沌性. 此外, 李雅普诺夫指数还能呈现相空间内轨道沿不同方向的拉伸或压缩速率, 当李雅普诺夫指数为正时, 表明轨道在沿给定方向上以指数级别的速率拉伸, 相反, 当李雅普诺夫指数为负时, 表明轨道在沿给定方向上以指数级别的速率压缩.

### 2.2 奇异连续谱

在动力系统中, 当系统的运动状态是周期或拟周期时, 功率谱是离散的, 存在某些频率的  $\delta$  峰; 当系统的运动状态是混沌或随机时, 功率谱是连续的; 当系统的运动状态是奇异非混沌时, 对应的功率谱呈现一种奇异连续的形态, 介于离散和连续之间.

将系统的状态变量  $x$  通过傅里叶变换离散, 其部分和可表示为:

$$X(\omega, T) = \sum_{n=1}^T x_n e^{i2\pi n \omega} \quad (8)$$

如果吸引子是奇异非混沌吸引子,  $X(\omega, T)$  与  $T$  与存在以下幂律关系<sup>[20]</sup>:

$$|X(\omega, T)|^2 \sim T^k \quad (9)$$

其中  $1 < k < 2$ , 称为标度因子. 此外,  $X(\omega, T)$  在复平面上的轨迹可以演示出分形的几何特性, 也能进一步说明奇异非混沌吸引子的奇异性.

### 3 系统在无噪声扰动下从周期倍化通向混沌

选取 Wright 等所研究的低干舷船模作为研究对象<sup>[21]</sup>, 其相关参数如表 1 所示

表 1 低干舷船舶参数表

Table 1 Parameters for the model of low-freeboard ship

Parameter	$\delta I/I$	$\omega_0$	$\alpha_3/\omega_0^2$	$\alpha_5/\omega_0^2$	$\mu$	$\mu_3$
Value	0.25	5.2779	-1.69119	0.63297	0.0855	0.0216

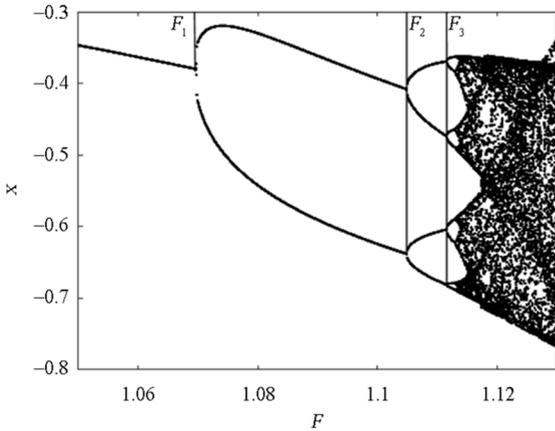


图 1 分岔图

Fig.1 The bifurcation diagram

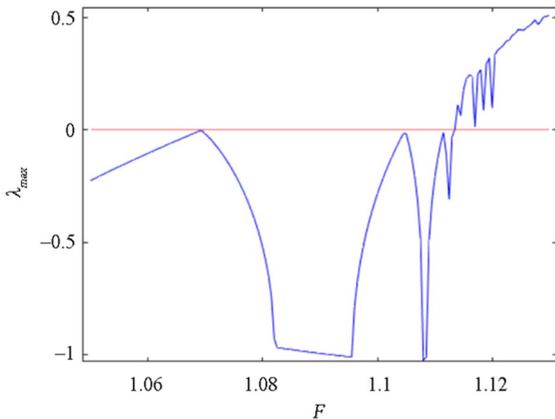


图 2 随 F 变化的最大李雅普诺夫指数

Fig.2 The maximum Lyapunov exponent with F

取波浪遭遇频率  $\Omega = 8$ , 以波倾角幅值  $F$  为分岔参数, 考虑  $D = 0$  情况下系统随参数  $F$  变化的分岔图, 如图 1 所示. 当  $F = F_1 = 1.0695$  时, 通过打靶法得到系统相应的 Floquet 乘子, 分别为  $\lambda_1(F_1) = -1.0$  和  $\lambda_2(F_1) = -0.237$ . 当参数  $F$  经过  $F_1$  时, 一个 Floquet 乘子通过  $-1$  离开单位圆, 且另一个

