

大展弦比板弯扭耦合受迫振动分析*

王卓 毛晓晔[†] 丁虎 陈立群

(上海大学 力学与工程科学学院 上海力学信息学前沿科学中心, 上海 200444)

摘要 对于工程广泛存在的大展弦比结构,首次研究了大展弦比板弯扭耦合受迫振动响应.考虑弦向相对弯曲刚度远大于展向弯曲刚度,将弦向截面等效为刚体,考虑其绕展向轴线的扭转,应用 Hamilton 原理分别计算大展弦比板的势能与动能,建立两端简支的大展弦比板弯扭耦合受迫振动的动力学控制方程.将动力学控制方程进行 Galerkin 截断后,通过谐波平衡法和微分求积法/微分求积单元法,计算得到了大展弦比模型弯扭耦合受迫振动稳态响应的解析解及数值解,同时验证了解的截断收敛性及谐波收敛性.最后研究了外激励幅值对结构受迫振动响应的影响.结果将为工程中广泛存在的大展弦比结构设计提供指导.

关键词 大展弦比板, 弯扭耦合振动, 受迫振动, 谐波平衡法

中图分类号:O322

文献标志码:A

Analysis of Flexural Coupled Forced Vibration of High-Aspect Ratio Plate*

Wang Zhuo Mao Xiaoye[†] Ding Hu Chen Liqun

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai Frontier Science Center of Mechanoinformatics,
Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract For extensively existed high-aspect ratio structures in engineering, the bending-torsional-coupled vibration of the high-aspect ratio plate is studied for the first time. As the relative stiffness along the chordwise direction is far bigger than that of the spanwise, the chordwise section is simplified as a rigid body, while that in the spanwise direction is flexible. The Hamilton's principle is applied to establish the governing equation of the bending-torsional-coupled vibration of the high-aspect ratio plate with simple supports at both ends. After projecting the governing equation into modal space via Galerkin method, the analytical results and numerical solutions of the bending-torsional-coupled vibration are obtained by the harmonic balance method and DQEM/DQM respectively. The convergence of the modal projection and the harmonic expansion are also verified. Finally, the influence of the external excitation on the forced vibration is studied. The results provide guidance for the design of high-aspect ratio structures in engineering.

Key words high-aspect ratio plate, bending-torsional-coupled vibration, forced vibration, harmonic balance method

2023-01-11 收到第 1 稿, 2023-02-01 收到修改稿.

* 国家自然科学基金青年基金项目(12002195), 国家自然科学基金杰出青年基金(12025204), 上海市教育委员会科技创新计划项目(2019-01-07-00-09-E00018), 上海市科学技术委员会浦江人才计划(A类)(20PJ1404000), National Natural Science Foundation of China (12002195), National Science Fund for Distinguished Young Scholars (12025204), Program for Shanghai Municipal Education Commission (No. 2019-01-07-00-09-E00018), and Pujiang Project of Shanghai Science and Technology Commission (20PJ1404000).

[†] 通信作者 E-mail: xmao3@shu.edu.cn

引言

大展弦比板是工程中的重要结构之一,无论是大展弦比机翼、大跨度桥梁、发动机的叶片等都可以简化为大展弦比板结构进行分析研究,因此对大展弦比板结构进行分析具有重要意义。

随着大展弦比机翼的广泛应用,结构非线性带来的振动问题越来越多^[1].Dunn等研究了矩形悬臂机翼在不同弯扭刚度耦合下的非线性、失速、气动弹性行为并利用傅里叶分析进行非线性颤振计算^[2].Xie等发现结构大变形引起的几何非线性会导致机翼弦向弯曲和扭转耦合运动,从而改变频率和振型^[3].Minguet等对结构耦合复合材料叶片的动力学特性进行了分析和实验研究,结果表明静态挠度对叶片扭转和纵向模态和频率有显著影响^[4].已经有许多学者采用有限元软件模拟和实验分析的方法对大展弦比结构的振动特性进行了分析。

2012年,Shams等基于非线性 Euler-Bernoulli 梁行对大展弦比柔性机翼的气动弹性响应进行了预测^[5].2014年,Mian对大展弦比的线性和非线性弯曲变形及扭转角进行了分析^[6].2019年,Trahair等基于简支梁均匀非弹性屈曲研究了悬臂钢梁的非弹性侧向屈曲^[7].2019年,Pezeshky等研究了腹板变形对悬臂梁横向扭转去屈曲强度的影响,量化了不同横向支撑方案对弹性横向扭转屈曲强度的影响^[8].2020年,刘燕等对可伸缩复合材料梁的时变非线性振动进行理论研究,分析了可伸缩悬臂复合材料层合梁在外伸与收缩变形过程中的非线性动力学特性^[9].2014年,杨智春等发现几何非线性会使扭转固有频率明显下降^[10].2021年,田少杰等采用模态叠加法分析了气流激励下叶片的振动响应^[11].2021年,张立等研究了主梁偏置角度对弯扭耦合叶片力学性能的影响^[12].2022年,朱成秀等通过虚功原理建立轴向运动板的有限元方程,给出了板厚与系统复频率的关系,揭示了板厚对轴向运动三阶剪切变形板稳定性的影响^[13].2012年,Zhang等研究了层合板在四边简支及不同荷载激励作用下层合板的非线性动力学振动^[14].2022年,韩勤偕等开展了变速旋转圆柱薄壳动力稳定性研究,分别探讨仅考虑周期轴向力、仅考虑变转速以及同时考虑两种时变因素时,系统主参数不稳定区和组合不稳定的变化规律^[15].2013年,Zhang等考虑了板的

面内激励、横向振动及弯矩激励共同作用下板的非线性动力学响应^[16].2011年,Yang研究了四边简支层合板的展向振动及稳定性^[17].2011年,Tang等研究了有无内共振时平板的横向非线性自由振动^[18].2020~2022年郭翔鹰等研究了不同横向激励、不同材料参数对 FGM 板动力学特性的影响^[19-22].2021年,Shams等研究了含各向异性复合梁的大展弦比机翼在不可压缩流体中的气动弹性失稳问题,研究表明弯曲-扭转耦合刚度对减小或增大机翼的非线性失稳速度有显著影响^[23].这些工作研究了大展弦比结构弯曲或扭转变形时的振动特性和非线性响应,但是对于大展弦比结构耦合变形仍然缺乏相关的研究。

