

FOPID 控制器对广义 VDP 随机系统 瞬态响应和可靠性的控制*

管煜¹ 李伟^{1†} 杨贵东¹ 娜塔莎·特索里维奇²

(1.西安电子科技大学 数学与统计学院,西安 710071)

(2.贝尔格莱德大学 机械工程学院,贝尔格莱德 11000,塞尔维亚)

摘要 本文研究了在 FOPID 控制器控制下的广义 Van Der Pol 随机系统瞬态概率密度函数和可靠性函数变化情况.首先,引入广义谐波函数,将快变变量转换为慢变变量,并利用分数阶微积分的性质,获得了 FOPID 控制器在慢变变量形式下的新表达式.在此基础上,由于径向神经网络具有准确性高,易于求解高维问题,求解速度快等优势,所以我们应用径向神经网络分别对该随机系统所满足的前向和后向柯尔莫哥洛夫方程进行求解,得到随机系统的瞬态概率密度函数和可靠性函数.最后,通过分析控制器中分数阶导数和分数阶积分对 Van Der Pol 随机系统响应和可靠性的影响,我们得出结论,分数阶控制器一定程度上会增强系统的响应,并导致分岔.

关键词 FOPID 控制器, 径向神经网络, 瞬态概率密度函数, 可靠性函数

中图分类号: O302

文献标志码: A

FOPID Controller for Transient Response and Reliability Control of Generalized VDP Stochastic Systems*

Guan Yu¹ Li Wei^{1†} Yang Guidong¹ Natasa Trisovic²

(1. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(2. Faculty of Mechanical Engineering, Department of Mechanics, University of Belgrade, Belgrade 11000, Serbia)

Abstract In this paper, the transient probability density function and reliability function of generalized Van Der Pol stochastic system controlled by FOPID controller are studied. Firstly, the generalized harmonic function is introduced to transform the fast variable into the slow variable, and the new expression of FOPID controller in the form of slow variable is obtained by using the properties of fractional calculus. On this basis, because the radial basis function neural network has the advantages of high accuracy, easy to solve high-dimensional problems, fast solving speed and so on, we apply the radial basis function neural network to solve the forward and backward Kolmogorov equations satisfied by the stochastic system respectively, and obtain the transient probability density function and reliability function. Finally, by analyzing the influence of fractional calculus in the controller on the response and reliability of Van Der Pol stochastic system, we obtain the conclusion that fractional order controller can enhance the response of the system to a certain extent and lead to bifurcation.

Key words FOPID controller, radial neural network, transient probability density function, reliability function

2022-12-07 收到第 1 稿,2022-12-18 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12272283)和中国—中东欧国家联合教育资助项目(2021122), National Natural Science Foundation of China (12272283), China CEEC Joint Education Funding Program(2021122).

† 通信作者 E-mail:liwei@main.xidian.edu.cn

引言

随着分数微积分在理论和应用方面的快速发展,分数阶微积分由于对粘弹性材料的完美模拟而扩展到随机动力学系统的模型^[1-3].因此,分数阶随机动力系统的分析成为近年来的热点问题之一.

由于分数微积分的成就,经典 PID 控制器引入到动力学系统之中,用于控制飞行器的振动^[4]、磁悬浮系统的稳定^[5]、随机系统可靠性的控制^[6]等.虽然系统可以得到较好的控制,但可调节参数较少,仍会有一定局限性,从而 Podlubny^[7]提出名为 FOPID 控制器,是一种更有效的控制工具,近年来逐渐用于一些确定性微分方程^[8-10]中的控制系统稳定性.此外 FOOPID 控制器还会应用在各个系统之中,其中, Riyadh^[11]分别将 PID 和 FOPID 控制器应用到核能源系统中,得到该系统下两个控制器的最优控制参数,在自动智能化光伏系统中, Firas^[12]加入 FOPID 控制器用于稳定传感器的电流和电压; Bapayya^[13]将 FOPID 控制器引入到传统无刷直流电机系统中,用于控制该电机的速度和转矩.作为传统积分阶 PID 控制器的新推广, FOPID 控制器包括线性比例算子、分数阶积分器和分数阶微分器,并且其中有五个可调参数以实现期望的控制目的.许多应用^[14-16]证明, FOPID 控制器在分数阶动态系统的控制方面比经典 PID 控制器表现得更好.

系统中的随机振动在结构工程^[17]、航空工程^[18]、土木工程^[19]等存在噪声激励(如受强气流干扰的飞机)的情况下的随机振动通常被建模为数学中的分数随机微分方程,噪声对动力学的累积影响可以分别通过关于系统响应的平稳或瞬态概率密度或随机可靠性来测量,它们相应地由 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程或者 Backward-Kolmogorov (BK) 方程进行分析描述.因此,获得系统响应知识的重要任务是求解 FPK 和 BK 方程.

