

基于有限差分法的端部约束同轴圆柱壳的 流致失稳分析*

张程翔¹ 张德春¹ 李鹏^{1†} 卢军² 朱弈璋¹

(1. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

(2. 中国核动力研究设计院, 成都 610213)

摘要 本文基于经典壳体和理想势流理论建立圆柱壳流固耦合系统的运动方程,并引入有限差分法(FDM)对运动方程进行离散.为将壳体表面的扰动压力离散到差分网格节点,基于差分离散的原理,提出了以分段函数作为基函数的展开方法.本文对结构与压力控制方程均采用 FDM 方法进行求解,发展了一种基于 FDM 的同轴圆柱壳流固耦合求解策略.首先,利用本文方法计算了同轴圆柱壳在静态流体环境中的振动频率,并与有限元软件(ANSYS)的计算结果相比较,验证了本文方法的正确性;然后,探究了在静流体环境中同轴圆柱壳的结构参数变化对其振动频率的影响规律;最后,研究了同轴圆柱壳系统在运动流体环境中的流弹失稳问题.

关键词 流固耦合, 有限差分法, 同轴圆柱壳, 振动频率, 失稳流速

中图分类号:U661

文献标志码:A

Analysis of Flow Induced Instability of Coaxial Cylindrical Shells with End Constraints by Finite Difference Method*

Zhang Chengxiang¹ Zhang Dechun¹ Li Peng^{1†} Lu Jun² Zhu Yizhang¹

(1. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(2. Nuclear Power Institute of China, Chengdu 610213, China)

Abstract Based on the classical shell and ideal potential flow theory, the motion equation of the fluid-structure coupling system of the coaxial cylindrical shell is established, and the finite difference method (FDM) is introduced to discretize the motion equation. An expansion method applying the piecewise function as the basis function is proposed in this paper. A fluid-structure coupling solution strategy of a coaxial cylindrical shell based on FDM is developed. We apply this method first to solve the vibration frequency of the coaxial cylindrical shell in a static fluid and compare it with the ANSYS to verify the correctness of this method. Then, the influence of structural parameters of coaxial cylindrical shell on its vibration frequency in hydrostatic is explored; Finally, the hydraulic-elastic instability of the coaxial cylindrical shell system is studied.

Key words coaxial cylindrical shell, finite difference method, fluid structure coupling, vibration frequency, instability velocity

2022-10-15 收到第 1 稿,2022-12-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12072298,11772273,12172311), National Natural Science Foundation of China (12072298,11772273,12172311).

† 通信作者 E-mail:lp_vib@126.com

引言

圆柱壳以及其与内(外)部轴向流场耦合模型在船舶舰艇、航空航天以及核反应堆等领域中广泛应用,如潜艇、火箭燃料储存箱及反应堆吊篮等结构^[1].针对这类典型系统的理论建模、流固耦合振动及流弹失稳等问题,国内外学者已开展了大量工作并取得了丰硕的研究成果^[2-4].

Païdoussis 基于 Flügge 壳体方程和无粘无旋理想流体理论,采用傅里叶变换和伽辽金离散方法研究了两端固支同轴圆柱壳的流致失稳问题^[5].王建立在 Païdoussis 理论模型基础上研究了固支一简支边界条件下同轴圆柱壳的流致失稳问题^[6].Bochkarev 使用有限单元法(FEM)研究了同轴圆柱壳的流固耦合问题^[7].席志德采用行波法(TWM)研究了两端简支同轴圆柱壳在内外流体共同作用下的振动特性^[8].在上述研究方法中,Païdoussis 的理论模型虽适用于不同边界同轴圆柱壳的分析,但由于其采用伽辽金方法,因此推导过程较为复杂且需大量积分计算;而采用 FEM 一般需要较多的网格数量以保证计算精度,但也会导致较低的计算效率;TWM 方法虽然简单有效,但由于壳体轴向行波波长与其边界条件密切相关,该方法在处理两端简支条件时简单有效,却不易推广至其它边界条件.

有限差分法(FDM)是一种简单高效的偏微分方程数值计算方法,具有推导过程简单、计算量少及适用于不同边界条件等特点.虽然 FDM 已经用于分析典型的流固耦合问题^[9],但其用于同轴圆柱壳流致振动及其流弹失稳问题还未见相关报道.本文尝试发展基于 FDM 的同轴圆柱壳流致振动以及流弹失稳问题的分析策略,以期为该类问题提供一种可行的求解方法和完善已有相关理论研究.本文拟采用的研究思路如图 1 所示.首先,基于经典壳体理论^[10]和理想势流理论^[11]建立圆柱壳流固耦

合运动方程,并采用 FDM 对方程进行离散;为将流体扰动压力离散到差分网格节点,引入分段函数作为离散插值基函数,发展了二次插值映射方法;然后,通过获得的流固耦合运动方程计算系统振动频率及振型;最后,探究系统振动频率的参数影响规律及流动环境中的流致失稳问题.