2000年,Hashemi等提出了弯扭耦合梁自由振动分析的动力有限元公式^[24].2022年,孔嘉翔等基于变分原理建立了柔性帆板的刚柔耦合模型^[25].2021年,张婷等研究了具有实际背景的弯曲和扭转联合作用下梁方程组在非线性边界条件下的吸引子^[26].2020年,杨兴等利用 Lagrange 方法推导了 FGM 厚板的刚柔耦合动力学方程,研究了 FGM 厚板的横向变形、速度响应频率和固有频率^[27].2011年,Hashemi等将动力有限元技术应用于组合梁的拉伸-扭转自由振动分析,评估了系统的固有频率和模态^[28].2016年,Carr运用能量法求出了两端固定和一边固定一边简支梁的近似频率方程,对开截面均匀薄壁梁的纯扭转振动进行了分析^[29].2017年,郭兵等给出了能够模拟复杂变形并满足边界条件的水平弯曲和扭转变形函数并给出了任意荷载作用下梁的弯矩表达式^[30].2009年,Zhang等发现几何非线性会加剧弦向弯曲和扭转刚度的耦合^[31].2014年,任智毅给出了水平弯曲频率和扭转频率发生模态交换的存在条件^[32].2014年,刘占科等研究了不同类型的荷载组合作用下简支梁的弹性屈曲-扭转屈曲^[33].2015年,Eken等研究了薄壁组合梁的弯扭耦合振动,发现固有频率会随着展弦比和厚度比的增大而增大^[34].2022年,Wu等基于 Timoshenko 梁理论对旋转叶片的轴向弯曲耦合机理进行研究,结果表明,叶片轴向响应对裂纹引起的非线性比弯曲响应更加敏感^[35].然而,以上大部分研究都基于有限元仿真或者实验研究结果,分析了几何形状和边界条件对大展弦比结构固有特性的影响,而且通常采用实验的手段得到系统

的非线性响应,所以目前仍然缺乏相关的理论分析。

基于以上调研,本文将重点研究大展弦比板弯扭耦合受迫振动。第一节利用 Hamilton 原理建立两端简支的大展弦比模型。第二节运用 Galerkin 法对控制方程进行截断,得到一系列常微分方程,介绍了用于数值求解的 DQEM 和 DQM 法。第三节分析了谐波平衡法的截断收敛性和谐波收敛性,之后将数值与解析结果进行比较,验证了所求响应的正确性,最后得到了不同外激励下系统的幅频特性曲线,分析了外激励对系统受迫振动响应的影响。最后第四节得到结论。

1 力学模型与控制方程

如图 1 所示,大展弦比板的长度为 L ,宽度为 b ,两端为简支端约束,其展向位移为 $w(x,t)$,绕中轴线的转为 $\varphi(x,t)$, ρ 为大展弦比板的质量密度, A 为横截面面积, h 为截面高度, E 为弹性模量, I_b 是梁关于中心轴的横截面惯性矩, I_t 是大展弦比板关于中心轴的横截面极惯性矩, ν 为泊松比, G 为剪切模量,外激励线性分布在大展弦比板的一侧边缘,其幅值大小为 F 。

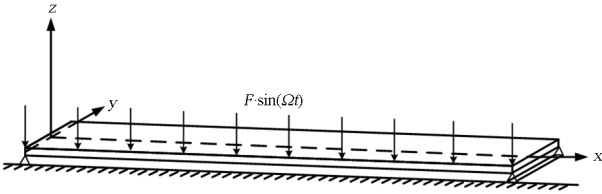


图 1 两端简支大展弦比板模型

Fig.1 The high aspect ratio plate model with simple support at both ends

$$\begin{aligned}
 dU_N &= \frac{1}{2}E \left\{ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{2}w_{,x}^2 + (y \sin\varphi + z \cos\varphi)w_{,xx} \right]^2 dy dz \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2}E \left\{ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{1}{4}w_{,x}^4 + (y \sin\varphi + z \cos\varphi)w_{,xx}w_{,x}^2 \right] dy dz \right\} dx + \frac{1}{2}E \left\{ \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} [(y \sin\varphi + z \cos\varphi)^2 w_{,xx}^2] dy dz \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2}EA \left(\frac{1}{4}w_{,x}^4 \right) dx + \frac{1}{2}EA \left(\frac{1}{12}b^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{12}h^2 \cos^2\varphi \right) w_{,xx}^2 dx \\
 &= \frac{1}{2}EA \left(\frac{1}{4}w_{,x}^4 \right) dx + \frac{1}{2}EA \left[\frac{1}{12}b^2\varphi^2 + \frac{1}{12}h^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] w_{,xx}^2 dx
 \end{aligned} \quad (6)$$

因此系统的总势能为:

$$U = \int_0^L \frac{1}{2}EA \left[\frac{1}{12}b^2\varphi^2 + \frac{1}{12}h^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] w_{,xx}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2}GI_p\varphi_{,x}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2}EA \left(\frac{1}{4}w_{,x}^4 \right) dx \quad (7)$$

据 Hamilton 变分原理:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt = 0 \quad (8)$$

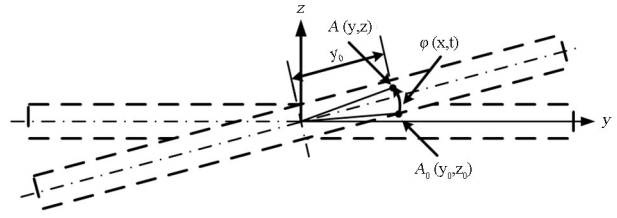


图 2 大展弦比板弯扭耦合变形图

Fig.2 The flexural and torsional coupling deformation diagram of high aspect ratio plate

取大展弦比板微元 dV 为研究对象,其任意时刻具有的动能为:

$$\begin{aligned}
 dT &= \frac{1}{2}\rho \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (w_{,t}^2 + y^2\varphi_{,t}^2) dy dz dx \\
 &= \frac{1}{2}\rho h \left(bw_{,t}^2 + \frac{b^3}{12}\varphi_{,t}^2 \right) dx \\
 &= \frac{1}{2}\rho A \left(w_{,t}^2 + \frac{b^2}{12}\varphi_{,t}^2 \right) dx
 \end{aligned} \quad (1)$$

