文章编号:1672-6553-2024-22(1)-022-005
DOI:10.6052/1672-6553-2023-015

高阶 Maggi 方程的 Birkhoff 化及其辛算法*

薛冰　解加芳†　张可心
(北方工业大学 理学院,北京　100144)

摘要　针对非完整系统的高阶 Maggi 方程,在满足一定的条件时,可以对其进行 Birkhoff 化.通过构造生成函数,利用 Birkhoff 广义辛算法对其进行数值仿真.仿真结果和传统的 Runge-Kutta 算法结果相比较,Birkhoff 广义辛算法在长期跟踪后更加准确.

关键词　非完整系统,　Maggi 方程,　Birkhoff 辛算法
中图分类号:O316　　**文献标志码**:A

Birkhoffization of Higher-Order Maggi Equation and Its Symplectic Algorithm*

Xue Bing　Xie Jiafang†　Zhang Kexin
(College of Science, North China University of Technology, Beijing　100144, China)

Abstract　For the high-order Maggi equation of nonholonomic systems, when it meets certain conditions, the Maggi equation can be transformed into a Birkhoffian system. By constructing the generating function, the system is investigated numerically using the symplectic geometric algorithm of the Birkhoffian system. Compared with the above-mentioned algorithm with the classical Runge-Kutta method, Birkhoffian symplectic scheme is very accurate in a long-term tracing.

Key words　nonholonomic system,　Maggi equation,　Birkhoffian symplectic algorithm

引言

非完整系统是一类受到不可积微分约束的动力学系统[1],广泛应用于场论、机电动力系统、控制理论、工程科学等领域[2].20 世纪 80 年代我国学者梅凤翔研究了带参数约束的一类可控系统[3]、变质量非完整约束系统.Maggi 在 1896 年推广了拉格朗日第二类方程[4],对线性非完整约束系统得到一类动力学方程,后人称为 Maggi 方程[5],这些方程后来被推广到非线性非完整系统[6].Maggi 方程是力学系统[7]各大运动方程的中间产物,对研究非完整系统的运动具有重要意义.

Birkhoff 动力学理论是 Hamilton 动力学的自然推广,它是包括齐次 Hamilton 系统和非齐次 Hamilton 系统的更一般动力学理论,是最一般辛结构的局部实现,只有 Birkhoff 系统与一般辛几何结构之间才有一一对应关系.因此 Birkhoff 系统动力学[8]的研究对于完善和深化分析力学的理论体系具有重要意义,尤其是对于非齐次 Hamilton 动力学系统的几何结构分析具有重要应用价值[9].本文针对非完整系统高阶 Maggi 方程,在其满足一定条件下,将其进行 Birkhoff 化。并通过一个算例验证上述理论分析的正确性,再分别采用 Runge-Kutta 方法和 Birkhoff 辛算法对其进行数值计

2023-01-05 收到第 1 稿,2023-03-03 收到修改稿.
* 国家自然基金资助项目(12172003), National Natural Science Foundation of China (12172003).
† 通信作者 E-mail:jia3409457@126.com

算[10],并将数值结果进行比较,给出 Birkhoff 辛算法在长时计算时的优越性.

1　高阶非完整系统 Maggi 方程的 Birkhoff 化

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 确定,系统受有 g 个理想 m 阶非完整约束[11]

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\sigma},t) \tag{1}$$

其中

$$\begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\varepsilon=n-g;\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ s=1,\cdots,n;m=0,1,2,\cdots\end{pmatrix}$$

根据 d'Alembert-Lagrange 原理可以导出 Maggi 形式为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial T}{\partial q_\sigma}-Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}-\frac{\partial T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}-Q_{\varepsilon+\beta}\right)\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q_\sigma}}=0$$
$$(\sigma=1,\cdots,\varepsilon) \tag{2}$$

式中 Q_σ 为广义力,T 为系统动能.