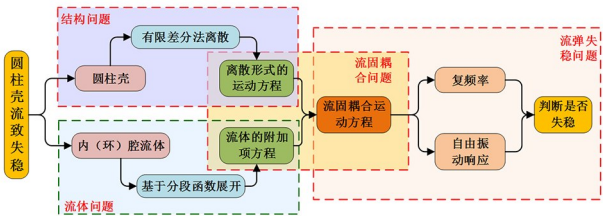


图 1 本文研究思路
Fig.1 Research process of thesis

1 理论模型与计算方法

1.1 理论计算模型

考虑如图 2 所示的同轴圆柱壳结构,内壳为本文所计算的各向同性弹性体,外壳为刚体用于约束流体区域.圆柱壳长度为 L 、内圆柱壳半径为 a 、厚度为 h 、密度为 ρ_s 、杨氏模量为 E 、泊松比为 ν ,外圆柱壳半径为 b .系统包含内腔和环腔两个流体域,密度分别为 ρ_i 和 ρ_o 、流速分别为 U_i 和 U_o .

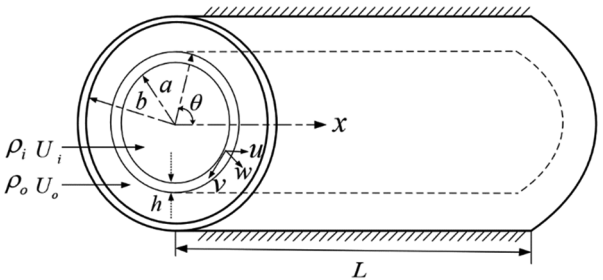


图 2 同轴圆柱壳模型
Fig.2 Coaxial cylindrical shell model

内圆柱壳自由运动方程可由唐纳尔—莫利(Donnell-Mushtari)方程描述^[12],其在流体环境中的流固耦合振动方程为:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta} + \nu a \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial W}{\partial \theta} = \gamma \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \nu a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial \theta} + W + ka^4 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + k \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + 2ka^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^2 \partial x^2} = -\gamma \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\Delta p}{\rho_s h} \right) \end{cases} \quad (1)$$

式中 $k = h^2/12a^2$, $\gamma = \rho_s a^2(1-\nu^2)/E$.

考虑到圆柱壳沿圆周方向具有周期性条件,故

可假设其位移分量 U, V, W 为^[13]:

$$\begin{cases} U(x, \theta, t) = u(x, t) \cos(n\theta) \\ V(x, \theta, t) = v(x, t) \sin(n\theta) \\ W(x, \theta, t) = w(x, t) \cos(n\theta) \end{cases} \quad (2)$$

其中 n 为周向波数.

将式(2)代入式(1)可得:

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - n^2 \frac{1-\nu}{2} u + n \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ \nu a \frac{\partial w}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ -n \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\ n^2 v - n w = -\gamma \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \nu a \frac{\partial u}{\partial x} + n v + w + k n^4 w + k a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \\ 2 k n^2 k a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma \frac{\Delta p}{\rho_s h} \end{cases} \quad (3)$$

式中 Δp 为单位面积上沿圆柱壳径向的压力,定义为内腔和环腔的压力差,即:

$$\Delta p = p_i|_{r=a} - p_o|_{r=a} \quad (4)$$

忽略流体粘性效应,并视流体在轴向的平均压力为常数.当内腔和环腔的流体有相同平均静压时,其在内壳处产生的沿径向压力载荷可相互抵消,此时内圆柱壳所受的唯一有效载荷来自于运动变形时所产生的流体扰动压力.

1.2 有限差分法离散圆柱壳方程

令 $\Delta p = 0$, 首先对(3)式的结构部分采用 FDM 进行离散,可得:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = 0 \quad (5)$$

其中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma \times \mathbf{I}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \gamma \times \mathbf{I}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \gamma \times \mathbf{I}_N \end{bmatrix}_{3N \times 3N}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix}_{3N \times 3N}$$

$\mathbf{X} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_N \ v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_N \ w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_N]_{3N \times 1}^T$
上式中: N 为离散节点数, $\mathbf{I}_N$ 为 $N \times N$ 的单位对角矩阵, $\mathbf{Z}_N$ 为 $N \times N$ 的零矩阵, $\mathbf{K}$ 为结构的刚度矩阵,其与圆柱壳端部的约束条件有关.

根据圆柱壳两端边界条件以及 FDM 方法可知,当圆柱壳两端为简支约束(S-S)时,壳体两端离散节点的位移分量关系为:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \\ u_N = u_{N+1} \\ v_0 = v_{N+1} = 0 \\ w_0 = w_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

当两端受固支约束(C-C)时:

$$\begin{cases} u_0 = u_{N+1} = 0 \\ v_0 = v_{N+1} = 0 \\ w_0 = w_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

当左端受简支约束右端受固支约束(S-C)时:

$$\begin{cases} u_0 = u_1 \\ u_{N+1} = 0 \\ v_0 = v_{N+1} = 0 \\ w_0 = w_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,下标 0 和 $N+1$ 分别为边界上第 0 个和第 $N+1$ 个边界点的位移分量,下标 1 和 N 分别为第 1 个和第 N 个内部节点的位移分量.