通常,这两个方程都是具有非线性和变系数项的偏微分方程(FPK 方程是具有归一化条件、初始条件和边界条件的前向 Kolmogorov 方程,但 BK 是具有初始条件和边缘条件的后向 Kolmogorov 方程),它们必须基于一些基于网格的技术进行数值求解.经典计算方法之一是有限元法^[20-23].有限元方法高度依赖于计算域的网格具体化,网格的稀

疏性和密集性极大地影响了计算的准确性和效率.另一种常用的求解 FPK 和 BK 方程的方法是蒙特卡罗模拟(MCS)^[24],该方法基于大数定律,需要大量采样路径和长轨迹才能获得系统响应.MCS 是一种无网格方法,与边界条件无关.然而,它在很大程度上取决于生成的数据量和长时间的消耗, MCS 方法的解决方案有时不可靠或不太准确.

由于深度学习算法的快速发展,神经网络已广泛应用于图识别^[25]、语言处理^[26]、天气预报^[27]、智能驾驶^[28]等领域.数学家还尝试使用神经网络来获得 FPK 方程的解.例如, Xu^[29]使用人工神经网络(ANN)求解一类随机系统响应的平稳概率密度函数(PDF),他们建立的算法不需要任何插值和坐标变换. Li^[30]将神经网络应用于随机肿瘤免疫模型,用于求解 FPK 方程,以讨论肿瘤的平均首次通过时间(MFPT)问题.但这些神经网络求解中都有高维求解困难,耗时长等问题.为了解决上述问题,且由于多个高斯函数可以逼近任何概率分布,因此 Wang^[31]提出运用高斯径向基神经网络求解瞬态概率密度.

本文进一步将高斯径向基神经网络应用到含有 FOPID 控制器的广义 VDP 系统之中.将偏微分方程(FPK 方程和 BK 方程)与边界条件作为该神经网络的损失函数,使用初始条件求解系统初始参数,通过线性求和的方式构造该神经网络,以此来直接求得各个时刻的精确解.达到有效求解各个时刻瞬态概率密度函数和可靠性函数的目的.

1 含有 FOPID 控制器的广义 VDP 随机系统的近似

本文考虑了高斯白噪声激励下的广义 VDP 随机系统,旨在通过 FOPID 控制器研究系统的瞬态响应和可靠性.该系统对应的微分方程形式为:

$$\ddot{x} + (\beta_1 - \beta_2 x^2 + \beta_3 x^4)\dot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon u(x, \dot{x}) + W(t) \quad (1)$$

其中 ω_0 是广义 VDP 系统的固有频率, β_i ($i=1, 2, 3$) 是常数, ε 是一个标量参数,也是 FOPID 控制器的系数. $W(t)$ 是一个均值为零,相关函数是 $R(\tau) = E[W(t)W(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$ 的高斯白噪声, D 和 τ 分别表示噪声强度和相同时. $u(x, \dot{x}) = k_1 x(t) + k_2 D^\alpha x(t) + k_3 I^\beta x(t)$ 是 FOPID 控制器, $D^\alpha x(t)$ 是 α 阶的分数阶导数, $I^\beta x(t)$ 是 β 是阶的

分数阶积分.

在不同领域对于分数阶导数和分数阶积分有多种定义,在这些定义中, Caputo 定义在随机动力系统中更常用,因为 Caputo 定义只需要具有良好物理意义的整数阶导数.因此,我们也将本文中考虑 Caputo 意义下的分数阶导数和分数阶积分.

α 阶的分数阶导数定义如下:

$$D^\alpha x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau & n-1 < \alpha < n \\ x^{(n)}(t) & \alpha = n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2)$$

β 阶的分数阶积分定义为:

$$I^\beta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau, \beta > 0 \quad (3)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数,且 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

当 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 与 ϵ 同阶即系统受到的阻尼力为弱阻尼且高斯白噪声激励为弱激励时,系统为准守恒系统,响应为准周期状态.该条件下,可以应用广义谐和函数将系统的快变变量转化为慢变变量:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(t) \cos \varphi(t) \\ \dot{\dot{x}}(t) = -a(t) \omega_0 \sin \varphi(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\varphi(t) = \omega_0 t + \theta(t)$, $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 系统响应的振幅和相位,均为慢变变量.由于分数阶导数和积分定义的复杂性,通常情况下针对 $0 < \alpha, \beta < 1$ 的情况进行讨论.该情况下,应用 Gamma 函数的性质 $\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \pi / \sin \pi \alpha$ 代替其定义式(2),分数阶导数 $D^\alpha x(t)$ 可以用二重积分表示.进行变换后,该分数阶导数可以重写为一个新的函数 $\psi(y, t)$ 的广义积分,其表达式如下^[6]:

$$\psi(y, t) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} a(t) \left[\frac{\omega_0^2 \cos \varphi(t) - \omega_0 y^{\frac{1}{\alpha}} \sin \varphi(t)}{\omega_0^2 + y^{\frac{2}{\alpha}}} \right] + c_1 e^{-ty^{\frac{1}{\alpha}}} \quad (5)$$

常数 c_1 可由 $\psi(y, 0) = 0$ 求出.再将 $\psi(y, t)$ 的表达式代入 $D^\alpha x(t) = \int_0^\infty \psi(y, t) dy$ 中得到

$$D^\alpha x(t) \approx a \cos \varphi \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi \alpha}{2} - a \sin \varphi \omega_0^\alpha \sin \frac{\pi \alpha}{2} + \frac{c}{t^\alpha} \Gamma(\alpha + 1) \quad (6)$$

