

# 色噪声激励下一类驰振能量采集器的稳态响应研究<sup>\*</sup>

许苗莉 冶继民<sup>†</sup>

(西安电子科技大学 数学与统计学院,西安 710071)

**摘要** 使用具有指数相关性的色噪声近似外界环境干扰,研究色噪声激励下驰振能量采集器(GEH)的稳态响应.首先,介绍了系统的理论机电耦合运动方程,并对其进行无量纲化处理.其次,通过广义谐波变换对方程进行等效解耦,然后使用能量包线随机平均法得到系统稳态响应的解析解.最后,使用四阶龙格库塔算法进行数值模拟,在验证解析解有效性的同时分析了风速、色噪声参数对系统稳态响应的影响.研究表明,较大的噪声强度有利于提升系统的能量采集性能,且在风速较低时效果更明显;噪声相关时间对系统稳态响应的影响与噪声强度相反.当系统的振动模式由风激励主导时,系统的响应表现为带有附加噪声的周期性振动;随着风速增加,增强的风激励削弱了色噪声激励对系统稳态响应的影响.此外,本文还研究了系统结构参数和电气参数对平均输出功率的影响,研究结果为优化系统设计提供了有效的理论指导.

**关键词** 驰振能量采集器, 色噪声, 随机平均法, 稳态响应, 数值模拟

中图分类号:TM619

文献标志码:A

## Steady-State Response Study of a Type of Galloping Energy Harvester Under Colored Noise Excitation<sup>\*</sup>

Xu Miaoli Ye Jimin<sup>†</sup>

(Department of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract** The study uses colored noise with exponential correlation as an approximation of external environmental interference. The steady-state response of a galloping energy harvester (GEH) under colored noise is studied. Firstly, the theoretical electromechanical coupling motion equations of the system are introduced and non-dimensionalized. Secondly, the equations are equivalently decoupled through generalized harmonic transformation, then the analytical solution of the steady-state response of the system is obtained through the stochastic averaging method. Finally, numerical simulations are conducted using the fourth-order Runge-Kutta algorithm to verify the theoretical results and analyze the effects of wind speed and colored noise parameters on the steady-state response of the system. The system response exhibits periodic oscillations with additional noise when the galloping induced by wind is dominant. As the wind speed increases, the enhanced wind excitation weakens the effect of color noise excitation on the steady-state response of the system. In addition, this study also investigates the effects of system structure parameters and electrical parameters on the average output power, providing effective theoretical guidance for optimizing system design.

**Key words** galloping energy harvester, colored noise, the stochastic averaging method, steady-state response, numerical simulation

2023-05-05 收到第 1 稿,2023-06-12 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12172266),National Natural Science Foundation of China (12172266).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:jmye@mail.xidian.edu.cn

## 引言

随着全球数字化进程的加快和通信技术的快速发展,物联网传感器设备得到了大规模应用,在带来便利的同时,其庞大的电池消耗数量也带来了高昂的维护成本和巨大的环境负担.这驱使着研究人员开发一种可持续的供电技术,通过采集环境当中的振动、光能、风能等能量,将其转化为电能为设备供电,这种技术被统称为能量采集技术<sup>[1-4]</sup>.

根据不同的能量转换方式,能量采集器可分为电磁式、压电式、静电式等<sup>[5,6]</sup>.电磁式能量采集器利用电磁感应将机械能转化为电能<sup>[7]</sup>,其工作原理是将机械能转化为线圈或永磁体的运动,实现两者之间的相对运动,从而使线圈内磁通量发生变化并产生感应电动势,当闭合为回路时产生感应电流.压电式能量采集器利用压电效应将机械能转化为电能<sup>[8]</sup>.压电材料受某特定方向的外力并发生形变时,材料内部会产生极化现象,在其两个相对表面上产生等量异号的电荷,当连入机械振动载荷时,电荷的极性会不断地在正负之间变化,从而产生交变电压.静电式能量采集器利用静电感应将机械能转化为电能<sup>[9]</sup>,它在开始产生电能之前,通常需要一个外部电源在可变电容器之间产生原始电压差,通过改变可变电容器的电容值将机械能转化为电能.除上述常用能量转换方式外,能量采集器还可设计为摩擦式、复合式等,且随着科技的进步和新型材料的应用,更多新型的能量转换方式也在不断产生.

流致振动作为自然环境中普遍存在的流固耦合现象,是能量采集的主要来源之一<sup>[10]</sup>.驰振作为典型的流致振动,一般发生在具有正方形、矩形等非流线型截面的结构中,其产生原因是升力曲线具有负斜率,这种负斜率使系统产生负阻尼,进而导致结构从外界持续吸收能量并产生自激振动<sup>[11]</sup>.驰振能量采集器(GEH)是利用驰振将环境中的风能转化为电能的装置.与传统的风车发电机相比,驰振能量采集器具有体积小、切入风速低和设计制造简单的优势,可以有效采集环境中的风能,凭借其高潜力的应用价值引起了众多学者的关注<sup>[12-15]</sup>.

钝体作为 GEH 的重要组成部分,它的几何形状会影响系统的响应结果, Yang 等<sup>[16]</sup>比较了不同横截面的钝体对能量采集性能的影响,结果表明方

形截面在提升输出功率和降低初始工作风速方面具有优势.李海涛等<sup>[17]</sup>研究了具有不同宽厚比的钝体对系统能量采集性能的影响,结果表明增加钝体的宽厚比可以显著提高能量采集的效果,为优化钝体设计提供了理论指导.为了提高 GEH 的环境适应性和输出功率, Bibo 等<sup>[18]</sup>对 GEH 进行了参数研究,证明了在给定的设计条件和气流参数下可通过优化恢复力来实现输出功率的最大化. Wang 等<sup>[19]</sup>通过对 GEH 的风洞实验和参数研究证明了引入非线性恢复力可有效提升系统的输出功率.