1.3 流体力的计算

考虑无粘无旋不可压缩的理想流体,内(环)腔流体的扰动速度势 $\phi_{i(o)}(x, r, \theta, t)$ 均满足柱坐标系下的拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2 \phi_{i(o)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{i(o)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{i(o)}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi_{i(o)}}{\partial x^2} = 0 \quad (9)$$

考虑壳体小幅扰动,此时结构变形对流体的扰动速度应满足圆柱表面的不可穿透边界条件,即:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi_{i(o)}}{\partial r} \right|_{r=a} = \frac{\partial w}{\partial t} + U_{i(o)} \frac{\partial w}{\partial x}, (0 \leq x \leq L) \\ \left. \frac{\partial \phi_{i(o)}}{\partial r} \right|_{r=a} = 0, \left. \frac{\partial \phi_0}{\partial r} \right|_{r=b} = 0 \quad (x < 0, x > L) \end{cases} \quad (10)$$

对于两端开口的同轴圆柱壳,速度势函数还需满足远场边界条件,即:

$$\phi_i(x, r, \theta, t)|_{x=0, L} = \phi_o(x, r, \theta, t)|_{x=0, L} = 0 \quad (11)$$

根据(11)式,可假设扰动速度势解的基本形式为^[14]:

$$\phi_{i(o)}(x, r, \theta, t) = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [A_m I_n(\xi_m r) + \right.$$

$$B_m K_n(\xi_m r)] \sin(\xi_m x) + \sum_{m=1}^{\infty} [C_m I_n(\xi_m r) + D_m K_n(\xi_m r)] \cos(\xi_m x) \} \cos(n\theta) \tag{12}$$

其中 $\xi_m = m\pi/L$.

1.4 流体力的离散

考虑边界条件(10)式,注意到简支和固支边界条件中的径向位移为零,则圆柱壳的径向位移 $W(x,t)$ 可展开为:

$$W(x,t) = \sum_{k=2}^{N-1} \eta_k(x) W(x_k,t) \tag{13}$$

其中, $W(x_k,t)$ 为壳体在节点 x_k 处沿径向的位移, $\eta_k(x)$ 为 x_k 处对应的位移差值函数.基于FDM的基本离散原理, $\eta_k(x)$ 选取为如下的分段函数形式:

$$\eta_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{\Delta x} & x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{x_{k+1} - x}{\Delta x} & x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \tag{14}$$

根据势函数解形式, $\eta_k(x)$ 和 $\partial\eta_k/\partial x$ 需满足:

$$\begin{cases} \eta_k(0) = \eta_k(L) = 0 \\ \left. \frac{\partial\eta_k(x)}{\partial x} \right|_{x=0} \neq 0, \left. \frac{\partial\eta_k(x)}{\partial x} \right|_{x=L} \neq 0 \end{cases} \tag{15}$$

因此,可将其进一步展开为:

$$\begin{cases} \eta_k(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin(\xi_m x_k) \\ \frac{\partial\eta_k(x)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\varphi}_m \cos(\xi_m x_k) \end{cases} \tag{16}$$

故:

$$\begin{cases} \varphi_m = \frac{\int_0^L \eta_k(x) \sin(\xi_m x_k) dx}{\int_0^L \sin^2(\xi_m x_k) dx} \\ \bar{\varphi}_m = \frac{\int_0^L \frac{\partial\eta_k(x)}{\partial x} \cos(\xi_m x_k) dx}{\int_0^L \cos^2(\xi_m x_k) dx} \end{cases} \tag{17}$$

考虑(10)式和(17)式,则可表示出离散形式的内(环)腔流体扰动势函数:

$$\begin{aligned} \phi_{i(o)}(x,r,\theta,t) = & \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} \{ G_{i(o)} [\varphi_m \sin(\xi_m x_k) \dot{W}(x,t) + \\ & U_i \bar{\varphi}_m \cos(\xi_m x_k) W(x,t)] \} \cos(n\theta) \end{aligned} \tag{18}$$

其中:

$$\begin{cases} G_i = \frac{I_n(\xi_m r)}{I_n'(\xi_m a)} \\ G_o = \frac{I_n'(\xi_m b) K_n(\xi_m r) - K_n'(\xi_m b) I_n(\xi_m r)}{K_n'(\xi_m a) I_n'(\xi_m b) - K_n'(\xi_m b) I_n'(\xi_m a)} \end{cases} \tag{19}$$

由于所考虑的流体为理想流体,扰动压力则可
由线化 Bernoulli 方程获得:

$$p_{i(o)}|_{r=a} = -\rho_{i(o)} \left(\frac{\partial\phi_{i(o)}}{\partial t} + U_{i(o)} \frac{\partial\phi_{i(o)}}{\partial x} \right) \tag{20}$$