令

$$f_s(q_k,\dot{q}_k,\ddot{q}_k,t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-Q_s$$

$$a_{\beta\sigma}(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q_s},\overset{(m)}{q_\nu},t)=\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q_\sigma}}$$
$$(\nu=1,\cdots,\varepsilon;\quad k=1,\ldots,n) \tag{3}$$

则方程(2)有形式

$$\sum_{\beta=1}^{g}f_{\varepsilon+\beta}a_{\beta\sigma}+f_\sigma=0 \tag{4}$$

当 $m=2$ 时,方程(1)是二阶非完整的. 如果 $\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\ddot{q}_\sigma}$ 不含 $\ddot{q}_s$,则方程(4)对 $\ddot{q}_s$ 是线性的,否则是非线性的.由式(4)可以解得

$$\ddot{q}_s=h_s(q_k,\dot{q}_k,t)\ (s,k=1,\cdots,n) \tag{5}$$

约束对初始条件的限制为:

$$\ddot{q}^0_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q^0_s,\dot{q}^0_s,\ddot{q}^0_s,t_0)\ (\beta=1,\cdots,g) \tag{6}$$

当 $m>2$ 时,依赖于 $\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q_\sigma}}$ 的形式,方程(4)的阶可由 2ε 到 $m\varepsilon$.如果广义坐标对时间 t 的高阶导数是 $l(0\leqslant l\leqslant m)$,那么将方程(4)对 t 求 $(m-2)$ 次导数 $(l\leqslant2)$ 或 $(m-l)$ 次导数 $(l\geqslant2)$,其阶将变成 $m\varepsilon$,由所得方程可以解得[12]

$$\overset{(m)}{q}_s=h_s(q_k,\dot{q}_k,\cdots,\overset{(m-1)}{q_k},t)\quad(m>2) \tag{7}$$

约束对初始条件的限制为:

$$\overset{(m)}{q}{}^0_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q^0_s,\cdots,\overset{(m)}{q}{}^0_s,t_0)\quad(\beta=1,\cdots,g) \tag{8}$$

将式(7)化为标准一阶形式,令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=\dot{q}_s,\cdots,x_{(m-1)n+s}=\overset{(m-1)}{q_s}\quad(s=1,\cdots,n) \tag{9}$$

则式(7)可以写成形式

$$\dot{a}^\nu=\sigma^\nu(\nu=1,2,\cdots,mn) \tag{10}$$

其中

$$a^\nu=x_\nu,\sigma^s=x_{n+s},\cdots,$$
$$\sigma^{(m-2)n+s}=x_{(m-1)n+s},$$
$$\sigma^{(m-1)n+s}=h_s(s=1,\cdots,n) \tag{11}$$

为将式(10)表为 Birkhoff 形式,其阶必为偶数[9],即 $mn=2N$,如果 mn 为奇数 $2N-1$,可增加一个方程

$$\dot{a}^0=1\ (a^0=t) \tag{12}$$

使其成为偶阶.从而,要使高阶非完整系统的 Maggi 方程可表示成 Birkhoff 形式

$$\sum_{\nu=1}^{2N}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\right)=0\quad(\mu=1,\cdots,2N) \tag{13}$$

即要求满足

$$\sum_{\nu=1}^{2N}\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\sigma^\nu(t,a)=\frac{\partial B}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\quad(\mu=1,\cdots,2N) \tag{14}$$

设式(10)的 $2n$ 个第一积分 $I^\mu(t,a)$ 彼此无关,即

$$\dot{I}^\mu(t,a)=\frac{\partial I^\mu}{\partial t}+\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu=\frac{\partial I^\mu}{\partial t}+\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\sigma^\nu=0\quad(\mu=1,\cdots,2n) \tag{15}$$

$$\det\left(\frac{\partial I^\mu}{\partial a^\nu}\right)\neq0 \tag{16}$$

根据 Hojman 方法,则式(14)的 Birkhoff 函数组 R_μ 由下式确定

$$R_\mu(t,a)=\sum_{\alpha=1}^{2n}G_\alpha\frac{\partial I^\alpha}{\partial a^\mu} \tag{17}$$

Birkhoff 量 B 为:

$$B(t,a)=-\sum_{\alpha=1}^{2n}G_\alpha\frac{\partial I^\alpha}{\partial t} \tag{18}$$

其中 G_α 需满足条件

$$\det\left(\frac{\partial G_\mu}{\partial I^\nu}-\frac{\partial G_\nu}{\partial I^\mu}\right)\neq0 \tag{19}$$