因 $D^\alpha x(t) = D^{(n)} I^{(n-\alpha)} x(t) = I^{(n-\alpha)} D^{(n)} x(t)$, 分数阶积分由慢变变量表示为:

$$I^\beta x(t) \approx a \sin \varphi \omega_0^{-\beta} \sin \frac{\pi \beta}{2} + a \cos \varphi \omega_0^{-\beta} \cos \frac{\pi \beta}{2} +$$

$$\frac{\sin \pi \beta}{\pi} \frac{c}{t^{1-\beta}} \Gamma(1-\beta) \quad (7)$$

将公式(4)回代到公式(9)和公式(10)中,得到分数阶导数和积分项可等效记为经典阻尼力和恢复力之和, FOPID 控制器 $u(x, \dot{x})$ 近似等价于 $\tilde{u}(x, \dot{x})$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, \dot{x}) = & (k_1 + k_2 \omega_0^\alpha \cos \frac{\pi \alpha}{2} + k_3 \omega_0^{-\beta} \cos \frac{\pi \beta}{2}) x + \\ & (k_2 \omega_0^{\alpha-1} \sin \frac{\pi \alpha}{2} - k_3 \omega_0^{-\beta-1} \sin \frac{\pi \beta}{2}) \dot{x} \end{aligned} \quad (8)$$

从而系统(1)的等效随机系统为:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (\beta_1 - \beta_2 x^2 + \beta_3 x^4) \dot{x} + \omega_0^2 x = \\ \epsilon \tilde{u}(x, \dot{x}) + W(t) \end{aligned} \quad (9)$$

2 高斯径向基神经网络

考虑到随机系统的响应和可靠性主要通过求解 FPK 方程和 BK 方程得到瞬态概率密度函数和可靠性函数进行研究,且任何平滑的概率密度函数都可以应用足够多的高斯函数以任意精度来进行逼近^[32],所以本文结合高斯函数的优势,引入高斯径向基神经网络对此问题进行求解讨论.

2.1 神经网络结构

假设是一个很小的时间步长.在第步中,我们将瞬态概率密度或可靠性函数 $f(k \Delta \tau, x_0)$ 表示为 $\tilde{f}[x_0, \omega(k)]$.我们用具有高斯激活函数的神经网络解来表示:

$$\tilde{f}[x_0, \omega(k)] = \sum_{i=1}^{N_1} \omega_i(k) g(x_0, \mu_i, \Sigma_i) \quad (10)$$

其中是高斯函数的个数,模型参数形成一个向量 $\omega(k) = [\omega_1(k), \omega_2(k), \dots, \omega_{N_1}(k)]^T$.解的时间依赖性是通过系数 $\omega(k)$ 的时间依赖性进行表现. $g(x_0, \mu_i, \Sigma_i)$ 是一个高斯函数形式的神经元,其均值为 μ_i 和协方差矩阵 Σ_i .

$$\begin{aligned} g(x, \mu_i, \Sigma_i) = & \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 (\sigma_i^2)^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_i^2} \|x - \mu_i\|^2\right] \\ = & \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{i1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{i1}^2} (x_1 - \mu_{i1})^2\right] \times \\ & \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{i2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_{i2}^2} (x_2 - \mu_{i2})^2\right] \end{aligned} \quad (11)$$

图 1 为该二维系统下高斯径向基神经网络结构图,其中 g_i 表示 $g(x_0, \mu_i, \Sigma_i)$.

初始时刻 $t=0$, 考虑初始点为 $x_0=(0,0)$, 概率密度函数为 δ 函数, 即在初始点处为 1, 为此, 我们将初始时刻近似看做高斯函数, 将 $(0,0)$ 点处的高斯函数权重设为 1, 来进行迭代计算 k 时刻的 $c(k)$, 以便求得时刻的概率密度函数。

2.3 可靠性损失函数

可靠性或者首次穿越时间概率是衡量随机系统是否能够安全可靠地工作的一个重要问题。一般来说, 随机可靠性的目的是确定一个由噪声激发的动力系统在给定的时间间隔内保持在一个预先指定的安全域内的概率。

在随机振动领域, 有关于单自由度可靠性函数安全域的类型有单边型, 双边型和包络型如图 1。由于求解方法相同, 本文只针对包络型安全域问题进行讨论, 设置安全域范围为 $S=[-2,2] \times [-2,2]$, 在 S 上设置间隔为 0.05 的网格, 高斯函数的均值为各个网格的中点, 方差为间隔值。在求解可靠性的问题上, 我们将采样分成两部分, 一部分在安全域内 S 随机均匀取值 N_2 个点, 一部分在安全域的边界 ∂S 取值 M_2 个点。

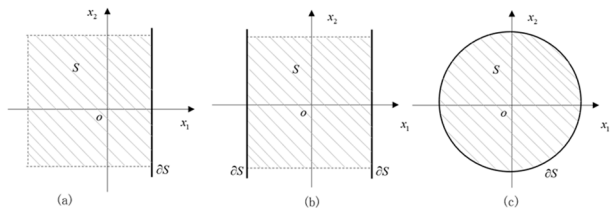


图 2 安全域类型 (a) 单边型; (b) 双边型; (c) 包络型

Fig.2 Security domain type (a) unilateral; (b) bilateral type; (c) envelope type

该系统可靠性函数可求解下式 BK 方程得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t_0} &= -\dot{x}_0 \frac{\partial R}{\partial x_0} - a_2 \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_0} - D \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{x}_0^2} \\ &= L_{BK}[R] \end{aligned} \quad (22)$$