进而计算出圆柱壳受到沿径向的扰动压力为:

$$\begin{aligned} p_{i(o)} = & -\rho_{i(o)} \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} (G_{i(o)} \{ [\varphi_m \ddot{W}(x,t) - \\ & U_{i(o)}^2 \xi_m \bar{\varphi}_m W(x,t)] \sin(\xi_m x_k) + [\varphi_m \xi_m \dot{W}(x,t) + \\ & U_{i(o)} \bar{\varphi}_m \dot{W}(x,t)] \cos(\xi_m x_k) \}) \cos(n\theta) \end{aligned}$$

根据(4)式可计算出 $\Delta\mathbf{P}$, 并表示为如下的矩阵形式:

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{M}_{i-o} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{i-o} \dot{\mathbf{X}} + \Delta\mathbf{K}_{i-o} \mathbf{X} \tag{21}$$

式中 $\Delta\mathbf{M}_{i-o}$ 、 $\mathbf{C}_{i-o}$ 和 $\Delta\mathbf{K}_{i-o}$ 分别为流体的附加质量、附加阻尼和附加刚度项,分别表示为:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M}_{i-o} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{M}_f \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \\ \mathbf{C}_{i-o} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{C}_f \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \\ \Delta\mathbf{K}_{i-o} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N \\ \mathbf{Z}_N & \mathbf{Z}_N & \mathbf{K}_f \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \end{aligned}$$

将式(5)与式(21)式相加,可得到圆柱壳流致振动方程的离散形式:

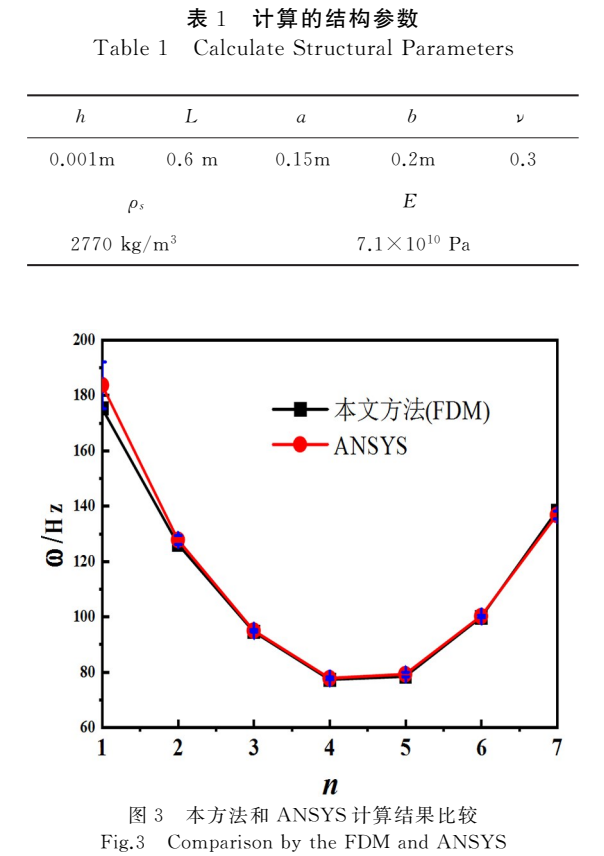
$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}_{i-o}) \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}_{i-o} \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}_{i-o}) \mathbf{X} = 0 \tag{22}$$