该微元任意时刻具有的势能将由两部分组成:轴向拉压势能以及绕轴向的剪切势能。

首先计算轴向拉压势能,微元在未受到扰动时,其单位弧长为 dx ,变形之后,其单位弧长变为:

$$dS_1 = \sqrt{dx^2 + (w_{,x}dx)^2} \quad (2)$$

在受到弯曲扰动后,微元在轴向上的应变为:

$$\epsilon_w = \frac{dS_1 - dx}{dx} = \frac{1}{2}w_{,x}^2 dx \quad (3)$$

在受到弦向扭转扰动后,微元的应变为:

$$\epsilon_\varphi = (y \sin\varphi + z \cos\varphi) w_{,xx} \quad (4)$$

至此可以得到微元在轴向上的应变为:

$$\epsilon(x) = \frac{1}{2}w_{,x}^2 + (y \sin\varphi + z \cos\varphi) w_{,xx} \quad (5)$$

因此该大展弦比板的拉压势能为

式中 Q 为外力功, 变分后, 得到:

$$\begin{aligned} & \rho A \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \omega_{,t} \delta \omega_{,t} dt dx + \frac{1}{12} \rho A b^2 \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \varphi_{,t} \delta \varphi_{,t} dt dx + EA \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{1}{12} b^2 \varphi + \frac{1}{24} h^2 \varphi \right) \omega_{,xx}^2 \delta \varphi dt dx + \\ & EA \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} - \left[\frac{1}{12} b^2 \varphi^2 + \frac{1}{12} h^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) \right] \omega_{,xxx} \delta \omega_{,xxx} dt dx + GI_p \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} - \varphi_{,x} \delta \varphi_{,x} dt dx + EA \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} - \\ & \frac{1}{2} \omega_{,x}^3 \delta \omega_{,x} dt dx - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} F \sin(\Omega t) \delta \omega dt dx - \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} F \frac{b}{2} \sin(\Omega t) \delta \varphi dt dx = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

采用 Kelvin 黏弹性本构关系模型, Λ 为黏性阻尼.

$$E = E + \Lambda \frac{d}{dt} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)后并对其进行分部积分后, 可以得到大展弦比板的控制方程为:

$$\begin{aligned} & -\rho A \omega_{,tt} - EI_b \omega_{,xxxx} + \Lambda I_b \omega_{,xxxx} - EA \left[\left(\frac{1}{3} b^2 \varphi \varphi_{,x} - \frac{1}{6} h^2 \varphi \varphi_{,x} \right) \omega_{,xxx} \right] + EA \left[\frac{3}{2} \omega_{,x}^2 \omega_{,xxx} - \left(\frac{1}{12} b^2 \varphi^2 - \frac{1}{24} h^2 \varphi^2 \right) \omega_{,xxxx} \right] - \\ & F \sin(\Omega t) + EA \left\{ - \left[\frac{1}{6} b^2 (\varphi_{,xx}^2 + \varphi \varphi_{,xxx}) - \frac{1}{12} h^2 (\varphi_{,xx}^2 + \varphi \varphi_{,xxx}) \right] \omega_{,xxx} \right\} + \Lambda A \left(\frac{3}{2} \omega_{,x}^2 \omega_{,xxx} + 3 \omega_{,x} \omega_{,xt} \omega_{,xx} \right) - \\ & \Lambda A \left(\frac{1}{6} b^2 \varphi \varphi_{,t} - \frac{1}{12} h^2 \varphi \varphi_{,t} \right) \omega_{,xxx} - \Lambda A \left\{ \left[\frac{1}{6} b^2 (\varphi_{,xx}^2 + \varphi \varphi_{,xxx}) - \frac{1}{12} h^2 (\varphi_{,xx}^2 + \varphi \varphi_{,xxx}) \right] \omega_{,xxx} \right\} - \\ & \Lambda A \left[\frac{1}{3} b^2 (\varphi_{,t} \varphi_{,xx} + \varphi \varphi_{,xt}) - \frac{1}{6} h^2 (\varphi_{,t} \varphi_{,xx} + \varphi \varphi_{,xt}) \right] \omega_{,xxx} - \Lambda A \left[\frac{1}{6} b^2 (2 \varphi_{,x} \varphi_{,xt} + \varphi \varphi_{,xxt} + \varphi_{,t} \varphi_{,xx}) \omega_{,xx} \right] - \\ & \Lambda A \left[-\frac{1}{12} h^2 (2 \varphi_{,x} \varphi_{,xt} + \varphi \varphi_{,xxt} + \varphi_{,t} \varphi_{,xx}) \omega_{,xx} \right] - \Lambda A \left(\frac{1}{12} b^2 \varphi^2 - \frac{1}{24} h^2 \varphi^2 \right) \omega_{,xxxx} - \Lambda A \left(\frac{1}{3} b^2 \varphi \varphi_{,x} - \frac{1}{6} h^2 \varphi \varphi_{,x} \right) \omega_{,xxxx} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{12} \rho A b^2 \varphi_{,tt} + GI_p \varphi_{,xx} + \frac{\Lambda}{2(1+\nu)} I_p \varphi_{,xxt} + EA \left(-\frac{1}{12} b^2 \varphi + \frac{1}{24} h^2 \varphi \right) \omega_{,xx}^2 - F \frac{b}{2} \sin(\Omega t) + \\ & \Lambda A \left(-\frac{1}{12} b^2 \varphi_{,t} + \frac{1}{24} h^2 \varphi_{,t} \right) \omega_{,xx}^2 + \Lambda A \left(-\frac{1}{6} b^2 \varphi + \frac{1}{12} h^2 \varphi \right) \omega_{,xx} \omega_{,xxt} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

相应的边界条件为:

$$\begin{aligned} & \omega(0, t) = 0; \omega(L, t) = 0; \\ & \varphi(0, t) = 0; \varphi(L, t) = 0; \\ & -EI_b \omega_{,xxxx}(0, t) - \rho A \omega_{,tt}(0, t) = 0; \\ & -EI_b \omega_{,xxxx}(L, t) - \rho A \omega_{,tt}(L, t) = 0; \quad (13) \\ & -\frac{1}{12} \rho A b^2 \varphi_{,tt}(0, t) + GI_p \varphi_{,xx}(0, t) = 0; \\ & -\frac{1}{12} \rho A b^2 \varphi_{,tt}(L, t) + GI_p \varphi_{,xx}(L, t) = 0 \end{aligned}$$