特征乘子的模小于 1, 系统发生周期倍化分岔, 原先的周期 1 吸引子演变为周期 2 吸引子. 当  $F = F_2 = 1.1049$ , 系统相应的 Floquet 乘子分别为  $\lambda_1(F_2) = -1$  和  $\lambda_2(F_2) = -0.038$ , 当参数  $F$  经过  $F_2$  时, 系统发生第二次周期倍化分岔, 周期 2 吸引子演变为周期 4 吸引子. 当  $F = F_3 = 1.1116$ , 系统相应的 Floquet 乘子分别为  $\lambda_1(F_3) = -1$  和  $\lambda_2(F_3) = -0.00135$ , 系统发生第三次周期倍化, 周期 4 吸引子演变为周期 8 吸引子. 当  $F \in [1.1133, 1.13]$  时, 系统处于混沌状态, 其最大李雅普诺夫指数为正. 系统最大李雅普诺夫指数随参数  $F$  变化如图 2 所示. 由图 2 可以看出, 在周期倍化分岔的分岔点, 最大李雅普诺夫指数会发生突变, 逼近零的位置, 但仍然保持为负数. 在周期轨道窗口, 混沌鞍(非吸引的混沌不变集)与周期吸引子共存, 相轨线通常会沿着混沌鞍的稳定流形向混沌鞍运动, 并在混沌鞍附近停留有限时间, 之后沿着混沌鞍的不稳定流形向周期吸引子靠近. 于是当外界没有噪声扰动作用时, 在这些临界点上, 虽然存在着暂态混沌的现象, 但最后的吸引子仍然是周期吸引子<sup>[14]</sup>.

当外界的噪声作用不够强时, 不足以使周期吸引子的轨线扰动到混沌鞍的稳定流形上, 这时吸引子仍然是一个近似的周期吸引子. 只有当噪声幅值  $D$  超过临界值  $D_m$  时, 原周期吸引子的相轨线才有可能被扰动到混沌鞍的稳定流形上, 并在之后趋于混沌鞍.

### 4 噪声扰动下吸引子的演变

分别以  $F = 1.095, F = 1.109, F = 1.112$  为例, 研究噪声作用下不同周期吸引子的演变情况. 当  $D = 0, F = 1.095$  时, 系统处于周期 2 吸引子状态, 如图 3(a) 所示. 当噪声强度  $D = 0.0040$  时, 吸引子失去光滑性并开始相互融合, 如图 3(b) 所示. 当  $D = 0.025$  时, 原周期 2 吸引子完全失去光滑性并融合到一起, 如图 3(c) 所示; 当  $D = 0, F = 1.109$  时, 系统处于周期 4 吸引子状态, 如图 4(a) 所示. 当噪声强度  $D$  增加到 0.0019 时, 吸引子局部融合在一起, 如图 4(b) 所示. 当  $D = 0.0095$  时, 吸引子完全融合在一起, 如图 4(c) 所示; 当  $D = 0, F = 1.112$  时, 系统处于周期 8 吸引子状态, 如图 5(a) 所示. 当噪声强度增加到 0.0002 时, 吸引子局部融合在一起, 如图 5(b) 所示. 当  $D = 0.0029$  时, 吸引子完全融合在一起, 如图 5(c) 所示.