随着研究的深入,人们意识到在实际运行环境中 GEH 会不可避免地受到外界环境干扰的影响.噪声作为一种在理论上无法预测的信号,只有掌握噪声的统计规律才能降低它的干扰,因此研究 GEH 在噪声激励下的动力学行为是必要的.大多数关于 GEH 的研究考虑了高斯白噪声的影响,例如 Yang 等<sup>[20]</sup>用高斯白噪声近似环境干扰研究它对 GEH 的影响,结果表明增加噪声强度可以提高能量采集器的平均输出功率. Xu 等<sup>[21]</sup>用高斯白噪声近似风速的微小波动,研究了系统参数对 GEH 平均输出功率的影响.然而,高斯白噪声作为一种理想的数学模型,在真实环境中很难实现,这不仅是因为白噪声的平均功率是无限的,还因为白噪声的自相关函数为零,即在任何两个不同的时刻噪声都是不相关的.考虑到实际应用中大多数噪声具有不同的相关时间长度,具有非零相关时间的色噪声更有利于描述环境干扰. Liu 等<sup>[22]</sup>研究了色噪声激励下非线性压电振动能量采集器的概率响应. Zhang 等<sup>[23]</sup>研究了具有分数阶阻尼的压电能量采集器在色噪声激励下的随机动力学行为,并分析了色噪声参数对采集性能的影响.具有指数相关性的色噪声是描述能量采集过程中环境干扰的现实物理模型,已有不少研究人员使用色噪声来近似环境干扰,然而,到目前为止,在 GEH 动力学的理论研究中,考虑色噪声激励的文献较为有限.

本文从理论上研究了色噪声激励下 GEH 的稳态响应特性.第一节介绍了系统的理论机电耦合运动方程,并对其进行无量纲化处理.第二节通过广义谐波变换对方程进行等效解耦,然后使用能量包线随机平均法得到系统稳态响应概率密度函数和平均输出功率的解析解.第三节使用四阶龙格库塔算法进行数值模拟,以验证解析解的有效性,同

时研究了风速、色噪声参数和系统参数对系统稳态响应的影响,最后一节给出结论。

## 1 数学模型

驰振能量采集器的集总参数模型如图 1 所示,它主要由悬臂梁—钝体振荡器和外围电路组成,该振荡器通过机电耦合机制连接到电路。根据能量转换方式的不同可分为压电 GEH[图 1(a)]或电磁 GEH[图 1(b)]。

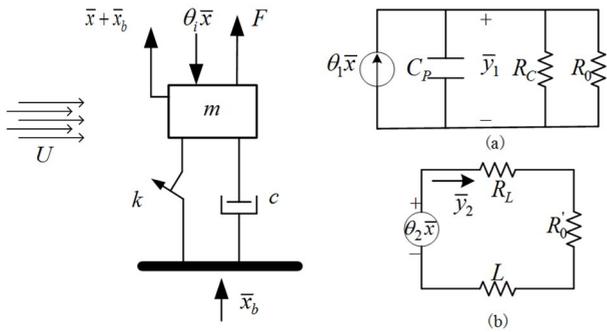


图 1 驰振能量采集器的集总参数模型

Fig.1 A lumped-parameters model of a galloping energy harvester

图 1 所示系统的机电耦合运动方程为<sup>[6,18]</sup>:

$$m \ddot{\bar{x}} + c \dot{\bar{x}} + k\bar{x} + \theta_i \bar{y}_i = F - m \ddot{\bar{x}}_b \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

$$C_p \dot{\bar{y}}_1 + \frac{\bar{y}_1}{R_1} = \theta_1 \dot{\bar{x}} \quad (\text{压电})$$

$$L \dot{\bar{y}}_2 + R_2 \bar{y}_2 = \theta_2 \dot{\bar{x}} \quad (\text{电磁}) \quad (2)$$

其中,点符号表示相对于时间  $t$  的导数,  $m$ 、 $c$  和  $k$  分别表示采集器的等效质量、等效阻尼和等效刚度,  $\bar{x}$  表示钝体的位移,  $\ddot{\bar{x}}_b$  表示激励加速度.  $i=1, 2$  对应于压电 GEH 和电磁 GEH 两种不同情况;  $C_p$  表示压电元件的有效电容,  $L$  表示线圈的电感,  $\bar{y}_1$  表示压电 GEH 的感应电压,  $\bar{y}_2$  表示电磁 GEH 的感应电流,  $\theta_1$  和  $\theta_2$  均表示等效机电耦合系数,  $R_1$  表示压电 GEH 的等效负载电阻, 即  $R_1 = R_c R_0 / (R_c + R_0)$ , 其中  $R_0$  是负载电阻,  $R_c$  是压电电阻;  $R_2$  表示电磁 GEH 的等效负载电阻, 即  $R_2 = R_L + R_0$ , 其中  $R_0$  是负载电阻,  $R_L$  是线圈电阻。

$F$  表示作用在钝体上的空气动力。根据准稳态假设<sup>[15,24]</sup>,  $F$  可表示为钝体速度  $\dot{\bar{x}}$  和风速  $U$  的三阶多项式<sup>[14,19]</sup>:

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 L d \left[ a_1 \frac{\dot{\bar{x}}}{U} - a_3 \left( \frac{\dot{\bar{x}}}{U} \right)^3 \right] \quad (3)$$