2 求解方法介绍

2.1 谐波平衡法过程

采用 n 阶 Galerkin 截断, 为了满足两端简支的边界条件, 取正弦函数为势函数, 仅保留前 n 阶, 将梁的横向位移和扭转位移用广义坐标的形式表示为:

$$\omega(x, t) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=1}^n Q_i(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

其中 $q_i(t)$, $Q_i(t)$ 为大展弦比板的广义位移, 模态函数 $\sin(i\pi x/L)$ 为特征函数. 权函数取特征函数本身, 将广义坐标形式的位移函数(14)和(15)代入两端简支大展弦比板的偏微分方程后, 得到含有响应 $q_i(t)$, $Q_i(t)$ 的方程 $H(x, t)$ 和 $G(x, t)$, 对方程 $H(x, t)$ 和 $G(x, t)$ 采用 n 阶积分截断, 将方程的两边同乘以权函数, 并在区间 $[0, L]$ 上积分后得到 n 个常微分方程, 其方程满足:

$$\int_0^L H(x, t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$\int_0^L G(x, t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

由此得到了关于 $q_i(t)$, $Q_i(t)$ 的 n 个常微分方程组:

$$l_1 \frac{d^2}{dt^2} q_i(t) + l_2 \frac{d}{dt} q_i(t) + l_3 q_i(t) + l_4 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

$$l_5 \frac{d^2}{dt^2} Q_i(t) + l_6 \frac{d}{dt} Q_i(t) + l_7 Q_i(t) + l_8 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (19)$$

其中 l_{1-8} 分别为对应系数, 经过简化之后可得.

对控制方程(11)和(12)的解式(14)和(15)中时间函数 $q_i(t)$ 和 $Q_i(t)$ 作出如下假设:

$$q_i(t) = a_{w,0} + \sum_{i=1}^N a_{w,i} \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^N b_{w,i} \cos(i\omega t)$$

$$Q_i(t) = a_{\varphi,0} + \sum_{i=1}^N a_{\varphi,i} \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^N b_{\varphi,i} \cos(i\omega t)$$

(20)

其中, ω 和 φ 为模态阶数, m 为谐波阶数.

将式(20)及其导函数代入经过伽辽金截断预处理后得到的 n 个常微分方程组(18)及方程组(19),可以得到以含 t 的各阶谐波为未知变量的 n 个代数方程组.由于 t 的任意性,代数方程中各谐波项的系数和常数项均为 0,所以需要提取代数方程组中 $(2m+1) \times n$ 项谐波系数,并使它们都等于 0,此时可以得到 $(2m+1) \times n$ 个非线性齐次方程组,记为:

$$F(a_{w,0}, a_{w,1}, b_{w,1}, \dots, a_{w,m}, b_{w,m}, \Omega) = 0 \quad (21)$$

$$F(a_{\varphi,0}, a_{\varphi,1}, b_{\varphi,1}, \dots, a_{\varphi,m}, b_{\varphi,m}, \Omega) = 0 \quad (22)$$

通过方程组(21)和(22),可以得到式(20)中各系数与激励频率 Ω 的关系,由于方程组(21)和(22)很难用解析方法求解,而只用牛顿迭代数值方法求解会遇到转折点的奇异性问题.故此处采用伪弧长延伸法中的预报-修正进行数值求解,即用解曲线 $c(s)$ 的弧长来避免遇到转折点的奇异性问题.具体原理如下:

记 $y = (a_{w,0}, a_{w,1}, b_{w,1}, \dots, a_{w,m}, b_{w,m}, \Omega)$, $H = (2m+1) \times n$. 方程组的雅各比矩阵 \mathbf{Y} 可以表示为

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{H+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{H+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_H}{\partial y_1} & \frac{\partial F_H}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_H}{\partial y_{H+1}} \end{bmatrix}_{H \times (H+1)} \quad (23)$$

设 $\mathbf{J} = \{J_1, J_2, \dots, J_{H+1}\}^T$ 为方程组的解曲线 $c(s)$ 在该 $H+1$ 维空间中的切向量, \mathbf{J} 中元素的表达式为:

$$J_i = (-1)^{i+1} \det \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_{i-1}}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_{i+1}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y_{H+1}} \right]_{H \times H} \quad (24)$$

结合雅各比矩阵 \mathbf{Y} 和 \mathbf{J} 的表达式,易知

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (25)$$

式(25)说明 \mathbf{J} 确实是方程组(21)的解曲线 $c(s)$ 的切向量.定义该 $H+1$ 维空间中解曲线的弧

长微段满足几何关系,即

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{H+1} dy_i^2 \quad (26)$$

解曲线的单位切向量可以表示为:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|} \quad (27)$$

则伪弧长延伸法的预测过程可表示为:

$$d\mathbf{y} = \boldsymbol{\tau} ds \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (28)$$

对式(28),采用经典的欧拉法进行数值求解,有

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}_0) \Delta s \quad (29)$$

其中 \mathbf{y}_p 为预测解, \mathbf{y}_0 为初值, Δs 为给定的弧长增量.修正过程采用牛顿迭代法,其计算格式为:

$$\mathbf{y}_{c,0} = \mathbf{y}_p$$

$$\mathbf{y}_{c,i} = \mathbf{y}_{c,i-1} - \left[\mathbf{Y}(\mathbf{y}_{c,i-1}) \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{y}_{c,i-1}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2, \dots$ (30)

只要 $\mathbf{J}^T(\mathbf{y}_{c,0}) \neq 0$, 则 $\det \left[\mathbf{Y}(\mathbf{y}_{c,0}) \right] = \|\mathbf{J}^T(\mathbf{y}_{c,0})\|^2 > 0$,

$\left[\mathbf{Y}(\mathbf{y}_{c,0}) \right]^{-1}$ 存在.这也说明 \mathbf{y}_0 离解流形不远,就可以指望式(30)形成迭代序列 $\mathbf{y}_{c,i}$, 其能收敛到解流形上的一点 \mathbf{y}^* , 并满足 $\mathbf{F}(\mathbf{y}^*) = 0$.