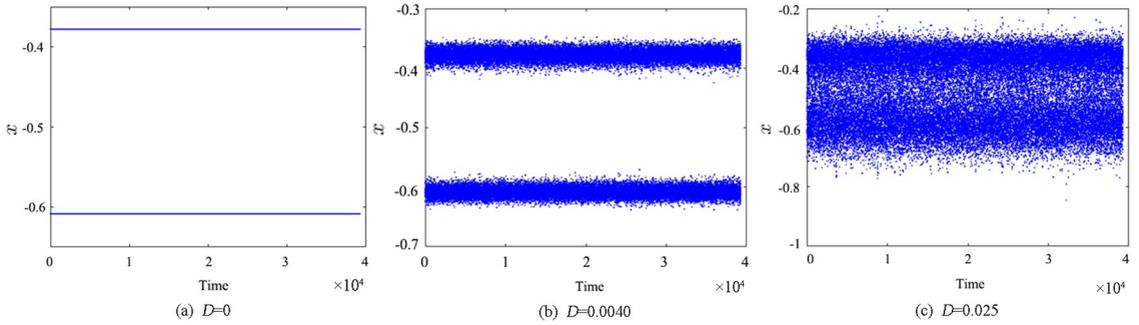


图3  $F=1.095$  时相平面  $(T, x)$  上的相图

Fig.3 The phase diagram in the  $(T, x)$  plane with  $F=1.095$

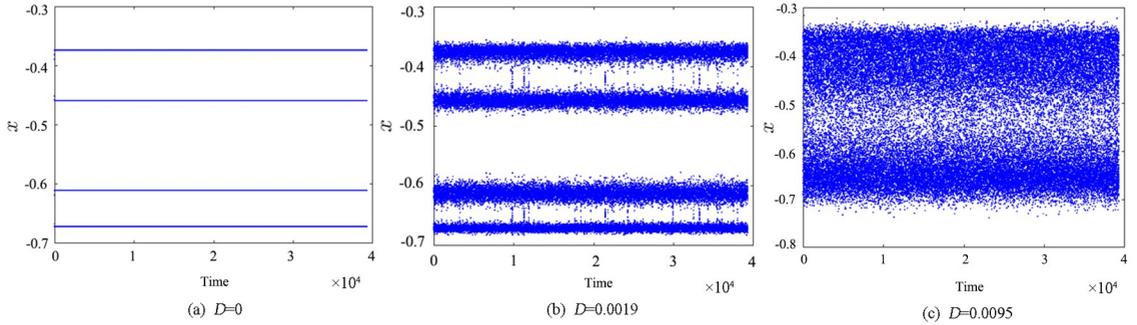


图4  $F=1.109$  时相平面  $(T, x)$  上的相图

Fig.4 The phase diagram in the  $(T, x)$  plane with  $F=1.109$

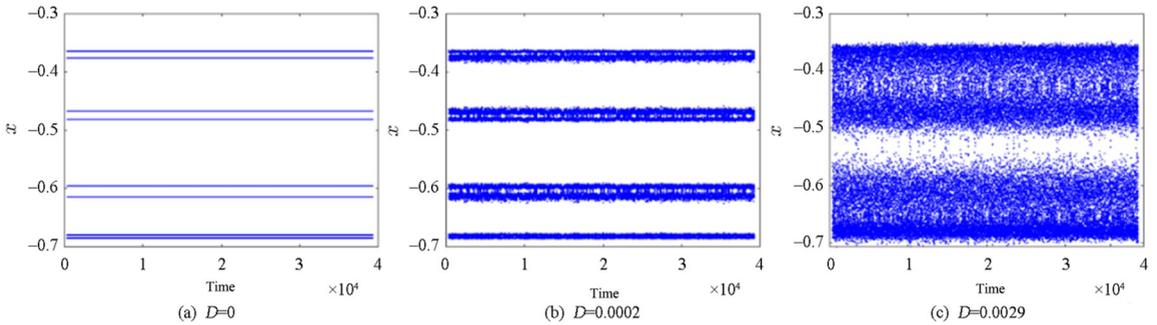


图5  $F=1.112$  时相平面  $(T, x)$  上的相图

Fig.5 The phase diagram in the  $(T, x)$  plane with  $F=1.112$

## 5 噪声扰动下的奇异非混沌动力学

### 5.1 噪声作用下不同周期窗口的奇异非混沌吸引子

由于在噪声作用下,用相空间内单一的相轨线无法充分展示其分形结构,本文通过取时间庞加莱截面  $t_n = \frac{2n\pi}{\omega}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ),记录一簇初始点在庞加莱截面上的位置来刻画吸引子几何上的奇异性.当  $F=1.095, D=0.025$  时,原系统的周期2吸引子在噪声作用下失稳演变成奇异非混沌吸引子,如图6(a)所示,该吸引子具有分形结构,其最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max} = -0.38$ ,如图6(b)所示.当  $F=1.109, D=0.0095$  时,原周期4吸引子在噪声作用

下演变成奇异非混沌吸引子,如图7(a)所示,其最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max} = -0.048$ ,如图7(b)所示.当  $F=1.112, D=0.0029$  时,原周期8吸引子同样演变成奇异非混沌吸引子,如图8(a)所示,其最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{\max} = -0.006$ ,如图8(b)所示.