与计算概率密度函数步骤相同, 将 RBF 神经网络解对时间求偏导并进行差分, 移项后得到神经网络误差 $e_0[x_0, \omega(k)]$:

$$\begin{aligned} e_0[x_0, \omega(k)] &= \tilde{f}[x_0, \omega(k-1)] + \\ &\sum_{i=1}^{N_1} s_i^0(x_0) \omega_i(k) \end{aligned} \quad (23)$$

式中

$$\begin{aligned} e_0[x_0, \omega(k)] &= \tilde{f}[x_0, \omega(k-1)] + \\ &\sum_{i=1}^{N_1} s_i^0(x_0) \omega_i(k) \end{aligned} \quad (24)$$

RBFNN 求解可靠性函数时除了需要满足 BK 方程之外, 还需满足下面的边界条件和初始条件:

$$\begin{aligned} s_i^0(x_0) &= -g(x_0, \mu_i, \Sigma_i) + \\ &\Delta \tau L_{BK}[g(x_0, \mu_i, \Sigma_i)] \end{aligned} \quad (25)$$

于是我们将 BK 方程误差值 $e_0[x_0, \omega(k)]$ 和边界条件构成可靠性函数的损失函数:

$$\begin{aligned} \tilde{f}[\omega(k), x_0] &= 0, \quad x_0 \in \partial S \\ \tilde{f}[\omega(0), x_0] &= 1, \quad x_0 \in S \end{aligned} \quad (26)$$

当使得损失函数 J_0 最小时, 即神经网络解在满足各个时间段边界条件的情况下, BK 方程的均方误差项达到最小。将式(23)带入式(26)中, 损失函数 J_0 进一步化简写成矩阵形式为:

$$\begin{aligned} J_0[\omega(k), x_0] &= \frac{1}{2} \omega^T [\mathbf{A}_0 + \lambda(k) \mathbf{R}_b] \omega(k) + \\ &\omega^T \mathbf{B}_0 \omega(k-1) + d_0(k-1) \end{aligned} \quad (27)$$

$\mathbf{A}_0 \in R^{N_1 \times N_1}$, $\mathbf{B}_0 \in R^{N_1 \times N_1}$, 被定义为与 $s_i(x_{0i})$ 有关的矩阵, $\mathbf{R}_b \in R^{N_1 \times N_1}$ 被定义为与 $g_l(y_{0i})$ 有关的矩阵, 具体定义如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= [s_{ii}^0] = [s_i^0(x_{0i})] \\ \mathbf{G}_0 &= [G_{ii}^0] = [g(x_{0i}, \mu_i, \Sigma_i)], \quad x_{0i} \in S \\ \mathbf{G}_b &= [G_{ij}^0] = [g(y_{0i}, \mu_i, \Sigma_i)], \quad y_{0i} \in \partial S \\ \mathbf{A}_0 &= \mathbf{S}_0 \mathbf{S}_0^T, \mathbf{B} = \mathbf{S}_0 \mathbf{G}_0^T, \mathbf{R}_b = \mathbf{G}_b \mathbf{G}_b^T \end{aligned}$$

$$d_0(k-1) = \frac{1}{2} \omega^T(k-1) \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T \omega(k-1)$$

将损失函数 $J_0[\omega(k), x_0]$ 最小化, 即分别对 $\omega(k)$ 和 $\lambda(k)$ 求偏导数令其等于 0 知:

$$\frac{\partial J_0}{\partial \omega(k)} = [\mathbf{A}_0 + \lambda(k) \mathbf{R}_b] \omega(k) + \mathbf{B}_0 \omega(k-1) = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial \lambda(k)} = \frac{1}{2} \omega^T \mathbf{R}_b \omega(k) = 0 \quad (29)$$

由式(29)可知, $\omega(k)$ 为 \mathbf{R}_b 零空间的任意向量, 于是令 \mathbf{Z} 为 \mathbf{R}_b 的零空间, \mathbf{Z} 不为方阵, 有 $\omega(k) = \mathbf{Z} \mathbf{v}(k)$, $\mathbf{v}(k)$ 为任意向量, 于是求解 $\omega(k)$ 的问题转化为求解 $\mathbf{v}(k)$ 的问题, 将 $\omega(k) = \mathbf{Z} \mathbf{v}(k)$ 带入式(28)中求解得到 $\mathbf{v}(k)$ 的迭代公式为:

$$\mathbf{v}(k) = -(\mathbf{Z}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{Z}^T \mathbf{B}_0 \mathbf{Z}) \mathbf{v}(k-1) \quad (30)$$