在用伪弧长延伸法求解时可能会遇到以下情况:如果 $\|\mathbf{J}^T(\mathbf{y}_{c,0})\| \rightarrow 0$, 则预测过程的欧拉法失效,修正过程的牛顿迭代法也可能产生奇异点.如果, $\|\mathbf{J}^T(\mathbf{y}_{c,0})\| \rightarrow \infty$, 则预测过程的欧拉法中 $\mathbf{y}_p = \mathbf{y}_0$, 导致修正过程的牛顿迭代法又会回到前一时刻的解,这样会一直在该处循环,程序不能停止,也不能得到全频域上的解,故初值的选取及判定每一步迭代对应的 $\|\mathbf{J}\|$ 是否为很小值或很大值显得尤为重要.基于上述伪弧长法,解出谐波系数,进而得到平板弯扭耦合振动的位移响应.

2.2 直接数值仿真方法过程

由于微分求积法(DQM)可以严格满足两个边界条件,因此它适用于具有两个边值问题的连续体仿真,而微分求积单元法(DQEM)适用于具有四个边值问题的连续体仿真.由于式(11)是四阶微分方程,而式(12)是二阶微分方程,应该采用 DQEM 和 DQM 一起进行计算.

按照微分求积法,函数 $f(x, t)$ 在节点 x_i 处对变量 x 的偏导数可以表示为:

$$f_x^{(n)}(x_i, t) = \sum_{k=1}^n A_{ik}^{(n)} f(x_k, t) \quad (31)$$

式中,算子 \mathbf{A} 可以由以下显示表达式计算.

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_j - x_k)}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, N; j \neq i)$$

$$A_{ij}^{(n)} = n \left[A_{ii}^{(n-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(n-1)}}{x_i - x_j} \right]; \quad (n = 2, 3, \dots; j = 1, 2, \dots, N; j \neq i)$$

$$A_{ii}^{(n)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik}^{(n)}; \quad (n = 2, 3, \dots; i = 1, 2, \dots, N) \quad (32)$$

已有文献表明当节点采用非均匀分布时,计算结果精度及收敛性更高,因此本文采用 Chebyshev-Gauss-Lobatto 非均匀分布,即

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N-1} \right] L; i = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

DQM 过程将产生 $N-2$ 个内点动力学方程,联合两个边界条件,方程数目与节点数目匹配,系

$$\phi_j^{(k)}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_{N-j+1}} [l_j^{(k)}(x_i)(x_j - x_{N-j+1}) + kl_j^{(k-1)}(x_i)] - \left[l_j'(x_j) + \frac{1}{x_j - x_{N-j+1}} \right] \phi_j^{(k)}(x_i), & j = 1, N, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ \frac{1}{x_j - x_{N-j+1}} [l_j^{(k)}(x_i)(x_i - x_1)(x_i - x_N) + kl_j^{(k-1)}(x_i)(x_i - x_1) + (x_i - x_N) + k(k-1)l_j^{(k-2)}(x_i)], & j = 2, 3, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (37)$$

$l_j(x)$ 为拉格朗日插值函数,其表达式为

$$l_j(x) = \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (38)$$

$$l_j^{(1)}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{m=1, m \neq j}^N \frac{x_i - x_m}{x_j - x_m}, & i \neq j \\ \sum_{m=1, m \neq j}^N \frac{1}{x_i - x_m}; & i = j, (i = j = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (39)$$

$$l_j^{(k)}(x_i) = \begin{cases} k \left[l_j^{(1)}(x_i) l_i^{(k-1)}(x_i) - \frac{l_j^{(k-1)}}{x_i - x_j} \right], & i \neq j, \\ \sum_{m=1, m \neq j}^N l_j^{(1)}(x_m) l_m^{(k-1)}(x_j), & i = j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (40)$$

为了提高仿真精度及收敛性,几点分部依然选取 Chebyshev-Gauss-Lobatto 非均匀分布,即式(33).

3 受迫振动响应算例分析

采用表 1 的参数进行计算,系统的初始激励幅

统可以求解.

微分方程 $w(x, t)$ 的解函数可以用 DQEM 表示为

$$w(x, t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(x) w(x_j) + \psi_1(x) w^{(1)}(x_1) + \psi_N(x) w^{(1)}(x_N) \quad (34)$$

其中 N 为节点数, $\varphi_j(x)$ 和 $w(x_j)$ 分别代表插值函数和 j 点的位移解, $w^{(1)}(x_1)$ 和 $w^{(1)}(x_N)$ 表示两个新引入的变量,表示边界处的旋转角度.节点 x_i 处的 k 阶导数可以如下表示

$$w^{(k)}(x_i) = \sum_{j=1}^N \varphi_j^{(k)}(x_i) w(x_j) + \psi_1^{(k)}(x_i) w^{(1)}(x_1) + \psi_N^{(k)}(x_i) w^{(1)}(x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

$\psi_j^{(k)}$ 和 $\varphi_j^{(k)}$ 可以分别如下表示:

$$\psi_j^{(k)}(x_i) = \frac{1}{x_j - x_{N-j+1}} \{ l_j^{(k)}(x_i)(x_i - x_1) \times (x_i - x_N) + kl_j^{(k-1)}(x_i)[(x_i - x_1) + (x_i - x_N)] + k(k-1)l_j^{(k-2)}(x_i) \}, \quad j = 1, N, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (36)$$

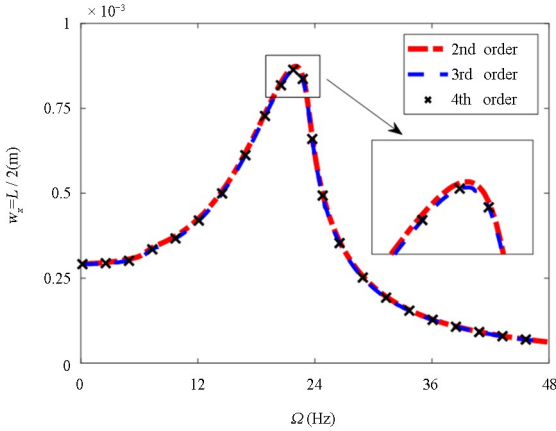
值为 5N, 外激励频率为 20Hz, 数值计算时常取 300 个周期, 每个周期内取 50 个点, 初始位移和初始速度均取为 0.