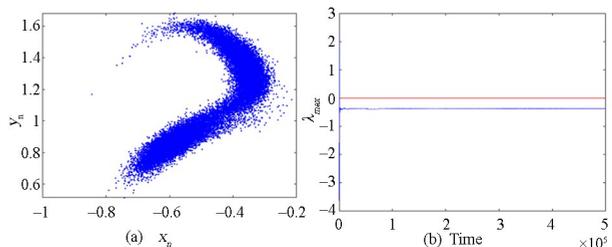


图6 当  $F=1.095, D=0.025$  时, (a) 在平面  $(x_n, y_n)$  上的相图; (b) 最大李雅普诺夫指数图

Fig.6 For  $F=1.095, D=0.025$ , (a) The phase diagram in the  $(x_n, y_n)$  plane; (b) The maximum Lyapunov exponent

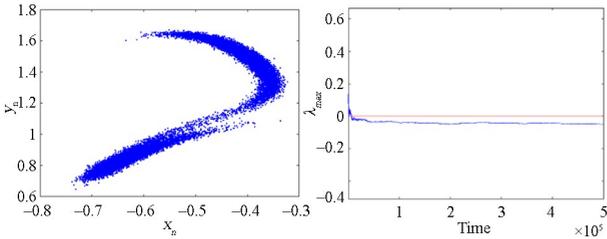


图 7 当  $F=1.109, D=0.0095$  时, (a) 在平面  $(x_n, y_n)$  上的相图; (b) 最大李雅普诺夫指数图  
Fig.7 For  $F=1.109, D=0.0095$ , (a) The phase diagram in the  $(x_n, y_n)$  plane; (b) The maximum Lyapunov exponent

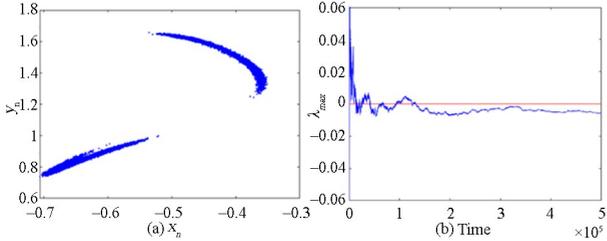


图 8 当  $F=1.112, D=0.0029$  时, (a) 在平面  $(x_n, y_n)$  上的相图; (b) 最大李雅普诺夫指数图  
Fig.8 For  $F=1.112, D=0.0029$ , (a) The phase diagram in the  $(x_n, y_n)$  plane; (b) The maximum Lyapunov exponent

### 5.2 奇异性刻画

以下主要通过奇异连续谱方法和  $X(\omega, T)$  在复平面上的分形图来验证吸引子的奇异性. 当  $F=1.095, D=0.025$  时, 吸引子是周期 2 吸引子, 系统的奇异连续谱如图 9(a) 所示, 此时标度因子  $k=1.4877$ , 处于 1 和 2 之间, 满足奇异非混沌存在的幂律比例.  $X(\omega, T)$  在复平面  $(\text{Re}X, \text{Im}X)$  上的路径图像如图 9(b) 所示, 可以看出其具有明显的分形结构, 进一步说明了吸引子的奇异性. 类似的, 当

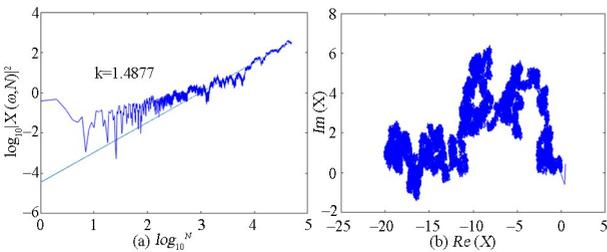


图 9 当  $F=1.095, D=0.025$  时, (a) 奇异连续谱; (b) 分形图  
Fig.9 For  $F=1.095, D=0.025$ , (a) the singular continuous spectrum; (b) the fractal structure of trajectories in the complex  $(\text{Re} X, \text{Im} X)$  plane

吸引子是周期 4 吸引子以及周期 8 吸引子时, 其奇异连续谱和分形图分别如图 10(a)(b)、图 11(a)(b) 所示. 标度因子  $k$  分别为 1.2753 和 1.5475, 均满足  $1 < k < 2$ , 并且二者各自的路径图都演示出明显的分形结构, 故此时的吸引子均为奇异非混沌吸

引子. 综上所述, 当系统的周期窗口离混沌区域的距离越远, 周期吸引子需要越大的噪声强度才可以诱导产生奇异非混沌吸引子.