2 固有特性分析

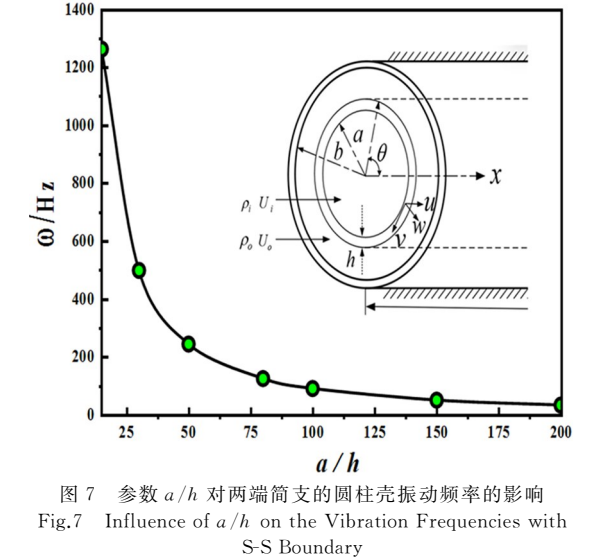
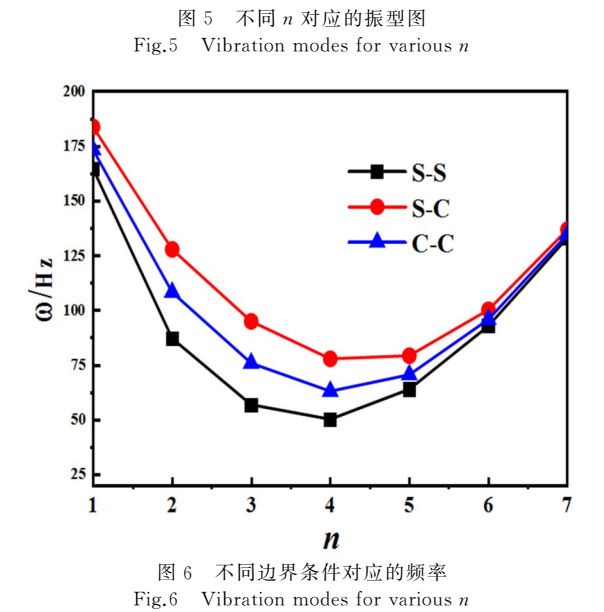
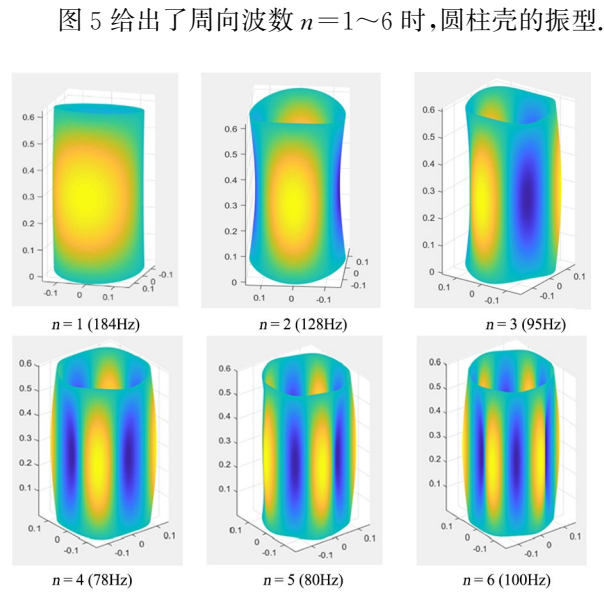
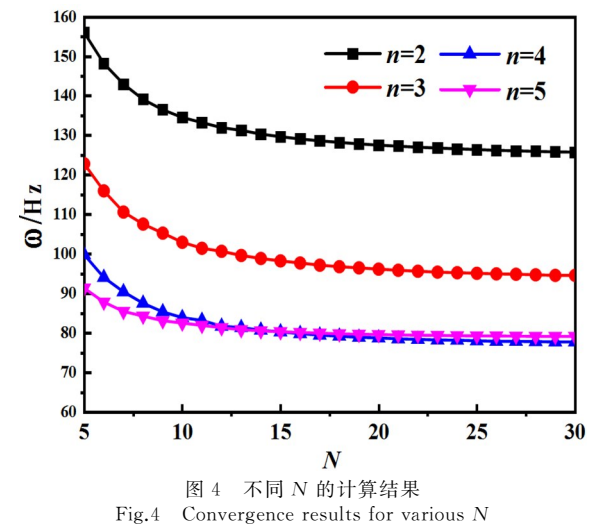
首先考虑静水工况,即 $U_o = U_i = 0$ 、 $\rho_i = \rho_o = 1000\text{kg/m}^3$,选取如表 1 所示的结构参数.分别使用本方法和 ANSYS 软件计算不同周向波数圆柱壳的振动频率.

ANSYS 软件建模中,流体建模采用 FLUID30 单元,共划分 27460 个网格单元;结构采用 SOL-SH190 单元,共划分 3840 个网格单元.采用本方法

计算时,离散节点数为 50.两种方法的计算结果对比如图 3 所示.



由图 3 可知,本文方法与软件计算结果吻合较好,验证了本文方法的正确性.通过选取不同的离散节点数 N 来分析本文方法的收敛性.分别计算周向波数 $n=2\sim 5$ 和不同离散节点数 N 时系统的第一阶固有频率,如图 4 所示.由图可知,当选取离散节点数 $N>20$ 时,本文方法计算得到振动频率与 N 的变化几乎无关,表明本文方法具有较好的收敛性.



下面考察 S-S、S-C 和 C-C 边界条件下圆柱壳的固有频率,如图 6 所示.结果表明,相同的波数

下,其振动频率随着端部约束的增强而提高;端部约束越弱,系统的频率越低.

随后考查不同半径与厚度的比值(a/h)对圆柱壳振动频率的影响,计算结果如图7所示.可知圆柱壳的振动频率随着 a/h 增加,会呈现先快速减小而后缓慢减小的变化趋势.

