

# 周期激励下广义离散 Duffing 系统的多稳态分析<sup>\*</sup>

冷萌萌 钱有华<sup>†</sup>

(浙江师范大学 数学科学学院, 金华 321004)

**摘要** 针对一类周期激励下的广义离散 Duffing 系统,运用快慢分析方法,对系统状态进行数值模拟,通过分岔图和时间历程图对系统进行分析,得到不同参数下系统所表现出的新型簇发振荡模式,并探讨其与连续 Duffing 系统之间的联系.系统的簇发振荡模式被分为两类,一类是当慢变量穿过 Fold 分岔点或混沌激变点,吸引子发生转迁所诱发的各种对称式簇发振荡,另一类则是当慢变量无法穿过 Fold 分岔点或混沌激变点,由延迟 Flip 分岔所诱发的各种非对称式簇发振荡.

**关键词** 广义离散 Duffing 系统, 簇发振荡, 混沌激变, 快慢分析法, 分岔分析

中图分类号:O193

文献标志码:A

## Multi-Stability Analysis of Generalized Discrete Duffing Systems under Periodic Excitation<sup>\*</sup>

Leng Mengmeng Qian Youhua<sup>†</sup>

(School of Mathematical Sciences, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

**Abstract** For a class of generalized discrete Duffing systems with periodic excitations, a fast-slow analysis method is applied to simulate the system by time course diagrams and bifurcation diagrams to obtain new types of cluster oscillations under different parameters and to explore the connection between them and continuous Duffing systems. The cluster oscillation modes are divided into two categories, one is the symmetric cluster oscillation induced by the attractor transitions when the slow variable crosses the Fold bifurcation point or the chaotic excitation point, and the other is the asymmetric cluster oscillation induced by the delayed Flip bifurcation when the slow variable cannot cross the Fold bifurcation point or the chaotic excitation point.

**Key words** generalized discrete duffing systems, cluster-emitting oscillations, chaotic excitations, fast and slow analysis method, bifurcation analysis

### 引言

Duffing 系统是一类典型的非线性振动系统<sup>[1]</sup>,现实中的许多问题都可以利用该系统来研究,如结构振动控制<sup>[2]</sup>、超声检测<sup>[3]</sup>、电力系统振荡分析<sup>[4]</sup>等.

由于系统中周期激励项,即慢变控制参数的存在,与一般的非线性系统相比,Duffing 系统具有独特的动力学行为,如簇发振荡<sup>[5]</sup>.针对该现象,Rinzel 等<sup>[6]</sup>学者提出了快慢分析方法,用于解释其动力学机理.Izhikevich<sup>[7]</sup>则用该方法对簇发振荡进行了分类讨论.王东梅等<sup>[8]</sup>利用快慢分析方法探究了

状态时滞反馈与多频混合激励联合作用下 Duffing 振子所产生的振荡模式. 由于与连续系统相比, 离散系统更便于进行数值计算, 近年来离散 Duffing 系统受到了学者们的广泛关注. 陈志强等<sup>[9]</sup>利用欧拉方法将 Duffing-Holmes 方程变换为离散系统, 研究了离散系统中所出现的分岔行为与混沌现象. 石建飞等<sup>[10]</sup>通过数值计算揭示了 Duffing 系统的最大 Lyapunov 指数在双参数平面上的分布特性. 陈振阳等<sup>[11,12]</sup>围绕非自治离散 Duffing 系统的复杂张弛振荡进行了分类讨论. 张莹等<sup>[13]</sup>对二维离散 Duffing 映射的全局动力学行为进行了深入研究. 张真真等<sup>[14]</sup>解释了 2 个激励作用下的 Duffing-van der Pol 振子的复杂动力学行为.

在以往研究的基础上, 本文进一步针对更高次的广义离散 Duffing 系统, 通过快慢分析方法和数值模拟, 分析由慢变激励所引起的系统发生在不同类型吸引子间的转迁现象, 分类讨论由 Fold 分岔、延迟 Filp 分岔和混沌激变所诱发的各种簇发振荡模式, 并探讨其与相应连续 Duffing 系统之间存在的联系.

本文组织结构如下: 在第 1 节中, 给出了连续 Duffing 系统的离散化形式; 第 2 节研究了不同参数条件下快子系统的分岔行为; 第 3 节给出了不同分岔行为下系统所表现出的各种对称式和非对称式簇发振荡模式; 第 4 节中探究了相应的连续 Duffing 系统的动力学表现以及与离散系统的联系; 最后, 总结全文.

## 1 连续 Duffing 系统的离散化

考虑如下的一个连续 Duffing 系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a_1 x + a_2 y + a_3 y^3 + \\ \quad a_4 y^5 + a_5 y^7 + f \cos \Omega t \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $x(t), y(t)$  是实函数,  $\Omega$  是外力  $f \cos(\Omega t)$  的频率,  $f > 0$  是激励振幅,  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  为物理参数.