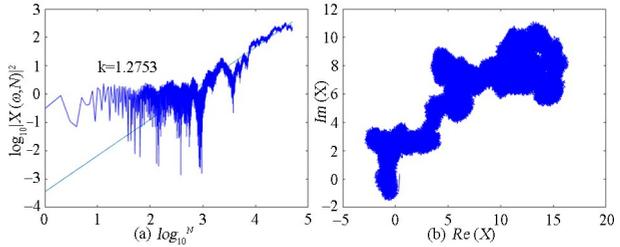


图 10 当  $F=1.109, D=0.0095$  时, (a) 奇异连续谱; (b) 分形图  
Fig.10 For  $F=1.109, D=0.0095$ , (a) the singular continuous spectrum; (b) the fractal structure of trajectories in the complex  $(\text{Re} X, \text{Im} X)$  plane

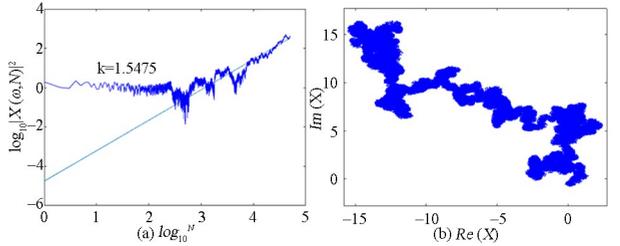


图 11 当  $F=1.112, D=0.0029$  时, (a) 奇异连续谱; (b) 分形图  
Fig.11 For  $F=1.112, D=0.0029$ , (a) the singular continuous spectrum; (b) the fractal structure of trajectories in the complex  $(\text{Re} X, \text{Im} X)$  plane

### 6 遭遇频率对系统响应的影响

分别取波浪遭遇频率  $\Omega=7.8$  以及  $\Omega=8.2$ , 考虑在无随机激励作用下系统随波倾角幅值的分岔行为, 如图 12(a)(b) 所示. 当  $\Omega=7.8$  时, 系统在  $F=1.0663$  发生第一次周期倍化, 同样通过打靶法可以求出此时的 Floquet 乘子, 分别为  $\lambda_1=-1.0$  和  $\lambda_2=-0.244$ . 当  $F=1.0956$  时, Floquet 乘子分别为  $\lambda_1=-1.0$  和  $\lambda_2=-0.041$ , 代表系统发生第二次周期倍化. 当  $F=1.1012$  时, Floquet 乘子分别为  $\lambda_1=-1.0$  和  $\lambda_2=-0.002$ , 系统发生第三次周期倍化, 此时吸引子为周期 8 吸引子. 对比波浪遭遇频率  $\Omega=8$  时发生三次周期倍化的波倾角幅值  $F_1=1.0695, F_2=1.1049, F_3=1.1116$ , 可以发现当波浪遭遇频率  $\Omega$  有所减小时, 发生周期倍化的分岔点均有所前移.

当  $\Omega$  时, 系统在  $F=1.0737$  发生第一次周期倍化, 此时的 Floquet 乘子分别为  $\lambda_1=-1.0$  和  $\lambda_2=-0.229$ . 当  $F=1.1153$  时, 系统发生第二次周期倍化, Floquet 乘子分别为  $\lambda_1=-1.0$  和  $\lambda_2=-0.034$ . 当  $F=1.1233$  时, Floquet 乘子分别为  $\lambda_1=-$

1.0 和  $\lambda_2 = -0.001$ , 系统发生第三次周期倍化, 此时吸引子演变为周期 8 吸引子. 对比波浪遭遇频率  $\Omega = 8$  时发生三次周期倍化的波倾角幅值, 可以发现当波浪遭遇频率  $\Omega$  有所增大时, 发生周期倍化的分岔点均有所后移.