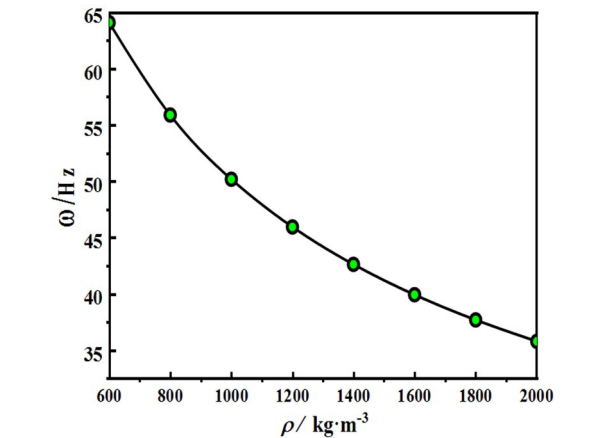


图8 不同流体环境密度的计算结果
Fig.8 Results in various fluid densities

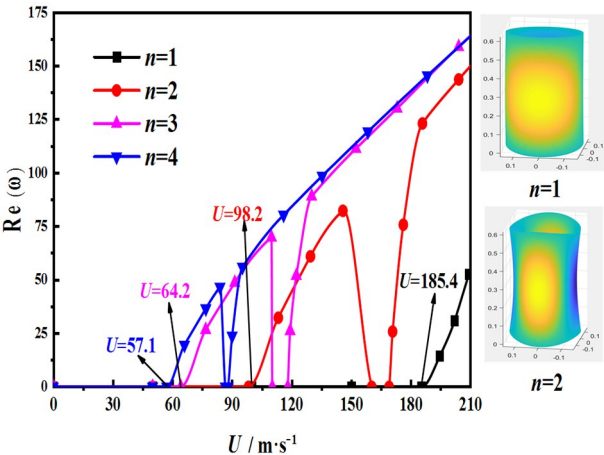


图9 频率的实部随流速的变化

Fig.9 Variation of real part of frequencies with flow velocity

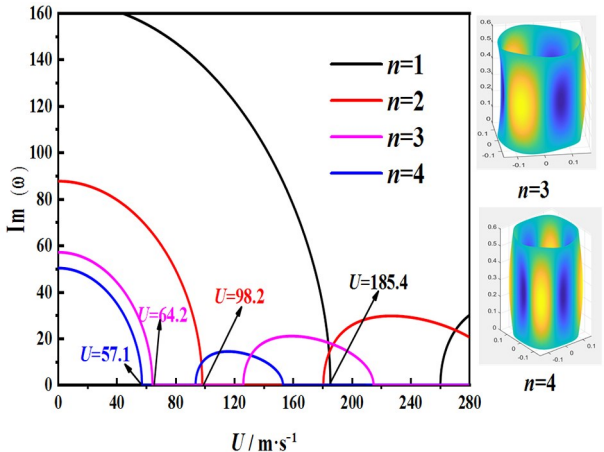


图10 频率的虚部随流速的变化

Fig.10 Variation of imaginary part of frequencies with flow velocity

最后讨论流体环境密度 ρ 对结构振动频率的影响,结果如图8所示.可知圆柱壳的振动频率随着 ρ 的增加而减小.

3 同轴圆柱壳的流弹失稳分析

考虑 $U_i=U_o=U$ 时,在给定参数下求解(22)式获得系统频率.对于两端约束的圆柱壳结构,当频率的实部 $\text{Re}(\omega)>0$ 、虚部 $\text{Im}(\omega)=0$,系统沿着径向屈曲发散失稳;当频率的实部 $\text{Re}(\omega)>0$ 、虚部 $\text{Im}(\omega)\neq 0$ 时,系统颤振失稳.系统频率的实部与虚部随流速的变化如图9、10所示,同时给出了不同 n 值时的失稳模态.对于 $n=1$,当 $U=^1U_{cr}=185.4(\text{m/s})$ 时,频率实部为零到正值变化的临界点,而虚部为正值到零变化的临界点,系统发生发散失稳,同理可得 $^2U_{cr}=98.2(\text{m/s})$ 、 $^3U_{cr}=64.2(\text{m/s})$ 、 $^4U_{cr}=57.1(\text{m/s})$.对比不同阶数的结构失稳模态与真空中的模态,两者之间差别很小.

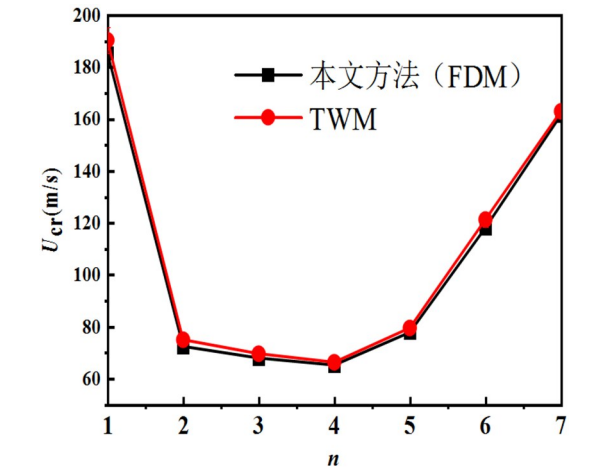


图11 本文方法与行波法的计算结果比较

Fig.11 Comparison of results between by the present method and traveling wave method