其中,  $L$  和  $d$  分别表示钝体迎风面的高度和宽度,  $\rho$  表示空气密度,  $a_1$  和  $a_3$  分别表示空气动力系数和

钝体的横纵比。

为了便于研究,对参数进行无量纲化处理,引入以下变换:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \omega_n t, \quad X = \frac{\bar{x}}{d}, \quad \bar{U} = \frac{U}{\omega_n d}$$

$$\mu = \frac{\rho L d^2}{4m}, \quad \zeta_m = \frac{c}{2m\omega_n}$$

$$Y_1 = \frac{C_p}{\theta_1 d} \bar{y}_1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{R_1 C_p \omega_n}, \quad \kappa_1 = \frac{\theta_1^2}{k C_p}$$

$$Y_2 = \frac{L}{\theta_2 d} \bar{y}_2, \quad \lambda_2 = \frac{R_2}{L \omega_n}, \quad \kappa_2 = \frac{\theta_2^2}{k L}$$

其中,  $\omega_n$  代表系统的等效固有频率,  $T$ 、 $X$  和  $\bar{U}$  分别代表无量纲时间、无量纲位移和无量纲风速,  $\mu$  代表无量纲质量比,  $\zeta_m$  代表无量纲机械阻尼比.  $Y_1$  和  $Y_2$  分别代表无量纲电压和电流,  $\kappa_1$  和  $\kappa_2$  均表示无量纲机电耦合系数,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  均表示无量纲机电时间常数比。

在本研究中,我们将外部激励视为具有零均值的高斯色噪声  $\xi(T)$ , 其自相关函数和功率谱密度为:

$$\langle \xi(T) \xi(S) \rangle = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|T-S|}{\tau}\right)$$

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi(1+\tau^2\omega^2)} \quad (4)$$

其中  $D$  和  $\tau$  分别表示  $\xi(T)$  的噪声强度和相时间。

通过上述变换,系统的无量纲机电耦合运动方程可表示为:

$$X + 2(\zeta_m - \mu a_1 \bar{U}) \dot{X} + \frac{2\mu a_3}{\bar{U}} (\dot{X})^3 + X + \kappa_i Y_i = \xi(T) \quad (i=1, 2) \quad (5)$$

$$\dot{Y}_1 + \lambda_1 Y_1 = \dot{X} \quad (\text{压电})$$

$$\dot{Y}_2 + \lambda_2 Y_2 = \dot{X} \quad (\text{电磁}) \quad (6)$$

## 2 随机平均法

### 2.1 等效解耦系统

方程(6)中的无量纲电压  $Y_1$  或电流  $Y_2$  的解均可显式表示为:

$$Y(T) = C e^{-\lambda T} + \int_0^T e^{-\lambda(T-u)} \dot{X}(u) du \quad (7)$$

其中  $C$  为待定常数。

本文只关注稳态响应,而指数衰减项对稳态响

应的影响趋于零,忽略  $Ce^{-\lambda T}$  得到  $Y(T)$  近似表达式:

$$Y(T) \approx \int_0^T e^{-\lambda(T-u)} \dot{X}(u) du \quad (8)$$

考虑到系统的振动是准周期性的<sup>[12,21]</sup>,引入广义谐波函数,系统的位移和速度可表示为:

$$\begin{aligned} X(T) &= A(H) \cos[\omega(H)T + \varphi(T)] \\ \dot{X}(T) &= -A(H)\omega(H) \sin[\omega(H)T + \varphi(T)] \end{aligned} \quad (9)$$

其中,  $H$  表示系统总能量,  $A(H)$ 、 $\omega(H)$  和  $\varphi(T)$  分别表示振幅、频率和初始相位. 对于较小的时间  $T_1$ , 总能量、振幅、频率和初始相位与系统状态变量相比是慢变随机过程, 所以  $X(T - T_1)$  可近似表示为:

$$\begin{aligned} X(T - T_1) &\approx \cos[\omega(H)T_1]X(T) - \\ &\frac{\sin[\omega(H)T_1]}{\omega(H)}\dot{X}(T) \end{aligned} \quad (10)$$

将方程(10)代入方程(8)中并忽略指数衰减项可得:

$$Y(T) = \frac{\omega^2(H)}{\lambda^2 + \omega^2(H)}X(T) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2(H)}\dot{X}(T) \quad (11)$$

将方程(11)代入方程(5)中可得到系统的等效解耦方程:

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \left(2\zeta_m - 2\mu a_1 \bar{U} + \frac{\lambda\kappa}{\lambda^2 + \omega^2(H)}\right)\dot{X} + \\ \frac{2\mu a_3}{\bar{U}}(\dot{X})^3 + X + \frac{\kappa\omega^2(H)}{\lambda^2 + \omega^2(H)}X = \xi(T) \end{aligned} \quad (12)$$

方程(12)在稳定状态下是有效的,其中,驰振的发生需满足:

$$2\zeta_m - 2\mu a_1 \bar{U} + \frac{\lambda\kappa}{\lambda^2 + \omega^2(H)} < 0 \quad (13)$$

根据方程(12),系统的总能量可以表示为

$$H = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + U(X) \quad (14)$$

其中,  $U(X)$  是稳定状态下等效解耦方程的势函数,可以表示为:

$$\begin{aligned} U(X) &= \int_0^X \left[ u + \frac{\kappa\omega^2(H)}{\lambda^2 + \omega^2(H)}u \right] du \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\kappa\omega^2(H)}{\lambda^2 + \omega^2(H)} \right] X^2 \end{aligned} \quad (15)$$

方程(15)与方程(5)对比表明系统的势函数被

耦合项修改,并最终取决于平均频率  $\omega(H)$ , 而  $\omega(H)$  又取决于系统的势函数  $U(X)$ , 因此对于确定的总能量  $H$ , 可以使用迭代法确定  $\omega(H)$ .