表 1 大展弦比板的材料参数
Table 1 Material parameters of the high-aspect ratio plate

Parameter	Symbol	Value
Young's modulus	E	11.9 GPa
Density	ρ	8960 kg/m ³
Length	L	0.5 m
Height	h	0.003 m
Width	b	0.05 m
Sectional area	A	$1.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Poisson's ratio	ν	0.326
Moment of inertia	I_b	$1.125 \times 10^{-10} \text{ m}^4$
Polar moment of inertia	I_p	$4.05 \times 10^{-10} \text{ m}^4$

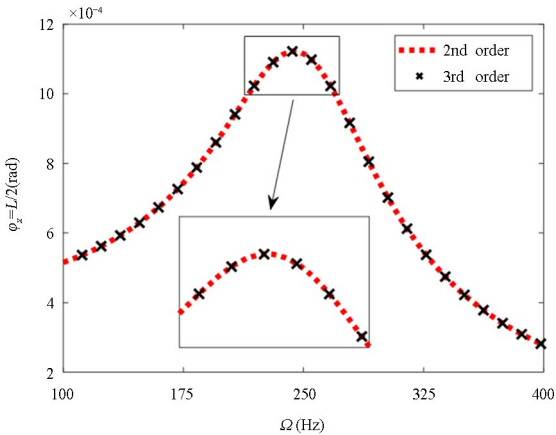
3.1 截断收敛性和谐波收敛性分析

用于数值计算的参数同表 1,图 3(a)对比了大展弦比为 10 时,二阶、三阶、四阶截断得到的大展弦比中点处弯曲响应的解析计算结果.对比之后发现,二阶截断与三阶和四阶截断得到的结果差异较大,而三阶截断和四阶截断的结果吻合很好.图 3(b)对比了大展弦比为 10 时,二阶、三阶截断得到的大展弦比中点处扭转响应的解析计算结果.对比之后发现,二阶截断与三阶得到的结果相同.为了方便后续的计算,故本文后续研究大展均采用三阶截断,即取式(14)和式(15)中的 $n=3$.



(a) 弯曲响应截断收敛性分析

(a) Analysis of truncated convergence of bending response



(b) 扭转响应截断收敛性分析

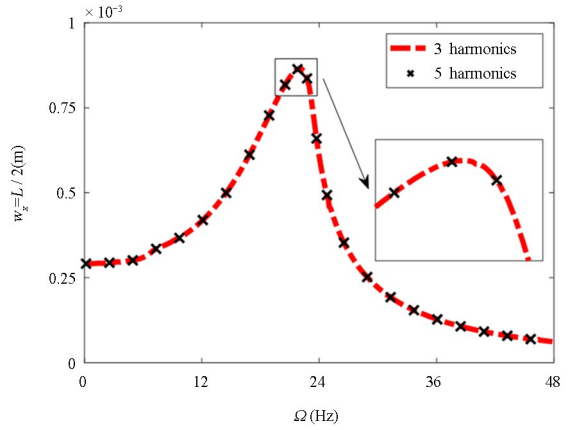
(b) Analysis of truncated convergence of torsional response

图 3 谐波收敛性分析

Fig.3 Analysis of truncated convergence

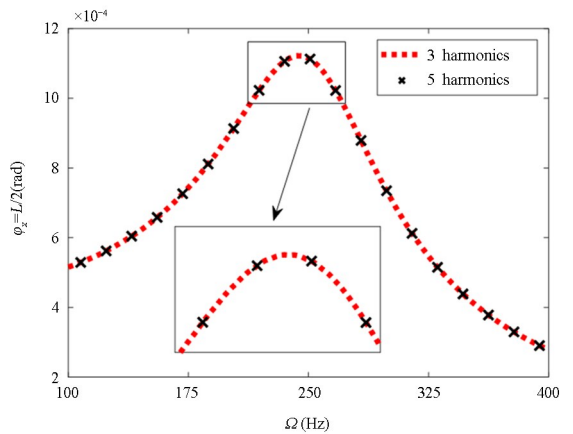
图 4(a)和(b)对比了展现比为 10 时三阶谐波次数和五阶谐波次数下大展弦比中点处的弯曲响应和扭转响应计算结果.图中的对比可以发现,三阶谐波系数和五阶谐波系数的计算结果吻合较好,故本文后续研究均采用三阶谐波系数,即取式(20)

中的 $N=3$.经过分析,确定了截断收敛性和谐波收敛性,在后文的研究过程中,只需要采用相对应的截断阶数和谐波阶数即可满足计算精度.



(a) 弯曲响应谐波收敛性分析

(a) Analysis of harmonic convergence of torsional response



(b) 扭转响应谐波收敛性分析

(b) Analysis of harmonic convergence of bending response

图 4 谐波收敛性分析

Fig.4 Analysis of harmonic convergence

3.2 数值验证与分析

为了验证 3.1 节所计算数据的正确性,基于 3.1 节所确定的截断收敛阶数和谐波收敛阶数,采用数值仿真的方法对解析计算的结果进行验证.同样采用表 1 的数值进行计算,对于 DQEM/DQM,给定所有的初值都设置为零.图 5 给出了 $F=5N, \omega=20Hz$ 时大展弦比模型弯曲响应的近似解析解和数值解,图 6 给出了相同条件下大展弦比模型扭转响应的近似解析解和数值解,可以看出此时系统已经进入稳态响应,仿真时长足够,取响应进入稳态最后一个周期的最大位移作为幅值,验证大展弦比模型稳态响应的近似解析解.图中红色点划线表示利用 DQM/DQEM 计算的得到数值解,蓝色虚线表

示运用谐波平衡法计算得到的近似解析结果.经过对比之后可以发现,当系统进入稳态响应后,解析结果与数值结果两者相同,说明近似解析解具有令人满意的计算精度.