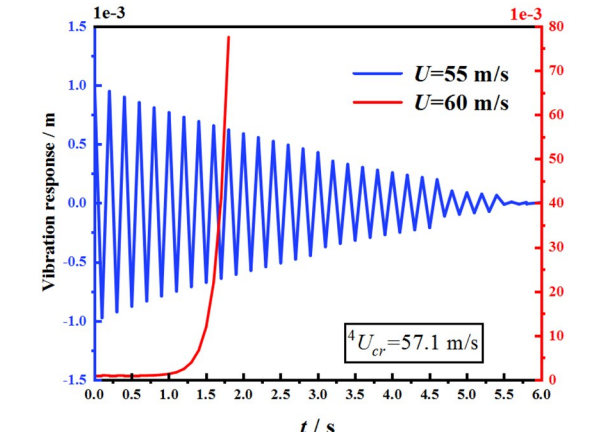


图12 不同流速下的自由振动响应

Fig.12 Free vibration response at different flow velocities

为与本方法计算的发散失稳流速进行比较,利用文献[8]的 TWM 方法计算两端简支同轴圆柱壳的临界流速,结果如图 11 所示.文献[15]研究了硅橡胶材质壳体在空气环境中的流弹失稳问题.为与其理论和实验结果进行对比,采用该文献中的计算参数,结果如表 2 所示.对比结果表明了本文方法计算圆柱壳流致失稳问题是准确的,且具有较高精度.

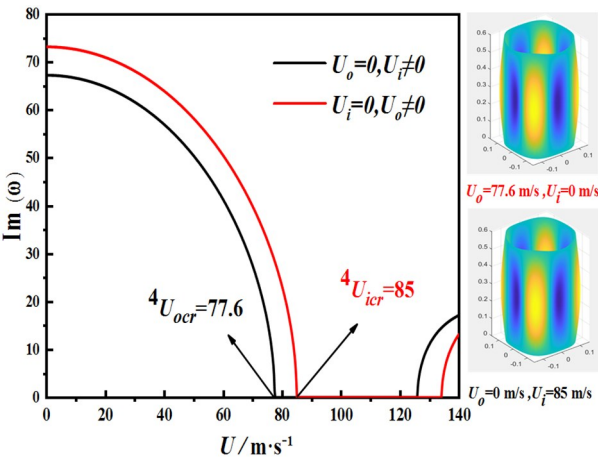


图 13 U_i 与 U_o 不同时存在时频率的虚部随流速的变化
Fig.13 Variation of imaginary part of frequency with velocity when U_i and U_o are not present at the same time

表 2 本文计算结果与文献[15]的对比
Table 2 Comparison of results with Ref.[15]

gap/radius ($b-a$)/ a	U_{cr} (m/s)			Error between the present results and the experiment in reference [15]
	Experiment ^[15]	Theory ^[15]	Present	
0.10	29.7	32.0	29.0	0.024
0.25	45.3	58.0	39.5	0.128

下面计算结构在临界流速附近的自由振动响应.在圆柱壳靠近端部处选取一点,给定初始位移为 1mm、初始速度为 0m/s,分别计算当流速 $U < U_{cr}$ 和 $U > U_{cr}$, $n=4$ 的自由振动响应,结果如图 12 所示.可知当 $U < U_{cr}$ 时,响应逐渐衰减至初始位置;而 $U > U_{cr}$ 时,响应由初始位移呈现指数形式的迅速增大,表明系统已经处于发散失稳状态.

下面分别考查 $U_i=0, U_o \neq 0$ 及 $U_i \neq 0, U_o=0$ 两种情况,同轴圆柱壳系统临界失稳流速的变化.当 $n=4$ 时,系统发散失稳临界流速和模态的计算结果如图 13 所示.可知当 $U_o=0$ 时, $^4U_{icr}=85\text{m/s}$,而当 $U_i=0, ^4U_{ocr}=77.6\text{m/s}$; 故在一定的环腔间隙下,环腔流体作用使得系统更容易发生发散失稳.

由失稳模态比较可知,两种工况下的失稳流速虽然不同,环腔流体对失稳模态未有明显改变.

之后考虑轴心到外壳的距离 b 对失稳流速的影响,计算结果如图 14 所示.由图可知, $^nU_{cr}$ 随 b 的增加而增加,这意味着环腔间隙越大,失稳流速也越高,增大环腔间隙会使系统更为稳定.