## 2.2 能量包线随机平均法

对方程(14)求导,并结合方程(12),可得:

$$\dot{H} = -\dot{X} \cdot f(X, \dot{X}) + \dot{X}\xi(T) \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} f(X, \dot{X}) &= \left( 2\zeta_m - 2\mu a_1 \bar{U} + \frac{\lambda\kappa}{\lambda^2 + \omega^2(H)} \right) \dot{X} + \\ &\frac{2\mu a_3}{\bar{U}} (\dot{X})^3 \end{aligned} \quad (17)$$

与能量随机过程  $H(T)$  相应的另一个状态变量可选为位移随机过程  $X(T)$ , 其运动方程可表示为:

$$\dot{X} = \pm \sqrt{2H - 2U(X)} \quad (18)$$

其中正负号分别代表位移的增加和减小.

方程(16)和方程(18)可代替方程(12)成为支配系统的方程.此外,能量随机过程  $H(T)$  可近似为马尔可夫过程,根据伊藤微分规则可得:

$$dH = m(H)dT + \sigma(H)dB(T) \quad (19)$$

其中,  $B(T)$  为标准维纳过程,漂移系数  $m(H)$  和扩散系数  $\sigma^2(H)$  分别为:

$$m(H) = -\langle \dot{X} \cdot f(X, \dot{X}) \rangle_T + \frac{D}{1 + \tau^2 \omega^2(H)}$$

$$\sigma^2(H) = \frac{2D}{1 + \tau^2 \omega^2(H)} \langle \dot{X}^2 \rangle_T \quad (20)$$

$\langle \cdot \rangle_T$  代表时间平均,可按如下表达式计算:

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle_T &= \frac{1}{T(H)} \int_0^{T(H)} (\cdot) dT \\ &= \frac{4}{T(H)} \int_0^{A(H)} \frac{(\cdot)}{\dot{X}} dX \end{aligned} \quad (21)$$

振幅  $A(H)$  可以由  $H = U[A(H)]$  确定.周期  $T(H)$  表示为:

$$T(H) = 4 \int_0^{A(H)} \frac{1}{\sqrt{2H - 2U(X)}} dX \quad (22)$$

通过求解方程(19)对应的 FPK 方程,导出总能量  $H$  稳态响应的概率密度函数(PDF):

$$P(H) = \frac{C}{\sigma^2(H)} \exp \left[ \int \frac{2m(H)}{\sigma^2(H)} dH \right] \quad (23)$$

进而,位移和速度的联合 PDF 可表示为:

$$\begin{aligned} P(X, \dot{X}) &= \frac{P(H)}{T(H)} \Big|_{H=\frac{1}{2}\dot{X}^2+U(X)} \\ &= \frac{CW}{D} \exp \left[ \frac{W}{D} F(X, \dot{X}) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

其中

$$W = 1 + \tau^2 \omega^2(H)$$

$$F(X, \dot{X}) = - \left[ 2\zeta_m - 2\mu a_1 \bar{U} + \frac{\lambda \kappa}{\lambda^2 + \omega^2(H)} \right] \times \left[ \frac{1}{2} \dot{X}^2 + U(X) \right] - \frac{3\mu a_3}{2\bar{U}} \left[ \frac{1}{2} \dot{X}^2 + U(X) \right]^2 \quad (25)$$

位移和速度的边际 PDF 可表示为:

$$\begin{aligned} p(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X, \dot{X}) d\dot{X} \\ p(\dot{X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(X, \dot{X}) dX \end{aligned} \quad (26)$$

平均输出功率是评估系统能量采集性能的关键指标.根据方程(11),结合位移和速度的联合 PDF 的对称性可得:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E \left[ \left( \frac{\omega^2(H)}{\lambda^2 + \omega^2(H)} X \right)^2 \right] + \\ &E \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2(H)} \dot{X} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

进而,系统的平均输出功率表示为:

$$E(P) = \lambda \kappa E(Y^2) \quad (28)$$

### 3 稳态响应与参数分析

本节使用四阶龙格库塔算法进行数值模拟,将数值模拟的结果与第二节的理论结果进行对比,以验证解析解的有效性.通过研究风速、色噪声参数和系统参数对系统稳态响应的影响来探索系统的动力学特性.如果没有特殊说明,参数均设置为  $\kappa = 0.05, \lambda = 0.05, \zeta_m = 0.03, \mu = 0.03, a_1 = 2.3, a_3 = 18, \bar{U} = 1.4, D = 0.005, \tau = 0.5$ .图中符号“○, ×, △, \*”代表数值模拟结果,线条代表理论结果.