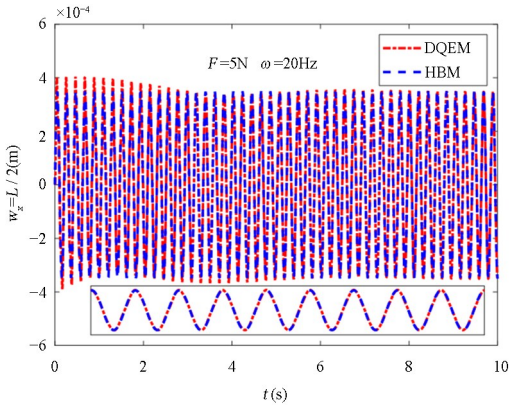


图5 大展弦比板中点处稳态弯曲响应时程图
Fig.5 Time history of steady-state response

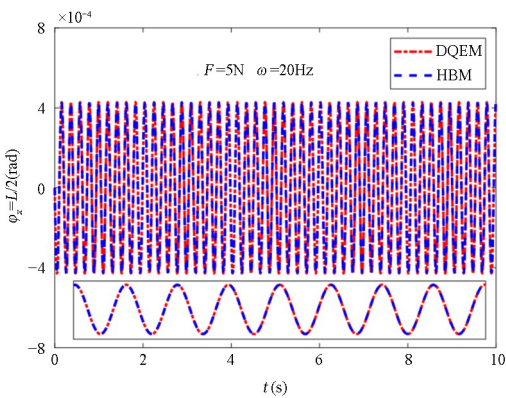


图6 大展弦比板中点处稳态扭转响应时程图
Fig.6 Time history of steady-state response

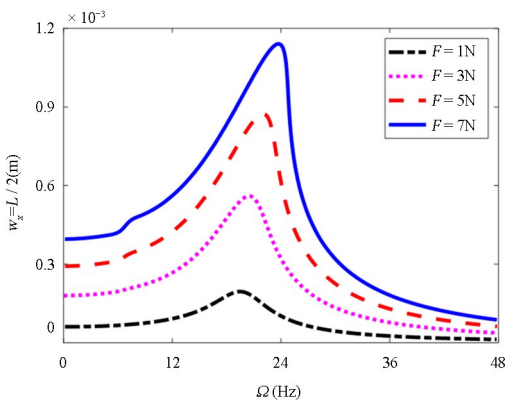


图7 大展弦比板中点处幅频响应曲线
Fig.7 Amplitude-frequency response curve at mid-point

为了分析外激励幅值的影响,图7给出了第一阶模态响应幅值在不同激励频率下随外激励幅值的连续变化曲线,由于控制方程中的三次方项,从图中可以看出随着外激励的增大,幅频特性曲线向

右偏转,幅频特性曲线呈现硬特性,并且随着外激励的增大,硬特性增强,同时响应幅值随着外激励的增大而增大,结构的非线性增强.

4 结论

本文研究了大展弦比模型的非线性弯扭耦合受迫振动,建立了两端简支的大展弦比模型并利用Hamilton原理推导得到了对应的控制方程,运用谐波平衡法得到了系统受迫振动的稳态响应,无论是对于弯曲振动还是扭转振动来说,三阶截断和三阶谐波系数就能达到很好的收敛性.之后运用DQEM和DQM相结合的方法得到了数值解,对比解析解后发现两者具有较好的精度,验证了解析结果的正确性.最后分析了不同外激励幅值下结构的幅频特性曲线,随着外激励的增大,幅频特性曲线向右弯曲,振动响应幅值增大,结构呈现硬特性.

参考文献

- [1] 谢长川, 吴志刚, 杨超. 大展弦比柔性机翼的气动弹性分析 [J]. 北京航空航天大学学报, 2003, 29(12): 1087-1090.
XIE C C, WU Z G, YANG C. Aeroelastic analysis of flexible large aspect ratio wing [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(12): 1087-1090. (in Chinese)
- [2] DUNN P, DUGUNDJI J. Nonlinear stall flutter and divergence analysis of cantilevered graphite/epoxy wings [J]. AIAA Journal, 1992, 30(1): 153-162.
- [3] XIE C C, YANG C. Linearization method of nonlinear aeroelastic stability for complete aircraft with high-aspect-ratio wings [J]. Science China Technological Sciences, 2011, 54(2): 403-411.
- [4] MINGUET P, DUGUNDJI J. Experiments and analysis for composite blades under large deflections. I - Static behavior [J]. AIAA Journal, 1990, 28(9): 1573-1579.
- [5] SHAMS S, SADR M H, HADDADPOUR H. An efficient method for nonlinear aeroelasticity of slender wings [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(1): 659-681.
- [6] MIAN H H, WANG G, YE Z Y. Numerical investigation of structural geometric nonlinearity effect in high-aspect-ratio wing using CFD/CSD coupled ap-