令  $f \cos(\Omega t) = \beta$ , 利用欧拉方法将方程(1)转化为下列形式:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \Delta t y_n \\ y_{n+1} = -a_1 x_n \Delta t + (1 + a_2 \Delta t) y_n + \\ \quad a_3 \Delta t y_n^3 + a_4 \Delta t y_n^5 + a_5 \Delta t y_n^7 + \Delta t \beta \end{cases} \quad (2)$$

令  $z_n = x_n + \Delta t y_n$ , 则方程(2)可以转化为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = [-a_1 (\Delta t)^2 - 1 - a_2 \Delta t] x_n + \\ \quad (2 + a_2 \Delta t) z_n + a_3 \frac{(z_n - x_n)^3}{\Delta t} + \\ \quad a_4 \frac{(z_n - x_n)^5}{(\Delta t)^3} + a_5 \frac{(z_n - x_n)^7}{(\Delta t)^5} + (\Delta t)^2 \beta \end{cases} \quad (3)$$

令:

$$x_{n+1}^* = \frac{x_{n+1} - x_n}{(\Delta t)^2}, \quad y_{n+1}^* = \frac{z_{n+1} - x_{n+1}}{(\Delta t)^2}.$$

经过尺度变换, 方程(3)可化为:

$$\begin{cases} x_{n+1}^* = y_n^* \\ y_{n+1}^* = -a_1 x_n + (1 + a_2 \Delta t) y_n^* + \\ \quad a_3 (\Delta t)^3 y_n^{*3} + a_4 (\Delta t)^5 y_n^{*5} + \\ \quad a_5 (\Delta t)^7 y_n^{*7} + \beta \end{cases} \quad (4)$$

令:

$$\begin{aligned} a &= -a_1, \\ b &= 1 + a_2 \Delta t, \\ c &= a_3 \Delta t^3, \\ d &= a_4 \Delta t^5, \\ e &= a_5 \Delta t^7. \end{aligned}$$

并且为方便书写, 去掉星号, 则方程(4)变为:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = a x_n + b y_n + c y_n^3 + \\ \quad d y_n^5 + e y_n^7 + \beta \end{cases} \quad (5)$$

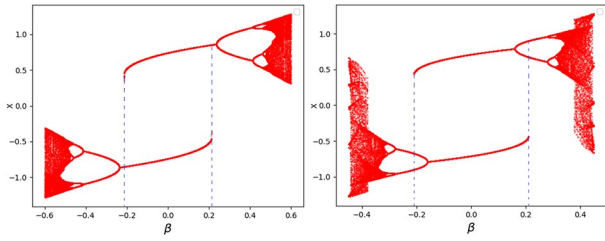
其中,  $a, b, c, d, e$  是实参数,  $\beta = f \cos(\Omega t)$  为快子系统中的控制参数, 而在慢子系统中则表示为  $Z_n = f \cos(\Omega t)$ , 外部激励频率取 0.001.

## 2 快子系统的分岔分析

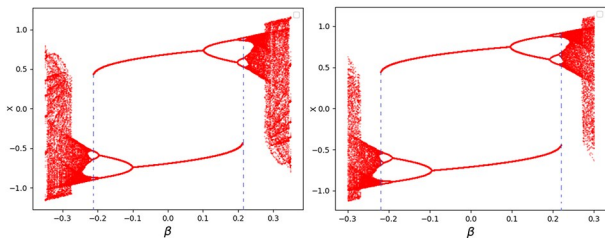
吸引子的转迁行为, 往往会导致系统呈现复杂的簇发振荡模式. 而转迁则主要由快子系统的分岔行为决定, 因此对快子系统的分岔分析至关重要. 本节以  $\beta$  为分岔参数, 利用快慢分析方法, 分析系统(5)的快子系统在不同参数条件下的分岔行为. 且为了便于分析, 固定  $a = -0.17, b = 1.9, e = 0.2$  (除非特殊说明).