#### 3.1 PDF 结果与参数分析

图 2(a)和图 2(b)显示了联合 PDF 在三维视图和等高线图的结果.对于给定的参数,联合 PDF 存在一个包含所有概率密度最大值的环,展现出独特的“火山口”现象,图 2(c)和图 2(d)中位移和速度的边际 PDF  $p(X)$  和  $p(\dot{X})$  由于方程(26)中的数学形式而具有相似的曲线.以  $p(X)$  为例,在  $-0.8 \leq X \leq 0.8$  上的概率  $\int_{-0.8}^{0.8} p(X) dX \rightarrow 1$ ,说明 GEH 的振动位移被限制在区间  $[-0.8, 0.8]$  内.  $p(X)$  的两个峰值  $X_1 = \pm 0.41$  对称于  $X = 0$ ;并且  $p(X = X_1)$  远大于  $p(X = 0)$ ,这表明位移

在  $[X_{1-\Delta}, X_{1+\Delta}]$  的可能性大于  $[-\Delta, +\Delta]$  ( $\Delta \rightarrow 0^+$ ).  $p(X, \dot{X})$  中的火山口现象以及  $p(X)$  和  $p(\dot{X})$  中的峰都是由于驰振造成的.这是因为在给定的参数下,色噪声激励造成系统位移响应的微小波动,与色噪声激励相比,风激励占主导地位,此时 GEH 的主振动模式是驰振带来的准周期性振动<sup>[20]</sup>.

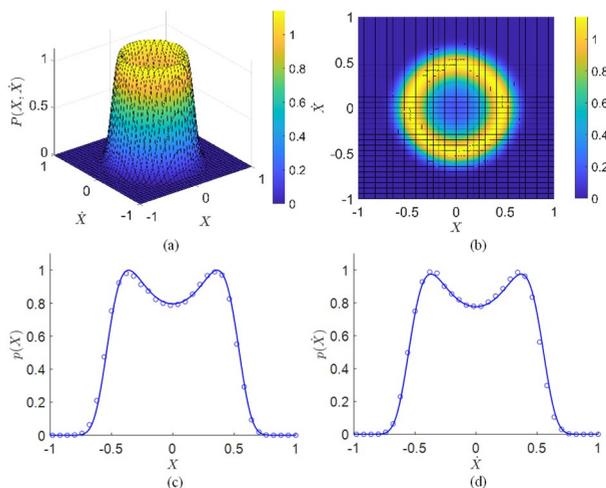


图 2 (a)联合 PDF 三维视图;(b)联合 PDF 等高线图;(c)位移 PDF;(d)速度 PDF

Fig.2 (a) The 3D plots of the joint PDF; (b) the contour map of the joint PDF; (c) the displacement PDF; (d) the velocity PDF

通过上述分析,发现系统的动态行为受风激励和色噪声激励的共同影响.因此,探索风速  $\bar{U}$  和色噪声  $\xi(T)$  参数对系统稳态响应的影响非常重要.

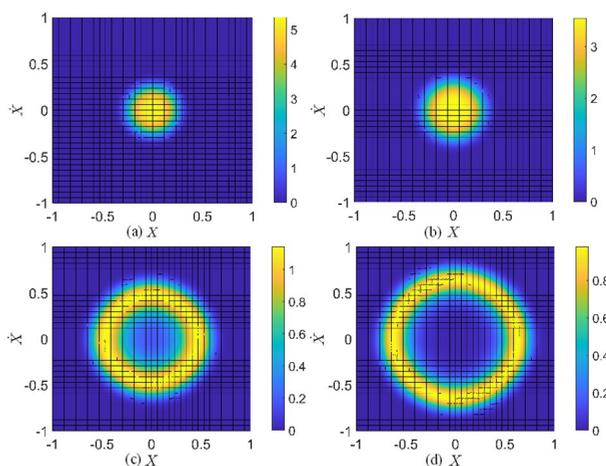


图 3 联合 PDF 等高线图.(a)  $\bar{U} = 0.3$ ;(b)  $\bar{U} = 0.5$ ;(c)  $\bar{U} = 1.4$ ;(d)  $\bar{U} = 1.8$

Fig.3 The contour map of the joint PDF. (a)  $\bar{U} = 0.3$ ;(b)  $\bar{U} = 0.5$ ;(c)  $\bar{U} = 1.4$ ;(d)  $\bar{U} = 1.8$

图 3 给出了不同风速下联合 PDF  $p(X, \dot{X})$  的等高线图.当  $\bar{U} = 0.3$  时,在原点处联合概率密度达到最大,此时风速小于驰振的临界风速  $\bar{U}_1 = 0.452$ ,

这表明驰振并未发生,主导振动由 $\xi(T)$ 控制,色噪声激励 $\xi(T)$ 造成系统位移响应的微小波动.当 $\bar{U} = 0.5$ 时, $2\zeta_m - 2\mu\alpha_1\bar{U} + \lambda\kappa/(\lambda^2 + \omega^2(H)) < 0$ 成立,但从图2(b)可以看出此时系统的主导振动仍然由 $\xi(T)$ 控制.随着风速的增加,气动不稳定性增强引起系统的准周期性振动增强,与色噪声激励相比,风激励占主导地位,因此 $p(X, \dot{X})$ 的等高线图呈现明显的环状(即3D视图中的火山口现象),且 $p(X, \dot{X})$ 的最大值在这个环带上.进一步增加风速,环带范围更宽且环带更窄.通过位移边缘PDF $p(X)$ 也可以清楚地看到这种演变结果如图4所示.