2　Maggi 方程的广义辛差分格式

根据 Birkhoff 系统的对称性,一个协变的非自治

的一阶方程在流形 $R\times T_{*}R^{2n}$ 的某一星形区域 $\tilde{R}^{*}$ 上是对称的充要条件是，它具有 Birkhoff 形式，即

$$\sum_{\nu=1}^{2N}K_{\mu\nu}(z,t)\frac{\mathrm{d}z_{\nu}}{\mathrm{d}t}+D_{\mu}(z,t)=\sum_{\nu=1}^{2N}\left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)\ (\mu=1,\cdots,2N)\tag{20}$$

其中

$$\begin{cases}K_{\mu\nu}(z,t)=\dfrac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\dfrac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\\ D_{\mu}(z,t)=-\left(\dfrac{\partial B}{\partial a^{\mu}}+\dfrac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\right)\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}z_{v}}{\mathrm{d}t}=\dot{a}^{\nu}\tag{21}$$

假定方程组(20)的一种离散可以记为：

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z}_{i},\boldsymbol{t}_{i})\partial_{t}^{i}z_{i}=[\nabla_{z}S(z_{i},t_{i})]_{i}+[\partial_{t}R(z_{i},t_{i})]_{i}\tag{22}$$

∂_{t}^{i} 代表 ∂_{t} 在第 i 点的离散，此离散决定一个离散的相流 $z_{i+1}=\Phi(z_{i},t_{i})$.

式(22)称为式(20)的一个离散格式，如果它决定的格式 Φ 保持离散的 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{t})$ 辛格式，即

$$\frac{\partial\Phi^{\mathrm{T}}}{\partial z_{i}}\boldsymbol{K}(z_{i+1},t_{i+1})\frac{\partial\Phi}{\partial z_{i}}=\boldsymbol{K}(z_{i},t_{i})\tag{23}$$

假设 $K_{\mu\nu}$，D_{μ} 由式(17)，式(18)和式(21)确定.此时根据秦孟兆，苏红玲等人的方法尝试构造此方程的广义辛算法.存在一个含有 t 参数的梯度映射 $\dot{\omega}=f(\omega,t,t_{0})$，并可以得到

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\omega}}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mu}+\frac{\partial\alpha_{1}}{\partial t}\tag{24}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{C}_{\alpha}\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{D}_{\mu}+\frac{\partial\alpha_{2}}{\partial t}\tag{25}$$

其中 $\omega,\dot{\omega},\alpha_{1},\alpha_{2},\boldsymbol{A}_{\alpha},\boldsymbol{C}_{\alpha}$ 由 R^{4n} 上到自身的可逆映射及其映射的 Jacobi 矩阵得到.

此映射为：

$$\alpha(t,t_{0}):\begin{pmatrix}\tilde{z}\\ z\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}\tilde{\omega}\\ \omega\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{1}(\tilde{z},z,t,t_{0})\\ \alpha_{2}(\tilde{z},z,t,t_{0})\end{bmatrix}\tag{26}$$

式(26)的 Jacobi 矩阵为：

$$\alpha_{*}(\tilde{z},z,t,t_{0})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{\alpha}&\boldsymbol{B}_{\alpha}\\ \boldsymbol{C}_{\alpha}&\boldsymbol{D}_{\alpha}\end{pmatrix}\tag{27}$$

映射 α 要满足

$$\alpha_{*}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{J}}_{4n}\alpha_{*}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}(\tilde{z},t)&0\\ 0&-\boldsymbol{K}(z,t_{0})\end{pmatrix}\tag{28}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{J}}_{4n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}_{2n}&0\\ 0&-\boldsymbol{J}_{2n}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_{2n}=\begin{pmatrix}0&\boldsymbol{I}_{n}\\ -\boldsymbol{I}_{n}&0\end{pmatrix}$$

当 $\boldsymbol{K}$ 与 z 无关时，根据式(27)和式(28)可以得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{A}_{\alpha}-\boldsymbol{C}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{C}_{\alpha}=\boldsymbol{K}(t)\\ &\boldsymbol{A}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{B}_{\alpha}-\boldsymbol{C}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{D}_{\alpha}=0\\ &\boldsymbol{B}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{C}_{\alpha}-\boldsymbol{D}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{C}_{\alpha}=0\\ &\boldsymbol{B}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{B}_{\alpha}-\boldsymbol{D}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{D}_{\alpha}=\boldsymbol{K}(t_{0})\end{aligned}\tag{29}$$