情形一: 单倍周期吸引子到单倍周期吸引子的转迁, 如图 1(a), 在 Fold 分岔点  $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.213$  附近, 单倍周期吸引子和单倍周期吸引子共存, 系统处于双稳态. 但是随着  $\beta$  值的增大或减小, 当  $\beta >$

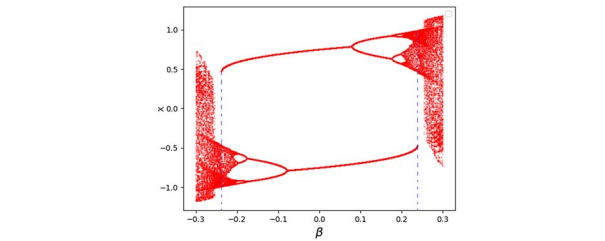
0.213或 $\beta < -0.213$ ,超过临界值时,其中一个单倍周期吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了单一的单倍周期运动。



(a)  $c = -1.2, d = -0.35$ , 单倍—单倍  
(a)  $c = -1.2, d = -0.35$ , Single-Single  
(b)  $c = -1.2, d = -0.6$ , 单倍—二倍  
(b)  $c = -1.2, d = -0.6$ , Single-Period-2



(c)  $c = -1.1, d = -1$ , 单倍—四倍  
(c)  $c = -1.1, d = -1$ , Single-Period-4  
(d)  $c = -1.01, d = -1$ , 单倍—八倍  
(d)  $c = -1.01, d = -1$ , Single-Period-8



(e)  $c = -0.8, d = -1$ , 单倍—混沌  
(e)  $c = -0.8, d = -1$ , Single-Chaos

图1 关于 $\beta$ 的分岔图

Fig.1 Bifurcation diagram about  $\beta$

情形二:单倍周期吸引子到二倍周期吸引子的转迁,如图1(b),在Fold分岔点 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.209$ 附近,单倍周期吸引子和二倍周期吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.209$ 或 $\beta < -0.209$ ,超过临界值时,单倍周期吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了二倍周期运动。

情形三:单倍周期吸引子到四倍周期吸引子的转迁,如图1(c),在Fold分岔点 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.212$ 附近,单倍周期吸引子和四倍周期吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.212$ 或 $\beta < -0.212$ ,超过临界值时,单倍周期吸引子突然消失.双稳态消失,系统进入了四倍周期运动。

情形四:单倍周期吸引子到八倍周期吸引子的转迁,如图1(d),在Fold分岔点 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.219$ 附近,单倍周期吸引子和八倍周期吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.219$ 或 $\beta < -0.219$ ,超过临界值时,单倍周期吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了八倍周期运动。

情形五:单倍周期吸引子到混沌吸引子的转迁,如图1(e),在Fold分岔点 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.238$ 附近,单倍周期吸引子和混沌吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.238$ 或 $\beta < -0.238$ ,超过临界值时,单倍周期吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了混沌运动。

情形六:混沌吸引子到单倍周期吸引子的转迁,如图2(a),在混沌激变点 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.113$ 处,混沌吸引子和单倍周期吸引子共存.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.113$ 或 $\beta < -0.113$ ,超过边界值时,混沌吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了单倍周期运动。

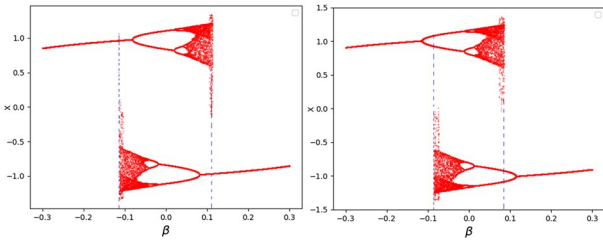
情形七:混沌吸引子到二倍周期吸引子的转迁,如图2(b),在混沌激变点 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.085$ 处,混沌吸引子和二倍周期吸引子共存.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.085$ 或 $\beta < -0.085$ ,超过边界值时,混沌吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了二倍周期运动。

情形八:混沌吸引子到四倍周期吸引子的转迁,如图2(c),在混沌激变点 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.044$ 处,混沌吸引子和四倍周期吸引子共存.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.044$ 或 $\beta < -0.044$ ,超过边界值时,混沌吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了四倍周期运动。

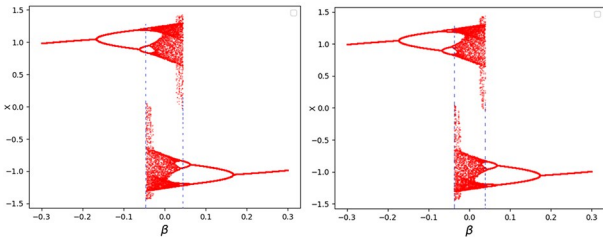
情形九:混沌吸引子到八倍周期吸引子的转迁,如图2(d),在混沌激变点 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.038$ 处,混沌吸引子和八倍周期吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.038$ 或 $\beta < -0.038$ ,超过边界值时,混沌吸引子突然消失,双稳态消失,系统进入了八倍周期运动。

情形十:混沌吸引子到混沌吸引子的转迁,如图2(e),在混沌激变点 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.019$ 处,混沌吸引子和混沌吸引子共存,系统处于双稳态.但是随着 $\beta$ 值的增大或减小,当 $\beta > 0.019$ 或 $\beta < -0.019$ ,超过边界值时,其中一个混沌吸引子突然消失,双稳态

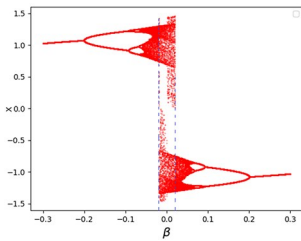
消失,系统进入了单一的混沌运动.