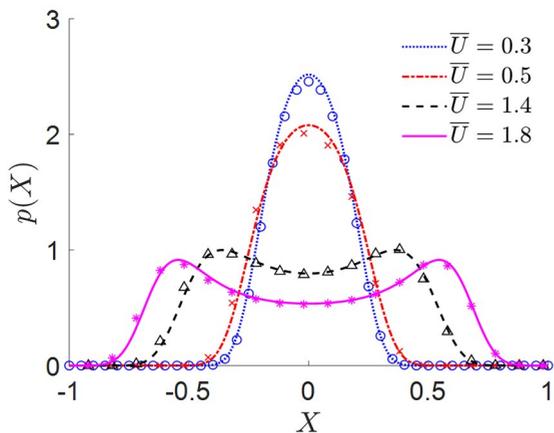


图4 不同风速 $\bar{U}$ 下的位移PDF

Fig.4 The displacement PDF for different wind speed  $\bar{U}$

图3和图4中的结果证实了风激励和色噪声激励都会影响系统的稳态响应.从物理上讲这些结果是符合预期的,当风速低于驰振的临界风速时,色噪声激励 $\xi(T)$ 的存在将造成系统位移的波动.当风速高于临界风速时,系统会表现出驰振的性质,此时系统的主振动模式取决于系统参数、噪声类型和风速大小.随着风速的进一步增加,风激励占主导地位,并且较高的风速会由于周期性振动的增强而削弱色噪声激励的影响,风速越高,波动越小.

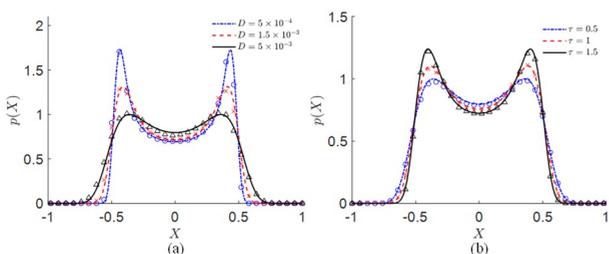


图5 (a)不同噪声强度 $D$ ; (b)不同噪声相关时间 $\tau$ 下的位移PDF  
Fig.5 The displacement PDF for different (a) noise intensity  $D$ ; (b) correlation time of noise  $\tau$

图5显示了风速 $\bar{U} = 1.4$ 时色噪声参数对 $p(X)$ 的影响.如图5(a)所示,可以看出PDF的形状结构保持不变,峰高随着噪声强度 $D$ 的增加而减小,说明系统在周期性振动的基础上发生波动的概率和范围都会增大,即噪声强度的增加可以削弱驰振带来的周期性振动.图5(b)显示了噪声相关时间 $\tau$ 对 $p(X)$ 的影响.可以看出相关时间的增加导致系统可能的振动范围减小,同时增强了驰振带来的周期性振动,这表明噪声相关时间 $\tau$ 的影响与噪声强度 $D$ 正好相反,因此噪声相关时间作为不可忽略的参数对系统的稳态响应结果有重要的影响.

### 3.2 平均输出功率与参数分析

本小节讨论了不同风速下色噪声激励和系统参数对系统平均输出功率 $E(P)$ 的影响.在接下来的研究中,除了被研究的参数外,其他参数都是固定的.研究结果可以评估噪声激励与系统内部设计对系统能量采集性能的影响.

首先研究色噪声参数对 $E(P)$ 的影响.如图6(a)所示,在较宽的风速范围内, $E(P)$ 均随着噪声强度 $D$ 的增加而增加,并且风速较低时, $E(P)$ 增加的更明显.这表明噪声强度的增加有助于提高系统的能量采集性能,尤其是在低风速下具有更高的优势.图6(b)显示了噪声相关时间 $\tau$ 对 $E(P)$ 影响.显然,较大的噪声相关时间 $\tau$ 不利于系统的能量采集,原因是较大的相关时间 $\tau$ 会减小系统位移可能的振动范围,这使得它在实际应用中不能被忽略.同时,理论和数值结果保持了良好的一致性,验证了随机平均法获得解析解的有效性.

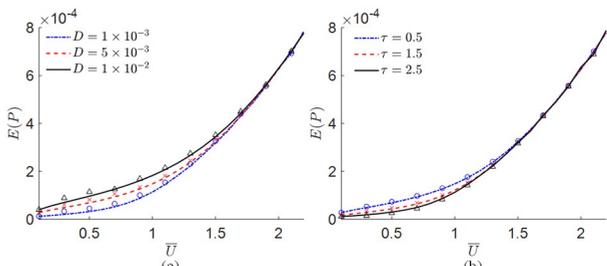


图6 (a)不同噪声强度 $D$ ; (b)不同噪声相关时间 $\tau$ 下风速与平均输出功率的关系

Fig.6 The average output power with the variation of wind speed under different (a) noise intensity  $D$ ; (b) correlation time of noise  $\tau$

图6也可以看出在低风速条件下 $E(P)$ 始终保持在较低的水平且增长缓慢,这说明了色噪声激励无法带来高效发电.当系统的振动模式由风激励控制时,驰振为系统带来了高效发电,随着风速的

进一步增加,  $E(P)$  开始迅速增长. 当  $\bar{U} > 2$  时, 图 6(a) 和图 6(b) 后半段曲线重合, 说明增强的风激励在显著提高系统平均输出功率的同时也削弱了色噪声激励的影响. 风速越高, 色噪声激励的贡献越小. 这是因为在给定的参数下, 与色噪声激励带来的无规律的、随机的振动相比, 驰振带来的准周期性振动具有明显的周期性和预测性, 使系统的响应更加稳定和可控, 这也与 3.1 小节的分析非常吻合.

接下来以  $D=0.005$ 、 $\tau=0.5$  为例, 对 GEH 的结构参数和电气参数进行研究.