且需满足下面的截面条件

$$|\boldsymbol{C}_{\alpha}M+\boldsymbol{D}_{\alpha}|\neq 0$$

设 $\boldsymbol{B}_{\alpha}=\boldsymbol{C}_{\alpha}=0$，则式(29)可成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{A}_{\alpha}=\boldsymbol{K}(t)\\ &-\boldsymbol{D}_{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{2n}\boldsymbol{D}_{\alpha}=\boldsymbol{K}(t_{0})\end{aligned}\tag{30}$$

设 $\boldsymbol{A}_{\alpha}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{m}_{1}&\boldsymbol{m}_{2}\\ \boldsymbol{m}_{3}&\boldsymbol{m}_{4}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{K}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_{1}&\boldsymbol{k}_{2}\\ \boldsymbol{k}_{3}&\boldsymbol{k}_{4}\end{pmatrix}$，考虑到 $\boldsymbol{K}(t)$ 为反对称矩阵，则 $\boldsymbol{k}_{2}=-\boldsymbol{k}_{3}^{\mathrm{T}}$，并且 $\boldsymbol{k}_{1},\boldsymbol{k}_{4}$ 两个子矩阵也为反对称矩阵.

由式(30)可以得到

$$\begin{pmatrix}-(\boldsymbol{m}_{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{3})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{m}_{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{3}&-\boldsymbol{m}_{3}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{2}+\boldsymbol{m}_{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{4}\\ -\boldsymbol{m}_{4}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{1}+\boldsymbol{m}_{2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{3}&-(\boldsymbol{m}_{2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{4})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{m}_{2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}_{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{k}_{1}&\boldsymbol{k}_{2}\\ \boldsymbol{k}_{3}&\boldsymbol{k}_{4}\end{pmatrix}\tag{31}$$

由于 $\boldsymbol{K}(t)$ 已经被式(17)和式(21)确定，可以求出 $\boldsymbol{A}_{\alpha}$. 同理可得 $\boldsymbol{D}_{\alpha}$.因此 $\omega,\dot{\omega},\alpha_{1},\alpha_{2},\boldsymbol{B}_{\alpha},\boldsymbol{C}_{\alpha}$ 都能给出.

生成函数 $\phi(\omega,t,t_{0})=\alpha(t,t_{0})$，可以构造广义 Birkhoff 辛差分格式.当步长 $\tau>0$ 足够小的时候，取

$$\psi_{\omega}^{(m)}(\omega,t_{0}+\tau,t_{0})=\sum_{i=0}^{m}\tau^{i}\phi_{\omega}^{(i)}(\omega,t_{0}),\quad(m=1,2,\cdots)\tag{32}$$

那么 $\psi_{\omega}^{(m)}(\omega,t_{0}+\tau,t_{0})$ 就定义了一个有 m 阶精度的 $\boldsymbol{K}(z,t)$ 辛离散格式，使得

$$\begin{aligned}&z=z^{k}\rightarrow z^{k+1}=\tilde{z}\\ &\alpha_{1}(z^{k+1},z^{k},t_{k+1},t_{k})\\ &=\psi_{w}^{(m)}[\alpha_{2}(z^{k+1},z^{k},t_{k+1},t_{k}),t_{k+1},t_{k}]\end{aligned}\tag{33}$$

3　算例

假设某一力学系统的位形由 2 个广义坐标

q_1, q_2 确定，其系统动能为

$$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) \tag{34}$$

且该系统受到 1 个 2 阶非完整约束：

$$\ddot{q}_2=2\dot{q}_1-t\ddot{q}_1 \tag{35}$$

为了计算简便，取广义力 $Q_1=0, Q_2=4\dot{q}_1$，则由式(2)给出该系统的 Maggi 方程为：

$$(1+t^2)\ddot{q}_1+2t\dot{q}_1=0 \tag{36}$$

显然式(36)有解：

$$q_1=1-\arctan(t)$$

$$q_2=-3t\cdot\arctan(t)+2\ln(t^2+1)+t$$

由此可以构造 Birkhoff 函数 R_μ, B 如下[11]：

$$R_1=I^4=a^2-ta^4+\frac{t^2}{t^2+1}-2\ln(t^2+1)$$

$$R_2=0$$

$$R_3=I^2-tI^4=a^4+3\arctan(t)-\frac{t}{t^2+1}-t\left[a^2-ta^4+\frac{t^2}{t^2+1}2\ln(t^2+1)\right]$$