(a)  $c=0.1, d=-1$ , 混沌—单倍  
 (a)  $c=0.1, d=-1$ , Chaos-Single  
 (b)  $c=0.2, d=-1$ , 混沌—二倍  
 (b)  $c=0.2, d=-1$ , Chaos-Period-2



(c)  $c=0.34, d=-1$ , 混沌—四倍  
 (c)  $c=0.34, d=-1$ , Chaos-Period-4  
 (d)  $c=0.355, d=-1$ , 混沌—八倍  
 (d)  $c=0.355, d=-1$ , Chaos-Period-8



(e)  $c=0.42, d=-1$ , 混沌—混沌  
 (e)  $c=0.42, d=-1$ , Chaos-Chaos

图 2 关于  $\beta$  的分岔图

Fig.2 Bifurcation diagram about  $\beta$

### 3 耦合快慢系统动力学行为

#### 3.1 Fold 分岔\延迟 Flip 分岔

上一节探讨了快子系统的分岔表现,发现其为典型的 S 形曲线,在 Fold 分岔点  $\beta_{FB}^{\pm}$  处,单倍周期吸引子可以与倍周期吸引子或混沌吸引子共存.本节将结合时间历程图,进一步讨论在此分岔行为下系统所表现的多种簇发振荡模式.

##### 情形一: 单倍—单倍周期型

从前面的分析可以看出,为了实现轨迹上下分支间的转迁,应允许慢变量穿过临界值  $\beta_{FB}^{\pm}$ ,由分岔图 1(a)可知,该情形下临界值  $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.213$ ,则可令振幅  $f=0.260$ .如图 3(a),当  $Z_n$  逐渐增大至超过  $\beta_{FB}^+$  时,处于下半支的轨线由于 Fold 分岔转迁到上半支的单倍周期吸引子;而当  $Z_n$  在到达最大值 0.26,后逐渐减小至超过  $\beta_{FB}^-$  时,处于上半支的轨线则会转迁到下半支的单倍周期吸引子,形成一类单

倍—单倍的对称式簇发振荡模式.

而当  $f=0.210$ ,略小于  $\beta_{FB}^{\pm}=0.213$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 3(b),观察发现,受初值影响,系统只在上半稳定支运动,形成一类单倍—单倍的非对称簇发振荡模式.

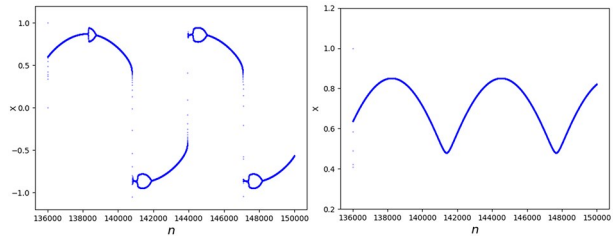


图 3  $c=-1.2, d=-0.35$ , 时间历程图  
 Fig.3  $c=-1.2, d=-0.35$ , Time diagram

##### 情形二: 单倍—二倍周期型

由分岔图 1(b)可知,该情形下临界值  $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.209$ ,则可令振幅  $f=0.260$ ,使得慢变量穿过临界值.如图 4(a),当  $Z_n$  逐渐增大至超过  $\beta_{FB}^+$  时,处于下半支的轨线由于 Fold 分岔转迁到上半支的二倍周期吸引子;而当  $Z_n$  到达最大值 0.26,后逐渐减小至超过  $\beta_{FB}^-$  时,处于上半支的轨线则转迁到下半支的二倍周期吸引子,形成一类单倍—二倍的对称式簇发振荡模式.

而当  $f=0.190$ ,略小于  $\beta_{FB}^{\pm}=0.209$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 4(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,并且当慢变量不断增加、穿过 Filp 分岔点时,系统出现延迟分岔现象.由于延迟的作用,单倍周期轨道与二倍周期轨道间出现滞后.而当延迟结束时,轨线则迅速进入二倍周期运动轨道.当  $Z_n$  不断减小,“反向”越过 Flip 分岔点时,即系统由二倍周期振荡进入单倍周期轨道时,尽管能观察到一定的延迟,但相应延迟量较小.因此,只考虑“正向”延迟,最终形成一类单倍—二倍的非对称簇发振荡模式.