图 7(a) 和图 7(c) 显示了机械阻尼比  $\zeta_m$  与  $E(P)$  的关系, 结果表明随着  $\zeta_m$  的增加  $E(P)$  迅速减小, 原因是增加  $\zeta_m$  会导致驰振的临界风速变大, 系统难以进入高效发电的状态, 进而削弱了系统的能量采集性能. 图 7(b) 和图 7(d) 可以看出风速会影响  $\mu$  与  $E(P)$  的关系, 当风速  $\bar{U}=0.5$  时  $\mu$  与  $E(P)$  是负相关的, 而当风速高于特定阈值时,  $\mu$  与  $E(P)$  的关系变为正相关. 值得注意的是, 该阈值明显大于驰振的临界风速, 这也印证了图 3 的结论, 当风速略高于临界风速时, 系统会表现出驰振的性质, 但系统的主导振动仍然由  $\xi(T)$  控制, 当风激励占主导地位时增加  $\mu$  有利于提高系统的能量采集性能. 以  $\mu = \rho L d^2 / 4m$  为例, 根据图 7 的结果, 并结合的表达式, 可根据实际应用环境优化钝体设计以及采集器质量.

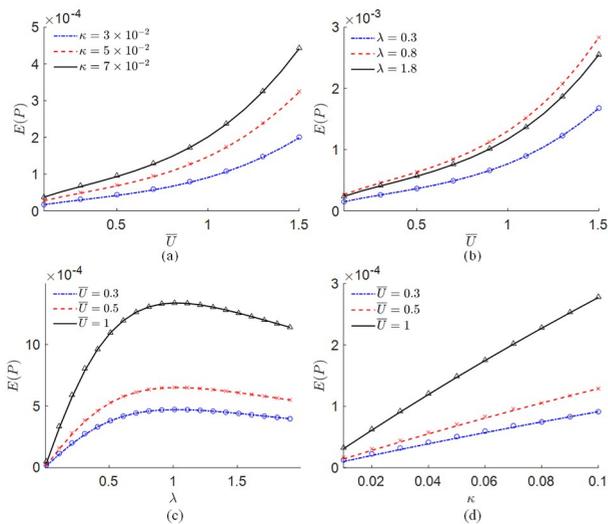


图 7 (a) 不同机械阻尼比  $\zeta_m$ ; (b) 不同质量比  $\mu$  下风速与平均输出功率的关系, 不同风速下, (c) 机械阻尼比  $\zeta_m$ ; (d) 质量比  $\mu$  与平均输出功率的关系

Fig.7 The average output power with the variation of wind speed under different (a) mechanical damping ratio  $\zeta_m$ ; (b) mass ratio  $\mu$ .

The average output power with the variation of (c) mechanical damping ratio  $\zeta_m$ ; (d) mass ratio  $\mu$  under different wind speed

图 8(a) 和图 8(c) 显示了机电耦合系数  $\kappa$  与  $E(P)$  的关系, 结果表明  $E(P)$  随着  $\kappa$  的增加而增加. 图 8(b)、(d) 显示了机电时间常数比  $\lambda$  与  $E(P)$  的关系, 从图 8(b) 可以看出, 随着  $\lambda$  的增加  $E(P)$  并没有稳定的增加或减小, 图 8(d) 的结果更清晰的展示了  $\lambda$  对  $E(P)$  的影响, 随着  $\lambda$  的增加,  $E(P)$  先迅速增加, 达到顶点后再逐渐减小. 以压电 GEH 为例,  $\lambda_1 = 1/R_1 C_p \omega_n$ , 通常, 电容  $C_p$  取决于所用的压电材料, 电阻  $R_1$  取决于设备的电路设计. 因此根据图 8 的结果, 结合平均输出功率的表达式 [方程式 (28)], 可以使用优化算法来获得电气参数  $\lambda$  的最优解, 为压电材料和设备电路的设计提供理论指导.

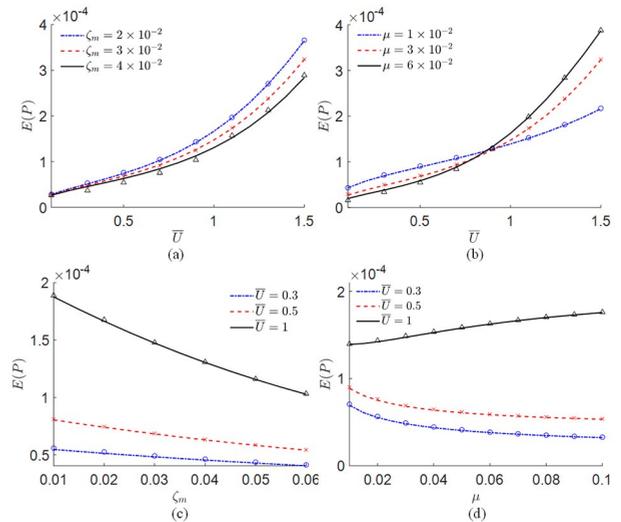


图 8 (a) 不同机电耦合系数  $\kappa$ ; (b) 不同机电时间常数比  $\lambda$  下风速与平均输出功率的关系, 不同风速下, (c) 机电耦合系数  $\kappa$ ; (d) 机电时间常数比  $\lambda$  与平均输出功率的关系

Fig.8 The average output power with the variation of wind speed under different (a) electromechanical coupling coefficient  $\kappa$ ; (b) electromechanical time constants ratio  $\lambda$ . The average output power with the variation of (c) electromechanical coupling coefficient  $\kappa$ ; (d) electromechanical time constants ratio  $\lambda$  under different wind speed

## 4 结论

本文研究了基于压电或电磁能量转换方式的驰振能量采集器在色噪声激励下的稳态响应, 分析了风速、色噪声参数和系统参数对系统稳态响应的影响. 结果表明, 在低风速时, 较大的噪声强度有利于扩大系统位移响应范围、提升能量采集性能; 而噪声相关时间对系统稳态响应的影响与噪声强度相反. 当系统的振动模式由风激励主导时, 系统的响应表现为带有附加噪声的周期性振动, 且风速越高波动越小; 此时较大质量比  $\mu$  有利于采集驰振产生的能量. 增加机电耦合系数  $\kappa$  或减小机械阻尼比  $\zeta_m$  有利于提升系统的能量采集性能. 而过大或过小