- proach [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, 49: 186–201.
- [7] TRAHAIR N S. Inelastic lateral buckling of steel cantilevers [J]. *Engineering Structures*, 2020, 208: 109918.
- [8] PEZESHKY P, SAHRAEI A, MOHAREB M. Distortional lateral torsional buckling analysis of beams with overhangs [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2019, 145(3): 04018266.
- [9] 刘燕, 张伟, 龚涛涛. 轴向可伸缩复合材料悬臂梁的非线性振动研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 19–25.
- LIU Y, ZHANG W, GONG T T. Modeling and numerical analysis of an axially moving composite laminated cantilever beam [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 19–25. (in Chinese)
- [10] 杨智春, 张惠, 谷迎松, 等. 考虑几何非线性效应的大展弦比机翼气动弹性分析 [J]. *振动与冲击*, 2014, 33(16): 72–75.
- YANG Z C, ZHANG H, GU Y S, et al. Aeroelastic analysis of the high aspect ratio wing considering the geometric nonlinearity [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, 33(16): 72–75. (in Chinese)
- [11] 田少杰, 漆文凯, 许正华. 气流激励下叶片振动响应分析方法 [J]. *航空动力学报*, 2021, 36(4): 826–838.
- TIAN S J, QI W K, XU Z H. Method of blade vibration response analysis under airflow excitation [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(4): 826–838. (in Chinese)
- [12] 张立, 缪维跑, 李春, 等. 基于气动弹性剪裁的大型风力机弯扭耦合叶片力学性能分析 [J]. *动力工程学报*, 2021, 41(8): 674–683.
- ZHANG L, MIAO W P, LI C, et al. Mechanical performance analysis of large wind turbine bend-twist coupling blade based on aeroelastic tailoring [J]. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2021, 41(8): 674–683. (in Chinese)
- [13] 朱成秀, 随岁寒, 彭丹华, 等. 轴向运动三阶剪切变形板自由振动的有限元模型及应用 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(5): 49–58.
- ZHU C X, SUI S H, PENG D H, et al. Finite element modeling and application on free vibration of axially moving third-order shear deformation plates [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(5): 49–58. (in Chinese)
- [14] ZHANG W, HAO Y X, GUO X Y, et al. Computed nonlinear responses of a simply supported FGM rectangular plate under combined parametric and external excitations [J]. *Meccanica*, 2012, 47(4): 985–1014.
- [15] 韩勤锴, 秦朝烨, 褚福磊. 变速旋转圆柱薄壳动力稳定性研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(2): 62–70.
- HAN Q K, QIN Z Y, CHU F L. Study on dynamic stability of thin cylindrical shells with variable rotation speed [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(2): 62–70. (in Chinese)
- [16] ZHANG W, ZHAO M H, GUO X Y. Nonlinear responses of a symmetric cross-ply composite laminated cantilever rectangular plate under in-plane and moment excitations [J]. *Composite Structures*, 2013, 100: 554–565.
- [17] YANG X D, CHEN L Q, ZU J W. Vibrations and stability of an axially moving rectangular composite plate [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, 78(1): 011008.
- [18] TANG Y Q, CHEN L Q. Nonlinear free transverse vibrations of in-plane moving plates: without and with internal resonances [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(1): 110–126.
- [19] 张博, 郭翔鹰, 姜盼. 石墨烯树脂复合材料板 1: 3 内共振非线性动力学分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 44–51.
- ZHANG B, GUO X Y, JIANG P. Nonlinear dynamic analysis of graphene resin composites plate with 1: 3 internal resonance [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 44–51. (in Chinese)
- [20] 郭翔鹰, 段梦烨. 不同阶外激励下压电纤维复合材料悬臂板的内共振特性分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(5): 23–32.
- GUO X Y, DUAN M Y. The influence of different order excitations on responses of piezoelectric fibre composite plates with multi inner resonance [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(5): 23–32. (in Chinese)
- [21] 朱绍涛, 李静, 张伟. 负泊松比蜂窝夹层板的多周期运动研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(5): 33–38.
- ZHU S T, LI J, ZHANG W. Multiple periodic motions of a honeycomb sandwich plate with negative poisson's ratio [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(5): 33–38. (in Chinese)
- [22] 韩若凡, 陈杰, 张伟. 石墨烯增强复合材料悬臂板

- 的气动颤振分析及振动抑制研究 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(1): 42–50.
- HAN R F, CHEN J, ZHANG W. Aeroelastic flutter and piezo suppression of graphene reinforced cantilever plates [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(1): 42–50. (in Chinese)
- [23] SHAMS S, SADR M H, BADIEI D. Nonlinear aeroelasticity of high-aspect-ratio wings with laminated composite spar [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2021, 43(7): 334.
- [24] HASHEMI S M, RICHARD M J. A Dynamic Finite Element (DFE) method for free vibrations of bending-torsion coupled beams [J]. Aerospace Science and Technology, 2000, 4(1): 41–55.
- [25] 孔嘉祥, 王博洋, 刘铸永, 等. 带 Stewart 平台的航天器刚柔耦合动力学建模与仿真分析 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 76–84.
- KONG J X, WANG B Y, LIU Z Y, et al. Rigid-flexible dynamic modeling and simulation of Stewart platform spacecraft [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 76–84. (in Chinese)
- [26] 张婷, 张建文. 非线性边界条件下弯扭耦合梁方程组的吸引子 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(4): 25–31.
- ZHANG T, ZHANG J W. Attractor for equations of abending and torsional coupled beam under nonlinear boundary conditions [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 25–31. (in Chinese)
- [27] 杨兴, 刘仁伟, 侯鹏, 等. 基于一阶剪切板理论的 FGM 板刚柔耦合动力学建模与仿真 [J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(4): 33–43.
- YANG X, LIU R W, HOU P, et al. Dynamic modeling and simulation of functionally graded materials plates based on first order shear plate theory [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(4): 33–43. (in Chinese)
- [28] HASHEMI S M, ROACH A. Dynamic finite element analysis of extensional-torsional coupled vibration in nonuniform composite beams [J]. Applied Composite Materials, 2011, 18(6): 521–538.
- [29] CARR J B. The torsional vibration of uniform thin-walled beams of open section [J]. The Aeronautical Journal, 1969, 73(704): 672–674.
- [30] 郭兵, 管海龙, 褚昊. 复杂荷载作用下单向受弯简支钢梁的弹性临界弯矩 [J]. 建筑结构学报, 2017, 38(11): 166–173.
- GUO B, GUAN H L, CHU H. Elastic critical moment of simply-supported steel beams under unidirectional bending with complex loads [J]. Journal of Building Structures, 2017, 38(11): 166–173. (in Chinese)
- [31] ZHANG J, XIANG J W. Nonlinear aeroelastic response of high-aspect-ratio flexible wings [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2009, 22(4): 355–363.
- [32] 任智毅, 金海波, 丁运亮. 大展弦比机翼非线性颤振特性研究 [J]. 应用力学学报, 2014, 31(2): 206–211+308.
- REN Z Y, JIN H B, DING Y L. Research on non-linearity flutter characteristics of a high-aspect-ratio wing [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2014, 31(2): 206–211+308. (in Chinese)
- [33] 刘占科, 周绪红, 何子奇, 等. 复合荷载作用下简支钢梁弹性弯扭屈曲研究 [J]. 建筑结构学报, 2014, 35(4): 78–85.
- LIU Z K, ZHOU X H, HE Z Q, et al. Study on flexural-torsional buckling of simply supported steel beam under combined loads [J]. Journal of Building Structures, 2014, 35(4): 78–85. (in Chinese)
- [34] EKEN S, KAYA M O. Flexural-torsional coupled vibration of anisotropic thin-walled beams with bi-convex cross-section [J]. Thin-Walled Structures, 2015, 94: 372–383.
- [35] WU Z Y, YAN H, ZHAO L C, et al. Axial-bending coupling vibration characteristics of a rotating blade with breathing crack [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 182: 109547.