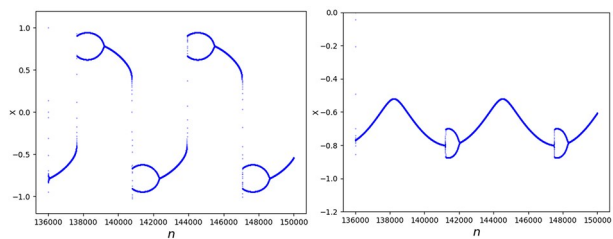


图 4  $c=-1.2, d=-0.6$ , 时间历程图  
 Fig.4  $c=-1.2, d=-0.6$ , Time diagram

##### 情形三: 单倍—四倍周期型



由分岔图 1(c)可知,该情形下临界值 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.212$ ,则可令振幅 $f = 0.220$ ,使得慢变量穿过临界值.如图 5(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_{FB}^+$ 时,处于下半支的轨线转迁到了上半支的四倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.22,后逐渐减小至超过 $\beta_{FB}^-$ 时,处于上半支的轨线则转迁到下半支的四倍周期吸引子,形成一类单倍—四倍的对称式簇发振荡模式.

而当 $f = 0.210$ ,略小于 $\beta_{FB}^+ = 0.212$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 5(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成一类单倍—四倍的非对称簇发振荡模式.

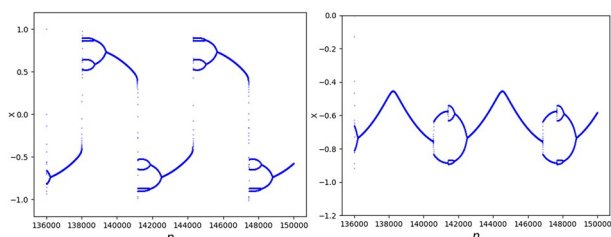


图 5  $c = -1.1, d = -1$ , 时间历程图  
Fig.5  $c = -1.1, d = -1$ , Time diagram

#### 情形四：单倍—八倍型

由分岔图 1(d)可知,该情形下临界值 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.219$ ,则可令振幅 $f = 0.220$ ,使得慢变量穿过临界值.如图 6(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_{FB}^+$ 时,处于下半支的轨线转迁到了上半支的八倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.22,后逐渐减小至超过 $\beta_{FB}^-$ 时,处于上半支的轨线则转迁到下半支的八倍周期吸引子,形成了一类单倍—八倍的对称式簇发振荡模式.

而当令 $f = 0.216$ ,略小于 $\beta_{FB}^+ = 0.219$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 6(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成了一类单倍—八倍的非对称簇发振荡模式.

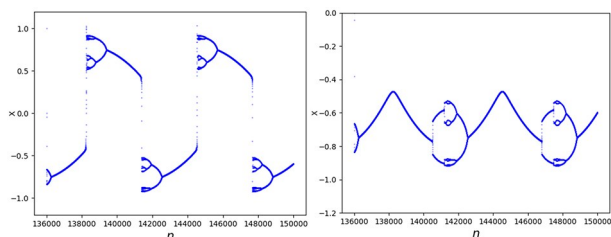


图 6  $c = -1.01, d = -1$ , 时间历程图  
Fig.6  $c = -1.01, d = -1$ , Time course diagram

#### 情形五：单倍—混沌型

由分岔图 1(e)可知,该情形下临界值 $\beta_{FB}^{\pm} = \pm 0.238$ ,则可令振幅 $f = 0.250$ ,使得慢变量穿过临界

值.如图 7(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_{FB}^+$ 时,处于下半支的轨线转迁到上半支的混沌吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.25,后逐渐减小至超过 $\beta_{FB}^-$ 时,处于上半支的轨线则转迁到下半支的混沌吸引子,形成一类单倍—混沌的对称式簇发振荡模式.

而当 $f = 0.230$ ,略小于 $\beta_{FB}^+ = 0.238$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 7(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成了一类单倍—混沌的非对称簇发振荡模式.

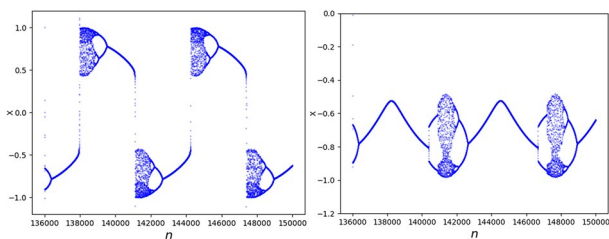


图 7  $c = -0.8, d = -1$ , 时间历程图  
Fig.7  $c = -0.8, d = -1$ , Time diagram

### 3.2 混沌激变—延迟 Flip 分岔

快子系统的分岔结果表明,在一定的参数条件下,会发生混沌吸引子的边界激变现象.在边界值 $\beta_c^{\pm}$ 附近,混沌吸引子会与多个周期轨道或混沌共存,但是当参数值超过边界值后,混沌吸引子会向原本共存的倍周期吸引子或混沌转迁,形成簇发振荡.