的机电时间常数比  $\lambda$  均不利于提高系统的平均输出功率;在应用时需要根据实际情况对系统参数使用优化算法,从而改善系统内部设计,实现更好的能量转换效率。

## 参考文献

- [1] MA X Q, ZHOU S X. A review of flow-induced vibration energy harvesters [J]. *Energy Conversion and Management*, 2022, 254: 115223.
- [2] LI Z Y, ZHOU S X, YANG Z C. Recent progress on flutter-based wind energy harvesting [J]. *International Journal of Mechanical System Dynamics*, 2022, 2(1): 82–98.
- [3] ABDIN Z, ALIM M A, SAIDUR R, et al. Solar energy harvesting with the application of nanotechnology [J]. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 2013, 26: 837–852.
- [4] 聂欣,张婷婷,靳艳飞. 窄带随机激励下三稳态压电俘能器的动力学特性与实验研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(3): 53–62.  
NIE X, ZHANG T T, JIN Y F. Dynamical behaviors and experimental analysis of tri-stable piezoelectric energy harvester under narrow-band random excitations [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(3): 53–62.(in Chinese)
- [5] ZHOU S X, LALLART M, ERTURK A. Multistable vibration energy harvesters: principle, progress, and perspectives [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, 528: 116886.
- [6] TAN T, HU X Y, YAN Z M, et al. Piezoelectromagnetic synergy design and performance analysis for wind galloping energy harvester [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2020, 302: 111813.
- [7] 刘仲琳,冷永刚,刘进军,等. 双稳悬臂梁电磁式振动能量采集研究 [J]. *振动与冲击*, 2019, 38(23): 126–133+151.  
LIU Z L, LENG Y G, LIU J J, et al. Electromagnetic type vibration energy harvester based on bi-stable cantilever beam [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(23): 126–133+151.(in Chinese)
- [8] HUANG D M, CHEN J Y, ZHOU S X, et al. Response regimes of nonlinear energy harvesters with a resistor-inductor resonant circuit by complexification-averaging method [J]. *Science China Technological Sciences*, 2021, 64(6): 1212–1227.
- [9] ZHANG Y L, WANG T Y, LUO A X, et al. Micro electrostatic energy harvester with both broad bandwidth and high normalized power density [J]. *Applied Energy*, 2018, 212: 362–371.
- [10] WANG J L, YURCHENKO D, HU G B, et al. Perspectives in flow-induced vibration energy harvesting [J]. *Applied Physics Letters*, 2021, 119(10): 100502.
- [11] 绳丽洁,王军雷. 流致振动压电能量俘获的研究进展 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(4): 12–23.  
SHENG L J, WANG J L. Research progress of piezoelectric energy harvesting from flow-induced vibration [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(4): 12–23.(in Chinese)
- [12] LI H T, REN H, CAO F, et al. Improving the galloping energy harvesting performance with magnetic coupling [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, 237: 107785.
- [13] HUANG D M, HAN J L, LI W, et al. Responses, optimization and prediction of energy harvesters under galloping and base excitations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 119: 107086.
- [14] DAI H L, ABDELKEFI A, JAVED U, et al. Modeling and performance of electromagnetic energy harvesting from galloping oscillations [J]. *Smart Materials and Structures*, 2015, 24(4): 045012.
- [15] BARRERO-GIL A, ALONSO G, SANZ-ANDRES A. Energy harvesting from transverse galloping [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(14): 2873–2883.
- [16] YANG Y W, ZHAO L Y, TANG L H. Comparative study of tip cross-sections for efficient galloping energy harvesting [J]. *Applied Physics Letters*, 2013, 102(6): 064105.
- [17] 李海涛,曹帆,任和,等. 流致振动能量收集的钝头体几何设计研究 [J]. *力学学报*, 2021, 53(11): 3007–3015.  
LI H T, CAO F, REN H, et al. The effect of geometric feature of bluff body on flow-induced vibration energy harvesting [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(11): 3007–3015. (in Chinese)
- [18] BIBO A, ALHADIDI A H, DAQAQ M F. Exploi-

- ting a nonlinear restoring force to improve the performance of flow energy harvesters [J]. *Journal of applied Physics*, 2015, 117(4): 045103.
- [19] WANG J L, GENG L F, ZHOU S X, et al. Design, modeling and experiments of broadband tristable galloping piezoelectric energy harvester [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2020, 36(3): 592—605.
- [20] YANG K, ABDELKEFI A, LI X, et al. Stochastic analysis of a galloping-random wind energy harvesting performance on a buoy platform [J]. *Energy Conversion and Management*, 2021, 238: 114174.
- [21] XU M, WANG B, LI X Y, et al. Dynamic response mechanism of the galloping energy harvester under fluctuating wind conditions [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 166: 108410.
- [22] LIU D, XU Y, LI J L. Probabilistic response analysis of nonlinear vibration energy harvesting system driven by Gaussian colored noise [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2017, 104: 806—812.
- [23] ZHANG Y, JIAO Z Y, DUAN X X, et al. Stochastic dynamics of a piezoelectric energy harvester with fractional damping under Gaussian colored noise excitation [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 97: 268—280.
- [24] SOBHANIRAD S, AFSHARFARD A. Improving application of galloping-based energy harvesters in realistic condition [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, 89: 313—328.