针对可靠性函数初始条件, 对初始时刻的 $\omega(0)$ 进行求解, 且 $\omega(0)$ 仍为 \mathbf{R}_b 零空间的任意向量即满足可靠性函数的边界条件, 构造初始时刻的损失函数为:

$$\begin{aligned}
 J_0^0 &= \sum_{j=1}^{N_2} \frac{1}{2} \{R[x_{0j}, \boldsymbol{\omega}(0)] - 1\}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{v}(0)^T \mathbf{Z}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T \mathbf{Z} \mathbf{v}(0) - \\
 &\quad \mathbf{v}(0)^T \mathbf{Z}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{e} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e}, \quad x_{0j} \in S \quad (31)
 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{e} \in R^{N_2 \times 1}$ 且每个元素 e_i 都为 1. 最小化 J_0^0 可以得到 $\mathbf{v}(0)$:

$$\mathbf{v}(0) = (\mathbf{Z}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{e} \quad (32)$$

同样地, 当采样点个数足够大时, 约为高斯函数个数的 4 倍时, $\mathbf{Z}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{Z}$ 和 $\mathbf{Z}^T \mathbf{G}_0 \mathbf{G}_0^T \mathbf{Z}$ 均为可逆矩阵. 根据式(30), 式(32)和 $\boldsymbol{\omega}(k) = \mathbf{Z} \mathbf{v}(k)$ 得到各个时刻的 $\boldsymbol{\omega}(k)$ 后, 带入式(10)即可得到随机系统各个时刻的可靠性函数.

3 分数阶微积分对随机系统的控制

图 2 第一行是 $t=5s$ 时刻下, α, β 分别为 0.1、0.5、0.9 时的概率密度函数图, 可以看到随着 FOPID 控制器中分数阶导数和分数阶积分的同时增大, PDF 极值先变小再变大, 极值由 1 到 3 再到 1 的过程, 产生分岔. 随着时间的增大, 中点极值越来越小, 两侧极值逐渐产生, 并且概率密度函数几乎不再产生变化, 如第二行 $t=30s$ 时刻所示, 系统

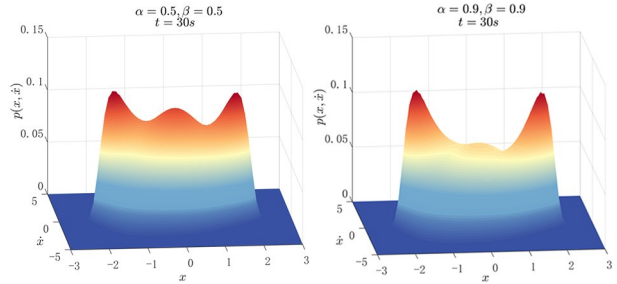
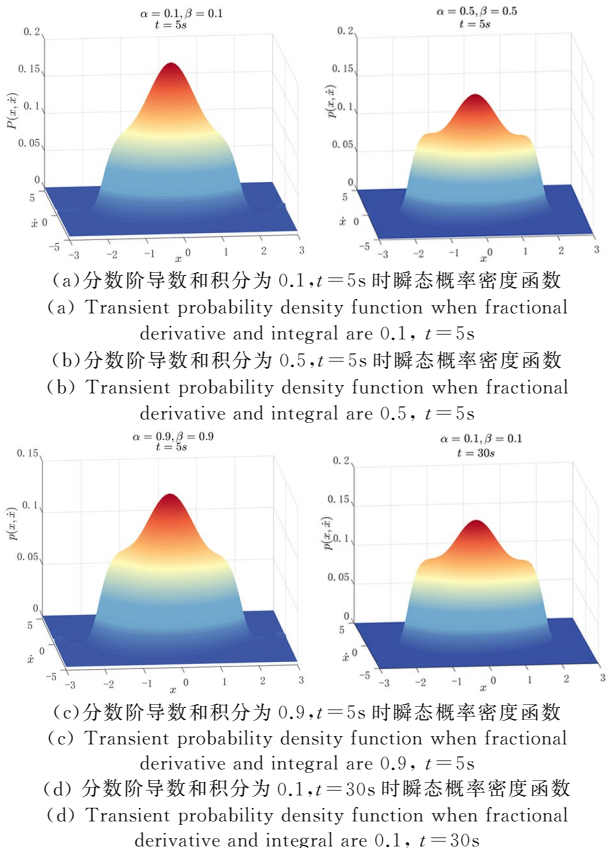


图 3 $t=5s$ 和 $t=30s$ 时刻不同分数阶导数和分数阶积分下的瞬态概率密度图

Fig.3 Transient probability density diagram under different fractional derivative and fractional integral at $t=5s$ and $t=30s$

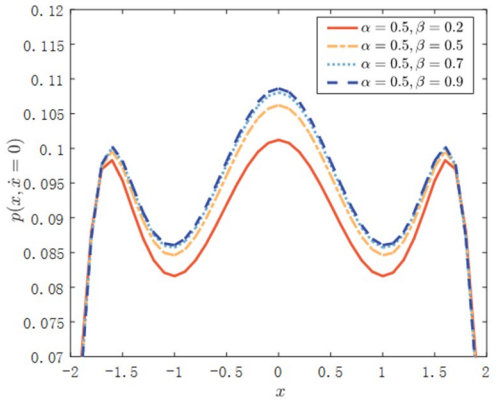
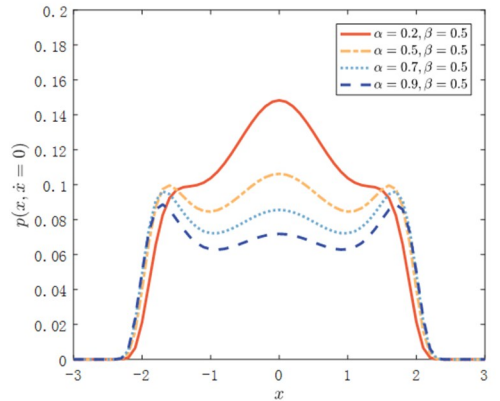