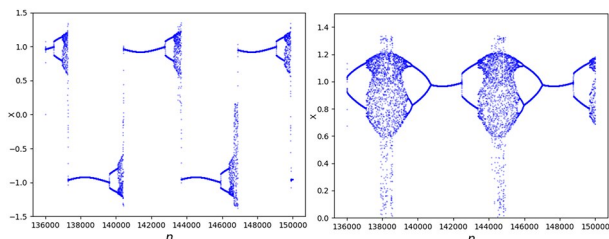


图 8  $c = 0.1, d = -1$ , 时间历程图  
Fig.8  $c = 0.1, d = -1$ , Time course diagram

#### 情形一：混沌—单倍周期型

由分岔图 2(a)可知,该情形下临界值 $\beta_c^{\pm} = \pm 0.113$ ,则可令振幅 $f = 0.200$ ,使得慢变量穿过边界值.如图 8(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_c^+$ 时,处于上半支的轨线由于混沌激变转迁到下半支的单倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.2,后减小至超过 $\beta_c^-$ 时,处于下半支的轨线又转迁到上半支的单倍周期吸引子,形成一类混沌—单倍的对称式簇发振荡模式.而当 $f = 0.110$ ,略小于 $\beta_c^+ = 0.113$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 8(b),观察发现,系统只在上半稳定支运动,形成了一类混沌—单倍的非

对称簇发振荡模式.

情形二:混沌-二倍周期型

由分岔图 2(b)可知,该情形下临界值 $\beta_c^\pm = \pm 0.085$ ,则可令振幅 $f = 0.120$ ,使得慢变量穿过边界值.如图 9(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_c^+$ 时,处于上半支的轨线转迁到下半支的二倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.12,后逐渐减小至超过 $\beta_c^-$ 时,处于下半支的轨线则又转迁到上半支的二倍周期吸引子,形成一类混沌-二倍的对称式簇发振荡模式.而当 $f = 0.080$ ,略小于 $\beta_c^+ = 0.085$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 9(b),观察发现,系统只在上半稳定支运动,形成了一类混沌-二倍的非对称簇发振荡模式.

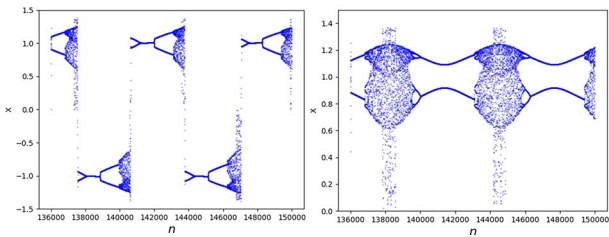


图 9  $c = 0.2, d = -1$ , 时间历程图

Fig.9  $c = 0.2, d = -1$ , Time course diagram

情形三:混沌-四倍周期型

由分岔图 2(c)可知,该情形下边界值 $\beta_c^\pm = \pm 0.044$ ,则可令振幅 $f = 0.046$ ,使得慢变量穿过边界值.如图 10(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_c^+$ 时,处于上半支的轨线转迁到下半支的四倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.046,后逐渐减小至超过 $\beta_c^-$ 时,处于下半支的轨线又转迁到上半支的四倍周期吸引子,形成一类混沌-四倍的对称式簇发振荡模式.而当 $f = 0.040$ ,略小于 $\beta_c^+ = 0.044$ ,慢变量无法穿过边界值时,得到图 10(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成了一类混沌-四倍的非对称簇发振荡模式.

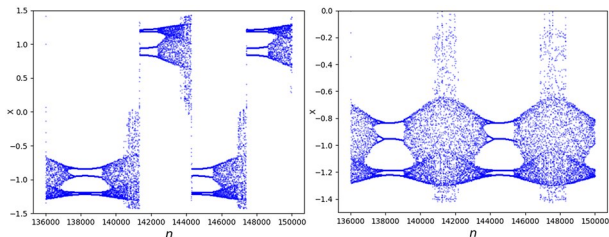


图 10  $c = 0.34, d = -1$ , 时间历程图

Fig.10  $c = 0.34, d = -1$ , Time course diagram

情形四:混沌-八倍周期型

由分岔图 2(d)可知,该情形下边界值 $\beta_c^\pm = \pm 0.038$ ,则可令振幅 $f = 0.040$ ,使得慢变量穿过边界值.如图 11(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_c^+$ 时,处于上半支的轨线由于混沌激变转迁到下半支的八倍周期吸引子;而当 $Z_n$ 到达最大值 0.04,后逐渐减小至超过 $\beta_c^-$ 时,处于下半支的轨线又转迁到上半支的八倍周期吸引子,形成一类混沌-八倍的对称式簇发振荡模式.而当 $f = 0.037$ ,略小于 $\beta_c^+ = 0.038$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 11(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成了一类混沌-八倍的非对称簇发振荡模式.