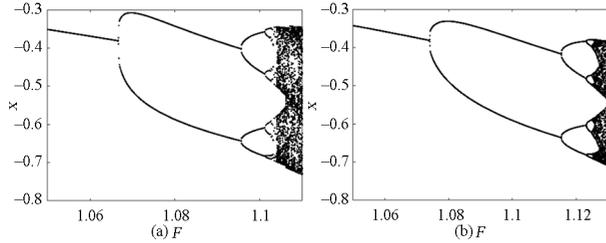


图 12 分岔图 (a)  $\Omega = 7.8$ ; (b)  $\Omega = 8.2$

Fig.12 The bifurcation diagram (a)  $\Omega = 7.8$ ; (b)  $\Omega = 8.2$

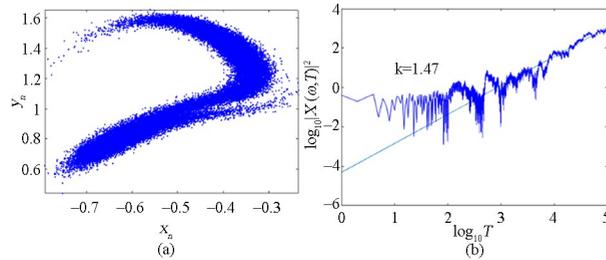


图 13 当  $\Omega = 7.8, D = 0.0185$  时, (a) 在平面  $(x_n, y_n)$  上的相图 (b) 奇异连续谱

Fig.13 For  $\Omega = 7.8, D = 0.0185$ , (a) The phase diagram in the  $(x_n, y_n)$  plane; (b) The singular continuous spectrum

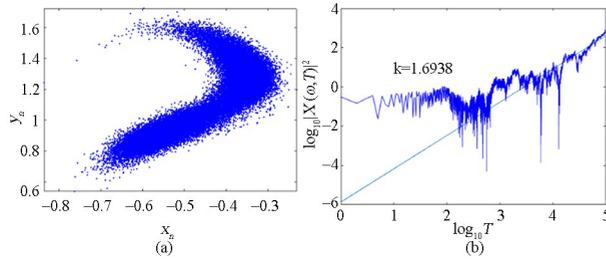


图 14 当  $\Omega = 8.2, D = 0.0275$  时, (a) 在平面  $(x_n, y_n)$  上的相图 (b) 奇异连续谱

Fig.14 For  $\Omega = 8.2, D = 0.0275$ , (a) The phase diagram in the  $(x_n, y_n)$  plane; (b) The singular continuous spectrum

固定参数  $F = 1.095$ , 此时系统均为周期 2 吸引子. 当  $\Omega = 7.8, D = 0.0185$  时, 周期 2 吸引子演变为奇异非混沌吸引子, 此时最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{max} = -0.0446$ , 标度因子  $k = 1.47$ , 与  $\Omega = 8$  时产生奇异非混沌吸引子所需要的随机激励幅值相比有所降低. 当  $\Omega = 8.2, D = 0.0275$  时, 周期 2 吸引子同样演变为奇异非混沌吸引子, 此时最大李雅普诺夫指数  $\lambda_{max} = -0.33$ , 标度因子  $k = 1.6938$ , 与  $\Omega = 8$  时产生奇异非混沌吸引子所需要的随机激励幅值相比有所增大.

## 7 结论

本文以一类单自由度船舶横摇系统作为研究对象, 考虑其在简谐激励和随机激励共同作用下不同周期窗口的动力学特性. 运用最大李雅普诺夫指数、奇异连续谱、分形图等工具, 揭示了船舶横摇系统中不同周期窗口所存在的奇异非混沌现象, 研究结果如下:

1) 除了拟周期激励下的动力系统会产生奇异非混沌现象外, 受周期激励的动力系统在噪声作用下也存在奇异非混沌现象.

2) 在周期倍化通往混沌的过程中, 周期吸引子在噪声作用下会演变成奇异非混沌吸引子, 状态变量在庞加莱截面上的轨迹具有明显的分形结构. 随着噪声幅值的不断增大, 周期吸引子开始融合, 首先演变成奇异非混沌吸引子, 当幅值超过临界值时, 吸引子最终变成混沌吸引子.

3) 在离混沌吸引子越远的周期窗口需要越大的噪声强度才可以诱导产生奇异非混沌吸引子.

本文的研究方法和结论可以为光滑连续动力系统中的奇异非混沌动力学理论提供思路, 同时在工程上也可对船舶的设计和 optimization 提供一定的理论支持.