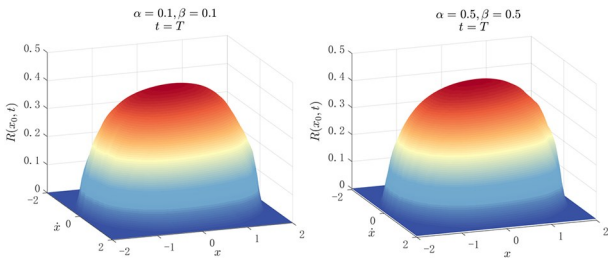
图 4 分数阶导数和分数阶积分分别变化下的平稳概率密度截面图
Fig.4 Section of stationary probability density with fractional derivative and fractional integral changing respectively

的瞬态概率密度趋向平稳概率密度. 当 α, β 同时增大时, 概率密度函数极值由一个峰变为三个峰最后变为两个峰.

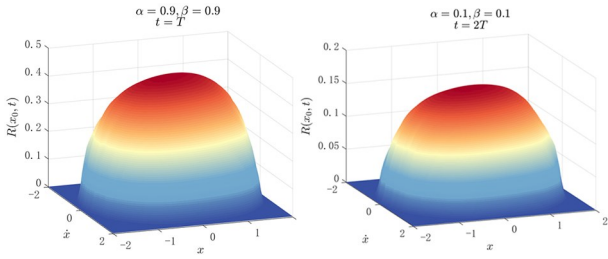
固定分数阶积分 $\beta=0.5$, 令分数阶导数 α 变化时, 平稳概率密度函数截面图如图 3 左, 可以看到随着 α 越来越大, $p(x, \dot{x})$ 在 $\dot{x}=0$ 的截面图取值

越来越小,且产生随机分岔现象,极值点个数由1个变为3个,且有变为2个的趋势.固定分数阶导数 $\alpha=0.5$,分数阶积分 β 发生变化时,平稳概率密度函数截面图如图3所示,变化幅度不大,平稳概率密度函数一直是三个峰的状态,但概率密度值随着 β 的变大越来越小.

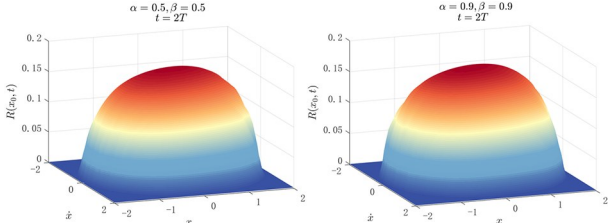
设置安全域为包络型安全域下可靠性函数的变化相对于系统概率密度函数的变化不大,图4展示了在不同时间下,可靠性函数随分数阶导数和分数阶积分的变化情况.



(a) 分数阶导数和积分为 0.1, $t=T$ 时可靠性函数函数
(a) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.1, $t=T$
(b) 分数阶导数和积分为 0.5, $t=T$ 时可靠性函数函数
(b) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.5, $t=T$



(c) 分数阶导数和积分为 0.9, $t=T$ 时可靠性函数函数
(c) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.9, $t=T$
(d) 分数阶导数和积分为 0.1, $t=2T$ 时可靠性函数函数
(d) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.1, $t=2T$



(e) 分数阶导数和积分为 0.5, $t=2T$ 时可靠性函数函数
(e) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.5, $t=2T$
(f) 分数阶导数和积分为 0.9, $t=2T$ 时可靠性函数函数
(f) Reliability function when fractional derivative and integral are 0.9, $t=2T$

图5 $t=T$ 和 $t=2T$ 时刻不同分数阶导数和分数阶积分下的可靠性函数图

Fig.5 Reliability function diagram under different fractional derivative and fractional integral at $t=T$ and $t=2T$

不同分数阶导数和分数阶积分下,可靠性函数

在固定时刻 $2T$ 时的截面图如图5所示,可以看到 α, β 同时增大时,可靠性函数值也略有增加.

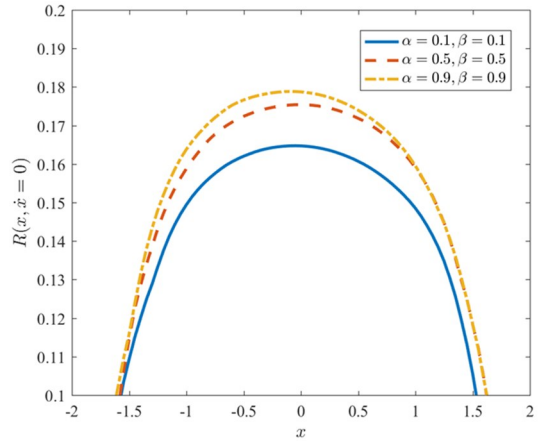


图6 分数阶导数和积分同时变化下可靠性函数截面图
Fig.6 Section of reliability function under simultaneous change of fractional derivative and integral

$\alpha=0.5, \beta=0.5$ 情况下,可靠性函数随时间的变化情况如图5,随着时间的增大,系统穿越安全域的可能性即首次穿越概率也就越大,因此在安全域内的概率即可靠性函数也就越来越小,从初始时刻的1逐渐减小到0.