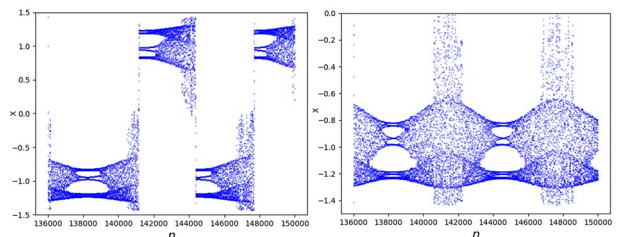


图 11  $c = 0.355, d = -1$ , 时间历程图

Fig.11  $c = 0.355, d = -1$ , Time course diagram

情形五:混沌-混沌型

由分岔图 2(e)可知,该情形下边界值 $\beta_c^\pm = \pm 0.019$ ,则可令振幅 $f = 0.060$ ,使得慢变量穿过边界值.如图 12(a),当 $Z_n$ 逐渐增大至超过 $\beta_c^+$ 时,处于上半支的轨线转迁到下半支的混沌吸引子;而当 $Z_n$ 在到达最大值 0.06,后逐渐减小至超过 $\beta_c^-$ 时,处于下半支的轨线又转迁到上半支的混沌吸引子,形成一类混沌-混沌的对称式簇发振荡模式.而当 $f = 0.016$ ,略小于 $\beta_c^+ = 0.019$ ,慢变量无法穿过临界值时,得到图 12(b),观察发现,系统只在下半稳定支运动,形成了一类混沌-混沌的非对称簇发振荡模式.

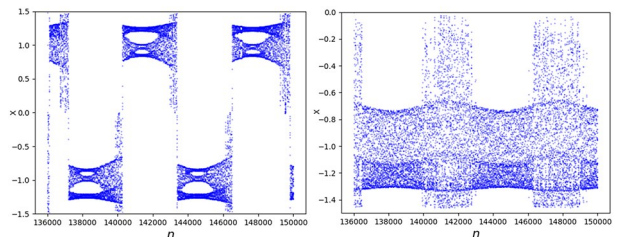


图 12  $c = 0.42, d = -1$ , 时间历程图

Fig.12  $c = 0.42, d = -1$ , Time course diagram

#### 4 对应连续 Duffing 系统

为方便分析,固定 $a_1 = 0.2, a_2 = 0.1, a_3 = 0, a_4$

$= -1, a_5 = -2$ , 对与上述离散 Duffing 系统相对应的连续 Duffing 系统进行研究, 发现随着参数的变化, 连续 Duffing 系统主要呈现两种动力学现象: 极限环和准周期运动. 将连续 Duffing 系统和离散 Duffing 系统所表现出的动力学现象对应来看, 发现连续 Duffing 系统的极限环可对应于离散 Duffing 系统的单倍周期运动, 而准周期运动则对应于多倍周期运动, 这是动力系统随控制参数变化由规则运动通向混沌运动的两条典型途径.

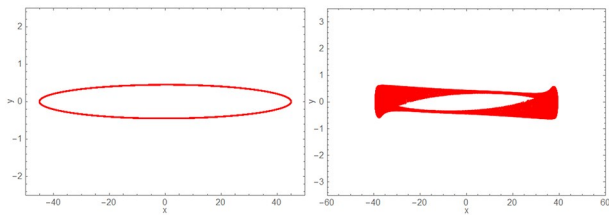


图 13 相图  
Fig.13 Phase diagram

## 5 结语

对七次广义离散 Duffing 系统进行探究, 发现在系统的 Fold 分岔点处, 单倍周期吸引子可与倍周期吸引子或混沌吸引子共存. 并且当周期激励振幅充分大, 慢变量可以穿过 Fold 分岔点时, 会导致单倍周期吸引子发生转迁, 形成各类对称式簇发振荡行为. 而当慢变量无法穿过 Fold 分岔点时, 延迟 Flip 分岔现象则会导致周期轨道间发生滞后, 进而诱发各种非对称式簇发振荡行为. 并且在某些参数取值下, 系统会出现混沌吸引子的边界激变现象, 在边界值附近, 混沌吸引子可与倍周期吸引子或混沌吸引子共存. 同理, 受振幅影响, 混沌吸引子的转迁行为会诱导形成多种对称式和非对称式簇发振荡模式. 研究结果丰富了广义离散 Duffing 系统的簇发振荡行为, 为进一步探讨具有高次非线性项的系统, 如微机电系统微束模型<sup>[15]</sup>等, 提供了一定的理论参考.