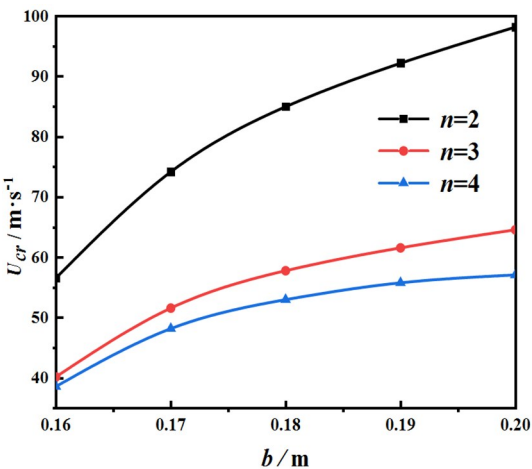


图 14 不同 b 时系统的失稳流速
Fig.14 Instability velocities of different b

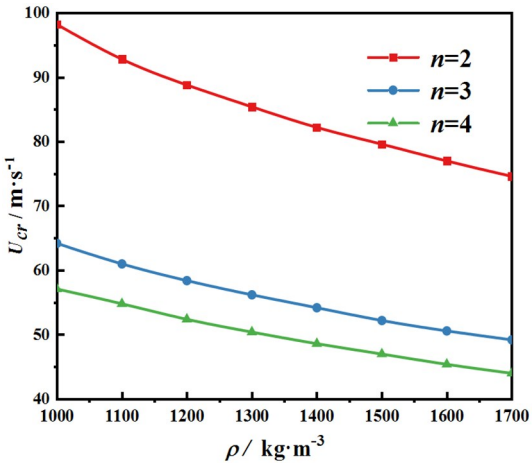


图 15 不同流体密度时系统的失稳流速
Fig.15 Instability velocities of different fluid densities

最后讨论流体密度 ρ 对失稳流速的改变情况,计算结果如图 15 所示.由图可知,与频率的变化规律类似, $^nU_{cr}$ 随着 ρ 的增加而减小,这意味着较重的流体更容易诱发结构失稳.

4 结论

本文基于有限差分法研究了同轴圆柱壳结构的流致振动及失稳问题.获得了如下结论:

(1)本文方法在求解两端约束同轴圆柱壳结构流致振动问题时具有计算精度高、边界条件处理简

单等优点,对工程问题有良好的应用前景.

(2)对于两端简支的圆柱壳,其振动频率随着半径与厚度的比值(a/h)的增加而减小,但减小趋势逐渐放缓;流体环境对结构的振动频率有着显著的影响,其振动频率随着流体环境密度的增加而减小.

(3)系统临界失稳速度与内腔及环腔的流动形式密切相关,环腔流体比内腔流体更容易导致同轴圆柱壳的流致失稳;各种工况下的失稳模态均未表现出显著变化,失稳模态与其对应空气中的模态几乎相同;系统的失稳流速随着轴心到外壳的距离 b 的增加而增加;且与频率的变化情况类似,失稳流速随着流体密度的增加而减小.

(4)本文仅考虑了内壳为弹性体的情况.事实上,本文方法也扩展用于内外两壳均为弹性体的情况,这也是作者正在开展的工作.

参考文献

- [1] 马文赛,吕书锋,杨绍武,等.环形天线结构的复杂动力学研究[J].动力学与控制学报,2022,20(3):40—49.
MA W S, LV S F, YANG S W, et al. Research on complex dynamics of a circular antenna structure [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 40—49. (in Chinese)
- [2] 王宇,罗忠,李昌,等.薄壁圆柱壳的高阶模态振动特性研究[J].动力学与控制学报,2016,14(2):131—137.
WANG Y, LUO Z, LI C, et al. Study on vibration characteristics of high-order modal for a thin cylindrical shell [J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14(2):131—137. (in Chinese)
- [3] AU-YANG M K. Free vibration of fluid-coupled coaxial cylindrical shells of different lengths [J]. Journal of Applied Mechanics, 1976, 43(3): 480—484.
- [4] AMABILI M, LI T, ZHU Z. Free flexural vibration of a cylindrical shell horizontally immersed in shallow water using the wave propagation approach [J]. Ocean Engineering, 2017, 142: 280—291.
- [5] PAÏDOUSSIS M P, CHAN S P, MISRA A K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 97(2):201—235.
- [6] 王建立,沈孟育.固支—简支端部边界条件下同轴圆柱壳体的流致不稳定性研究[J].原子能科学技术,2003,37(1):73—75.
WANG J L, SHEN M Y. Flow induced instability of coaxial cylindrical shells with clamped-simply boundary conditions [J]. Atomic Energy Science and Technology, 2003, 37(1):73—75. (in Chinese)
- [7] BOCHKAREV S A, MATVEENKO V P. The dynamic behaviour of elastic coaxial cylindrical shells conveying fluid [J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 2010, 74(4):467—474.
- [8] 席志德,陈炳德,李朋洲,等.输送流体的同心圆筒结构动力学特性研究[J].工程力学,2008,25(11):218—222.
XI Z D, CHEN B D, LI P Z, et al. Study on dynamic characteristics of concentric cylinder structure conveying fluid [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(11):218—222. (in Chinese)
- [9] GUENDELMAN E, SELLE A, LOSASSO F, et al. Coupling water and smoke to thin deformable and rigid shells [J]. ACM Transaction on Graphics (TOG), 2005, 24(3):973—981.
- [10] FLÜGGE L W. Stresses in shells [M]. New York: Springs, 1933.
- [11] WHITE F M. Fluid mechanics, 6th Edition [M]. New York: McGraw-Hill, 2008.
- [12] SOEDEL W. Vibrations of shells and plates [M]. New York: Marcel Dekker, 1981.
- [13] PAÏDOUSSIS M P, Chan S P, Misra A K. Dynamics and stability of coaxial cylindrical shells containing flowing fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1984, 97(2):201—235.
- [14] AMABILI M, PAÏDOUSSIS M P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction [J]. Applied Mechanics Reviews, 2003, 56(4): 349—381.
- [15] CHEBAIR A EL, PAÏDOUSSIS M P, MISRA A K. Experimental study of annular-flow-induced instabilities of cylindrical shells [J]. Journal of Fluids and Structures, 1989, 4(3):349—364.