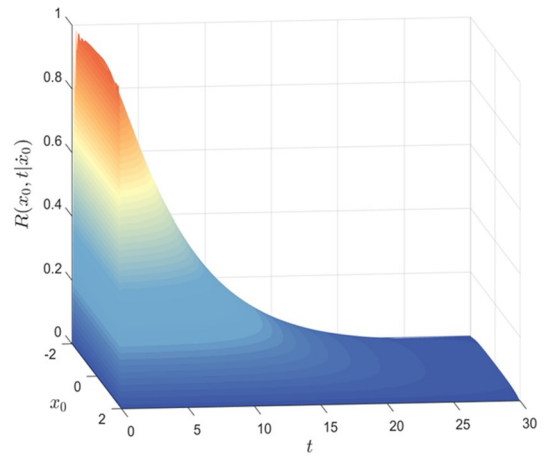


图7 可靠性函数随时间变化图

Fig.7 Graph of reliability function versus time

4 结论

本文对高斯白噪声激励下含有 FOPID 控制器的广义 VDP 系统的响应和可靠性,通过高斯径向基神经网络进行求解讨论,并分析了不同分数阶导数和分数阶积分值下随机系统的性质.

首先,通过广义变换将分数阶导数和分数阶积分近似等价于恢复力和阻尼力和的形式,然后提出高斯径向基神经网络分别对随机系统的 FPK 方程和 BK 方程进行求解,得到其瞬态概率密度函数和

可靠性函数.最后讨论了分数阶导数和分数阶积分对可靠性函数和概率密度函数峰值的影响.

结果表明,分数阶微积分对概率密度影响较大,且会导致分岔,当分数阶微积分同时增大时,概率密度中心峰值减小,两侧峰值显现并增大.基于此可知,通过调整 FOPID 控制器中的分数阶微积分参数,随机系统响应的演化可得到理想控制.FOPID 控制器在本文参数下对可靠性函数的影响微小,但随分数阶微积分同时增大,可靠性函数仍有微小增大,且可靠性函数随着时间的增加单调递减到 0.

参考文献

- [1] 侯璟,马少娟,沈琼.分数阶随机 Duffing 系统的 Hopf 分岔. 动力学与控制学报 [J], 2014, 12(4): 309-314.
HOU J, MA S J, SHEN Q. Hopf bifurcation of fractional-order stochastic duffing system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2014, 12(4): 309-314. (in Chinese)
- [2] 梁霄,陈林聪,赵珧冰.宽带噪声激励下带有分数阶控制器的强非线性系统的随机平均技术 [J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(4): 70-78.
LIANG X, CHEN L C, ZHAO Y B. Stochastic averaging technique of strongly nonlinear systems with fractional-order controller under the wide-band noise excitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(4): 70-78. (in Chinese)
- [3] 司辉,郑永爱.分数阶混沌系统的自适应预测同步 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 8-12.
SI H, ZHENG Y A. Adaptive predictive synchronization of fractional order chaotic systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 8-12. (in Chinese)
- [4] 黄永安,邓子辰.基于神经网络与 PID 控制的挠性结构的混合控制研究 [J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 47-51.
HUANG Y A, DENG Z C. Hybrid control research on flexible structure based on neural network and PID method [J]. Journal of Dynamics and Control, 2005, 3(1): 47-51. (in Chinese)
- [5] 施晓红,卢晓慧,余龙华.奇异摄动磁悬浮系统的串级 PID 控制稳定性研究 [J]. 动力学与控制学报, 2007, 5(3): 282-284.
SHI X H, LU X H, SHE L H. Stability research on singularly perturbed maglev system with cascade PID control [J]. Journal of Dynamics and Control, 2007, 5(3): 282-284. (in Chinese)
- [6] 李伟,张美婷,赵俊锋,黄冬梅.含有分数阶 PID 控制器的随机动力系统可靠性分析 [J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(1): 65-72.
LI W, ZHANG M T, ZHAO J F, HUANG D M. Reliability analysis of stochastic dynamical systems with fractional order PID controller [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(1): 65-72. (in Chinese)
- [7] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.
- [8] ABOELELA M, AHMED M F, DORRAH H T. Design of aerospace control systems using fractional PID controller [J]. Journal of Advanced Research, 2012, 3(3): 225-232.
- [9] ZENG G Q, CHEN J, DAI Y X, et al. Design of fractional order PID controller for automatic regulator voltage system based on multi-objective extremal optimization [J]. Neurocomputing, 2015, 160(21): 173-184.
- [10] SONDHI S, HOTE Y V. Fractional order PID controller for load frequency control [J]. Energy Conversion and Management, 2014, 85: 343-353.
- [11] HASAN R, MASUD M S, HAQUE N, et al. Frequency control of nuclear-renewable hybrid energy systems using optimal PID and FOPID controllers [J]. Heliyon, 2022, 8(11): e11770.
- [12] RAHEEM F S, BASIL N. Automation intelligence photovoltaic system for power and voltage issues based on Black Hole Optimization algorithm with FOPID [J]. Measurement: Sensors, 2023, 25: 100640.
- [13] KOMMULA B, KOTA V. An Effective Sustainable control of brushless DC motor using firefly algorithm-artificial neural network based FOPID Controller [J]. Sustainable Energy Technologies and Assessments, 2022, 52: 102097
- [14] LOKENATH D. Recent applications of fractional calculus to science and engineering [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, 2003(54): 3413-3442.
- [15] KIKUCHI M, OKABE Y. Renormalization, self-similarity, and relaxation of order-parameter struc-