## 参考文献

- [1] 李积德. 船舶耐波性 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨船舶工程学院出版社, 1992.
- [2] NAYFEH A H, KHDEIR A A. Nonlinear rolling of ships in regular beam seas [J]. International Shipbuilding Progress, 1986, 33(379): 40-49.
- [3] 赵文浩, 张文, 李高磊, 等. 船舶横摇系统的多稳态动力学及其控制 [J]. 振动与冲击, 2022, 41(18): 192-196+204.  
ZHAO W H, ZHANG W, LI G L, et al. Multistable dynamics and control of the ship's rolling system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(18): 192-196+204. (in Chinese)
- [4] 袁远, 余音, 金咸定. 船舶在规则横浪中的奇异倾覆 [J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(7): 995-998.  
YUAN Y, YU Y, JIN X D. Undesirable ship capsizing in regular beam sea [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2003, 37(7): 995-998. (in

- Chinese)
- [5] 刘利琴, 唐友刚, 吴志强. 横浪中船舶的随机混沌运动 [J]. 工程力学, 2008, 25(6): 204–208.  
LIU L Q, TANG Y G, WU Z Q. Stochastic chaotic motion of ships in beam seas [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(6): 204–208.(in Chinese)
- [6] 胡开业, 丁勇, 王宏伟, 等. 船舶在随机横浪中的全局稳定性 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2011, 32(6): 719–723.  
HU K Y, DING Y, WANG H W, et al. Global stability of ship motion in stochastic beam seas [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2011, 32(6): 719–723.(in Chinese)
- [7] DELEANU D, DUMITRACHE C L. The nonlinear ship rolling and safe basin erosion in stochastic beam seas [J]. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2021, 1182(1): 012016.
- [8] LIU Y C, HAN F L, LU Y. Stability and capsizing analysis of nonlinear ship rolling in wind and stochastic beam seas [J]. Applied Ocean Research, 2016, 57: 52–63.
- [9] 沈云柱. 非光滑系统奇异非混沌动力学研究 [D]. 济南: 济南大学, 2020.  
SHEN Y Z. Strange nonchaotic dynamics in nonsmooth systems [D]. Jinan: University of Jinan, 2020. (in Chinese)
- [10] GREBOGI C, OTT E, PELIKAN S, et al. Strange attractors that are not chaotic [J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 1984, 13(1–2): 261–268.
- [11] DING M, GREBOGI C, OTT E. Evolution of attractors in quasiperiodically forced systems: from quasiperiodic to strange nonchaotic to chaotic [J]. Physical Review A, 1989, 39(5): 2593–2598.
- [12] LINDNER J F, KOHAR V, KIA B, et al. Strange nonchaotic stars [J]. Physical Review Letters, 2015, 114(5): 054101.
- [13] KHOVANOV I A, KHOVANOVA N A, MC-CLINTOCK P V E, et al. The effect of noise on strange nonchaotic attractors [J]. Physics Letters A, 2000, 268(4–6): 315–322.
- [14] WANG X G, ZHAN M, LAI C H, et al. Strange nonchaotic attractors in random dynamical systems [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(7): 074102.
- [15] SATHISH ARAVINDH M, VENKATESAN A, LAKSHMANAN M. Route to logical strange nonchaotic attractors with single periodic force and noise [J]. Chaos, 2020, 30(9): 093137.
- [16] 曾青, 乐源, 李高磊. 一类分段非线性轧机辊系系统的奇异非混沌动力学研究 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(3): 1–7.  
ZENG Q, LE Yuan, LI G L. Research on strange nonchaotic dynamics of piecewise nonlinear rolling mill system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 1–7.(in Chinese)
- [17] LI G L, YUE Y, GREBOGI C, et al. Strange nonchaotic attractors in a periodically forced piecewise linear system with noise [J]. Fractals, 2022, 30(1): 2250003.
- [18] BIKDASH M, BALACHANDRAN B, NAVFEH A. Melnikov analysis for a ship with a general roll-damping model [J]. Nonlinear Dynamics, 1994, 6(1): 101–124
- [19] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. Physica D Nonlinear Phenomena, 1985, 16(3): 285–317.
- [20] HOF A, KNILL O, SIMON B. Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators [J]. Communications in Mathematical Physics, 1995, 174(1): 149–159.
- [21] WRIGHT J H G, MARSHFIELD W B. Ship roll response and capsize behaviour in beam seas [J]. Transaction, Royal Institute of Naval Architects, 1980, Vol. 122, 129.