## 参考文献

- [1] KARAMI H, KARIMI S, BONAKDARI H, et al. Predicting discharge coefficient of triangular labyrinth weir using extreme learning machine, artificial neural network and genetic programming [J]. Neural Computing and Applications, 2018, 29(11): 983-989.
- [2] 万洪林, 李向红, 申永军, 等. 两尺度 Duffing 系统的动力吸振器减振研究 [J]. 力学学报, 2022, 54(11): 3136-3146.
- WAN H L, LI X H, SHEN Y J, et al. Study on vibration reduction of dynamic vibration absorbers for two-scale Duffing system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(11): 3136-3146. (in Chinese)
- [3] 饶子玉, 武静. BP 神经网络和 Duffing 系统结合的超声导波管道检测研究 [J]. 价值工程, 2022, 41(19): 101-104.
- RAO Z Y, WU J. Research on ultrasonic guided wave pipeline detection by combined with BP neural network and Duffing system [J]. Value Engineering, 2022, 41(19): 101-104. (in Chinese)
- [4] 赵妍, 李志民, 李天云. 电力系统低频振荡监测的 Duffing 振子可停振动系统法 [J]. 电工技术学报, 2015, 30(20): 159-167.
- ZHAO Y, LI Z M, LI T Y. Duffing oscillator order stopping oscillation system method for monitoring of low-frequency oscillation in power system [J]. Transactions of China Electrotechnical Society, 2015, 30(20): 159-167. (in Chinese)
- [5] SUN J, WU Z H. Isolating spatiotemporally local mixed Rossby-gravity waves using multi-dimensional ensemble empirical mode decomposition [J]. Climate Dynamics, 2020, 54(3): 1383-1405.
- [6] RINZEL J. Bursting oscillations in an excitable membrane model [M]. Ordinary and Partial Differential Equations. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985: 304-316.
- [7] IZHIKEVICH E M. Neural excitability, spiking and bursting [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(6): 1171-1266.
- [8] 王东梅, 余跃, 张正娣. 时滞反馈与多频激励联合作用下 Duffing 振子的快慢动力学 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(1): 37-46.
- WANG D M, YU Y, ZHANG Z D. Fast-slow dynamics of Duffing oscillator with time-delay feedback under multi-frequency excitations [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(1): 37-46. (in Chinese)
- [9] 陈志强, 王进良, 李由. 二维离散 Duffing-Holmes 系统的分支与混沌研究 [J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(4): 324-329.
- CHEN Z Q, WANG J L, LI Y. Analysis on bifurca-

- tion and chaos of two-dimensional discrete Duffing-Holmes system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(4): 324–329. (in Chinese)
- [10] 石建飞, 张艳龙, 王丽, 等. Duffing 系统的双参数分岔与全局特性分析 [J]. *噪声与振动控制*, 2016, 36(6): 32–37+50.
- SHI J F, ZHANG Y L, WANG L, et al. Double-parameter bifurcation and global characteristic analysis of Duffing systems [J]. *Noise and Vibration Control*, 2016, 36(6): 32–37+50. (in Chinese)
- [11] 陈振阳, 韩修静, 毕勤胜. 一类二维非自治离散系统中的复杂簇发振荡结构[J]. *力学学报*, 2017, 49(1): 165–174.
- CHEN Z Y, HAN X J, BI Q S. Complex cluster oscillating structures in a class of two-dimensional non-autonomous discrete systems[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 165–174. (in Chinese)
- [12] 陈振阳, 韩修静, 毕勤胜. 离散达芬映射中由边界激变所诱发的复杂的张弛振荡[J]. *力学学报*, 2017, 49(6): 1380–1389.
- CHEN Z Y, HAN X J, BI Q S. Complex relaxation oscillation triggered by boundary crisis in the discrete duffing map[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(6): 1380–1389. (in Chinese)
- [13] 张莹, 都琳, 岳晓乐. Duffing 映射的全局动力学行为分析与研究 [J]. *西北工业大学学报*, 2017, 35(2): 316–320.
- ZHANG Y, DU L, YUE X L. Analysis and research on the global dynamical behavior of Duffing map [J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2017, 35(2): 316–320. (in Chinese)
- [14] 张真真, 马新东. 两周期激励下 Duffing-van der Pol 振子的复杂簇发振荡及其机理 [J]. *江西科学*, 2022, 40(2): 215–218+235.
- ZHANG Z Z, MA X D. Complex bursting oscillations as well as the mechanism of Duffing-van der Pol oscillator with two weak periodic excitations[J]. *Jiangxi Science*, 2022, 40(2): 215–218+235. (in Chinese)
- [15] QIAN Y H, REN D X, LAI S K, et al. Analytical approximations to nonlinear vibration of an electrostatically actuated microbeam[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2012, 17(4): 1947–1955.