$$R_4=0$$

$$B=-\left\{\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}a^2+\left[2\ln(t^2+1)-\frac{t^2}{t^2+1}\right]a^3-\frac{2t^3+2t}{(1+t^2)^2}a^4-a^2a^3+ta^3a^4-\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}\ln(1+t^2)-\frac{6t}{(1+t^2)^2}+\frac{2t^4+2t^2}{(1+t^2)^3}\right\}$$

从而将该系统的 Maggi 方程可以 Birkhoff 化：

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & t\\ 1 & 0 & -t & 0\\ 0 & t & 0 & -1-t^2\\ -t & 0 & 1+t^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{(t^2+1)}\\ -3\arctan(t)+\dfrac{t}{t^2+1}+1\\ \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\\ -\dfrac{4t^2+2}{(1+t^2)^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\arctan(t)-\dfrac{5t^3+3t}{(t^2+1)^2}-1\\ \dfrac{2t^2}{(t^2+1)^2}\\ -3t\cdot\arctan(t)+\dfrac{5t^2+2}{t^2+1}+t\\ \dfrac{3t}{t^2+1}\end{pmatrix}$$

结合式(24)和式(25)，我们可以确定生成函数 $\phi(\omega,t,t_0)$，之后采用上述的 Birkhoff 广义辛算法式(32)，得到此 Birkhoff 系统的二阶 $K(z,t)$ 离散格式[11-13].

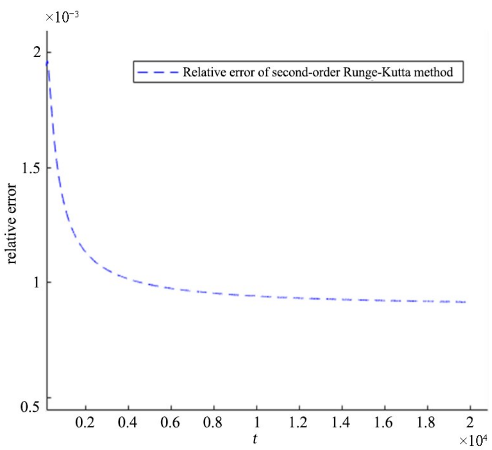

图 1　二阶 Runge-Kutta 算法相对误差

Fig.1　Relative error of second order Runge-Kutta algorithm

对该题采用二阶 $K(z,t)$ 算法和二阶 Runge-Kutta 算法进行计算.在计算过程中，先取如下初值：$q_1=1, C_1=C_2=1$，取步长 $\tau=0.01$.并通过比较两种数值方法计算所得数值解和解析解 $q_1=1-\arctan(t)$ 之间的相对误差来说明两种数值方法的差别.

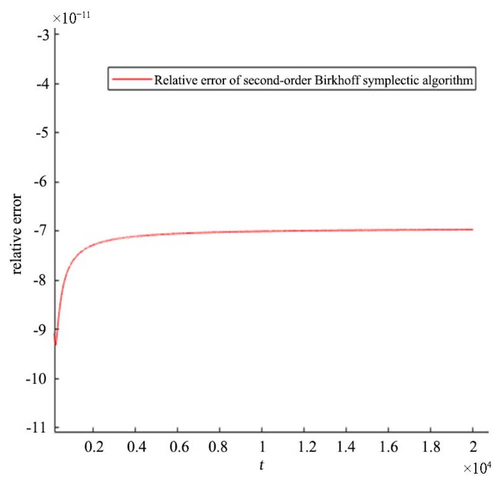

图 2　Birkhoff 辛算法相对误差

Fig.2　Relative error of Birkhoff symplectic algorithm

对比图 1 和图 2 可以看出，Runge-Kutta 方法在长期跟踪后与解析解有着大幅度的相对误差，而 Birkhoff 辛算法则相对误差非常的小.因此，Birkhoff 辛算法结果更加精确.