- ture in critical phenomena [J]. *Physical Review B, Condensed Matter*, 1987, 35(10):5382—5384.
- [16] MEHAUTE A L, CREPY G. Introduction to trans-fer and motion in fractal media: the geometry of ki-netics [J]. *Solid State Ionics*, 1983, 9:17—30.
- [17] 肖青松, 雷家艳, 施伟, 等. 基于随机动力响应时程统-计指标的结构损伤初步识别 [J]. *动力学与控制学-报*, 2019, 17(6):567—574.
- XIAO Q S, LEI J Y, SHI W, et al. Time-based stochastic dynamic response statistical characteris-tics for preliminary identification of structural dam-age [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(6):567—574. (in Chinese)
- [18] AL-BAHKALI E A, ELKENANI H, SOULI M. 6-Failure and fatigue life due to random vibration in aircraft applications [M]. *Multiphysics Simulations in Automotive and Aerospace Applications*. New York, American Academic Press, 2021:131—154.
- [19] LIU T, LIANG W, WANG Q, et al. Random vi-bration study of functionally graded porous curved beams with elastically restrained ends [J]. *Engineer-ing Structures*, 2022, 270:114874.
- [20] 白长青, 张红艳. 不确定性转子系统的随机有限元建-模及响应分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2012, 10(3): 283—288.
- BAI C Q, ZHANG H Y. Stochastic finite element modeling and response analysis of uncertain rotor systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(3):283—288. (in Chinese)
- [21] 梁岗, 曹沛, 唐炯, 等. 基于移动有限元法的裂纹梁振-动分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(2):136—141.
- LIANG G, CAO P, TANG J, et al. Vibration anal-ysis of a cracked beam bases on moving finite ele-ment approach [J]. *Journal of Dynamics and Con-trol*, 2017, 15(2):136—141. (in Chinese)
- [22] 随岁寒, 李成. 输流管道弯曲和振动的有限元分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(4):83—90.
- SUI S H, LI C. The finite element analysis on ben-ding and vibration of the fluid-conveying pipes [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(4):83—90. (in Chinese)
- [23] 朱成秀, 随岁寒, 彭丹华, 等. 轴向运动三阶剪切变形-板自由振动的有限元模型及应用 [J]. *动力学与控制-学报*, 2022, 20(5):49—58.
- ZHU C X, SUI S H, PENG D H, et al. Finite ele-ment modeling and application on free vibration of axially moving third order shear deformation plates [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(5): 49—58. (in Chinese)
- [24] SINGH B N, BISHT A K S, PANDIT M K, et al. Nonlinear free vibration analysis of composite plates with material uncertainties: a Monte-Carlo simula-tion approach [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 324(1):126—138.
- [25] WANG Z F, YU Y F, WANG J, et al. Convolu-tional neural-network-based automatic dam-surface seepage defect identification from thermograms col-lected from UAV-mounted thermal imaging camera [J]. *Construction and Building Materials*, 2022, 323:126416.
- [26] HOUIDI Z B, ROSSI D. Neural language models for network configuration: opportunities and reality check [J]. *Computer Communications*, 2022, 193: 118—125.
- [27] ABHISHEK K, SINGH M P, GHOSH S, et al. Weather forecasting model using artificial neural network [J]. *Procedia Technology*, 2012, 4: 311—318.
- [28] SATHISHKUMAR H, PARTHASARATHY S S. A novel neural network intelligent controller for vec-tor controlled induction motor drive [J]. *Energy Procedia*, 2017, 138:692—697.
- [29] XU Y, ZHANG H, LI Y, et al. Solving fokker-planck equation using deep learning [J]. *Chaos*, 2020, 30(1):013133.
- [30] LI W, ZHANG Y, HUANG D M, et al. Study on stationary probability density of a stochastic tumor-immune model with simulation by ann algorithm [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, 159:112145.
- [31] WANG X, JIANG J, HONG L, et al. Random vi-bration analysis with radial basis function neural net-works [J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2022, 10(5):1385—1394.
- [32] 袁礼海, 李钊, 宋建社. 利用高斯混合模型实现概率-密度函数逼近 [J]. *无线电通信技术*, 2007, 33(2): 20—22.
- YUAN L H, LI Z, SONG J S. Probability density function approximation using gaussian mixture model [J]. *Radio Communications Technology*, 2007, 33(2):20—22. (in Chinese)