4　结论

本文对一定条件下的非完整系统的高阶 Maggi方程(2)先进行了Birkhoff化,得到广义Birkhoff方程(13),并针对该方程,应用Birkhoff广义辛差分格式与传统Runge-Kutta算法分别进行计算,比较两种算法,最后得出Birkhoff广义辛差分算法在求解非完整系统高阶Maggi方程中更加优越.

参考文献

[1] 张毅，蔡锦祥. 事件空间中非完整力学系统的 Herglotz-d'Alembert 原理与守恒律 [J]. 动力学与控制学报，2022，20(2)：15－21.
ZHANG Y，CAI J X. Herglotz-d' Alembert principle and conservation law for nonholonomic mechanical systems in event space [J]. Journal of Dynamics and Control，2022，20(2)：15－21. (in Chinese)

[2] 陈滨. 分析动力学[M]. 2 版，北京：北京大学出版社，2012.
CHEN B. Analytical dynamics[M]. 2nd ed，Beijing：Peking University Press，2012. (in Chinese)

[3] 梅凤翔. 分析力学 [M]. 北京：北京理工大学出版社，2013.
MEI F X. Analytical mechanics [M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，2013. (in Chinese)

[4] 郭永新，罗绍凯，梅凤翔. 非完整约束系统几何动力学研究进展：Lagrange 理论及其它[J]. 力学进展，2004，34(4)：477－492.
GUO Y X，LUO S K，MEI F X. Progress of geometric dynamics of nonholonomic constrained mechanical systems：Lagrange theoryand others [J]. Advances In Mechanics，2004，34(4)：477－492. (in Chinese)

[5] GOLUBOWSKA B. Some aspects of affine motion and nonholonomic constraints. Two ways to describe homogeneously deformable bodies [J]. ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics，2016，96(8)：968－985.

[6] 梅凤祥,刘瑞,罗勇. 高等分析力学 [M]. 北京：北京理工大学出版社，1991.
MEI F X，LIU R LUO Y. Advanced analytical mechanics [M]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，1991. (in Chinese)

[7] GUO Y X,LIU C,LIU S X. Generalized Birkhoffian realization of nonholonomic systems. [J]. Communications in Mathematics，2010，18:21－35.

[8] 张毅. 时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量 [J]. 动力学与控制学报，2019，17(5)：482－486.
ZHANG Y. Noether symmetries and conserved quantities of constrained birkhoffian systems on time scales [J]. Journal of Dynamics and Control，2019，17(5)：482－486. (in Chinese)

[9] 刘畅，宋端，刘世兴，等. 非齐次 Hamilton 系统的 Birkhoff 表示 [J]. 中国科学：物理学 力学 天文学，2013，43(4)：541－548.
LIU C，SONG D，LIU S X，et al. Birkhoffian representation of non-homogenous hamiltonian system [J]. Scientia Sinica (Physica，Mechanica & Astronomica)，2013，43(4)：541－548. (in Chinese)

[10] 解加芳，庞硕，邹杰涛，等. 非完整系统 Boltzmann－Hamel 方程的 Birkhoff 化及其广义辛算法 [J]. 物理学报，2012，61(23)：1－5.
XIE J F，PANG S，ZOU J T，et al. The Borkhoffian expression of Boltzmann-Hamel equation of nonholonomic system and its generalized symplectic geometric algorithm [J]. Acta Physica Sinica，2012，61(23)：1－5. (in Chinese)

[11] 梅凤翔,史荣昌,张永发,等. Birkhoff系统动力学.北京:北京理工大学出版,1996.
MEI F X，SHI R C,ZHANG Y F，et al. Dynamics of Birkhoff systems [J]. Beijing：Beijing Institute of Technology Press，1996. (in Chinese)

[12] 宋端，崔金超，刘世兴，等. 高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示 [J]. 动力学与控制学报，2013，11(2)：97－101.
SONG D，CUI J C，LIU S X，et al. Generalized birkhoffian representation of high-order nonholonomic systems [J]. Journal of Dynamics and Control，2013，11(2)：97－101. (in Chinese)

[13] 郭永新.非完整约束力学的几何结构研究 [D].北京：北京理工大学,1996.
GUO Y X.Studies of geometric frameworks for constrained mechanical systems [D].Beijing：Beijing Institute of Technology,1996. (in Chinese)