

太空天梯网的稳定性分析与应用构想

李文博¹ 龚胜平^{2†}

(1. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)
(2. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘要 太空天梯技术是实现低成本、高效、安全航天运输的一种重要途径. 传统的地球天梯和月球天梯对材料强度的要求远超现有技术水平, 工程实现难度很大. 而土星卫星普遍质量较小, 建设土星卫星太空天梯可以有效克服现有材料技术瓶颈并极大促进土星系探索和开发利用. 首先, 以土卫二为例, 建立了“刚性杆-珠点”天梯模型, 推导出拉格朗日动力学方程. 在此基础上, 完成了系统的稳定性分析, 利用线性稳定性理论以及拉格朗日定理分析了不同建模精度以及空间站质量下系统的稳定条件, 并将计算结果推广至土星系其他卫星. 之后, 提出了土星系太空天梯网构想, 并初步设计了能够实现在任意两颗卫星之间无工质转移的天梯网构型. 最后分析了天梯网的效能和建设可行性. 计算结果表明, 设计的天梯网中所有天梯均能够在平衡位置保持稳定, 且部分天梯能够采用现有复合材料完成建造. 相比传统轨道机动方法可节省数千米每秒的速度增量, 具有巨大的潜在应用价值. 提出的方法和得到的结论可以为天梯网的进一步设计提供支撑.

关键词 太空天梯, 太空天梯网, 稳定性, 空间绳系系统, 土星系

中图分类号: V412.4

文献标志码: A

Stability Analysis and Application Conception of Space Elevator Network

Li Wenbo¹ Gong Shengping^{2†}

(1. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)
(2. School of Astronautics, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract Space elevator technology is the key to realizing low-cost, efficient and safe space transportation. The traditional earth elevator and lunar elevator require material strength far beyond the existing technical level, and it is very difficult to realize the project. Saturn's moons are generally small in mass. The construction of the Saturn's moon space elevator can overcome the technical bottleneck of existing materials and greatly promote the exploration, development and utilization of the Saturn system. First, taking Enceladus as an example, the "rigid rod-bead point" model of the ladder is established, and the Lagrangian dynamic equation is derived. On this basis, the stability analysis of the system is completed. The linear stability theory and Lagrange's theorem are used to analyze the stability characteristics of the system under different discrete precisions and the mass of the space station, and the calculation results are extended to other satellites of the Saturn galaxy. After that, the concept of the Saturn space elevator network is proposed, and the elevator network configuration which can realize no working medium transfer between any moons is preliminarily designed. Finally, the efficiency and construction feasibility of the elevator network are analyzed. The calculation results show that all the elevators in the designed ele-

vator network can remain stable at the equilibrium position, and some of the ladders can be constructed using existing composite materials. Compared with the traditional orbital maneuvering method, the ladder network can save the speed increment of several kilometers per second, and has huge potential application value. The method proposed in this paper and the conclusions obtained can provide support for the further design of the elevator network.

Key words space elevator, space elevator network, stability, space tethered system, saturn system

引言

太空天梯作为一种潜在的航天运输方式具有运输低成本、高效、安全、无污染的特点^[1],建成后能够从根本上改变航天运输的现状,具有巨大的潜在应用价值,因此太空天梯的构想近年来吸引了国内外学者的广泛关注。

1895年 Tsiolkovsky^[2]首先提出了地球赤道太空天梯的构想,称之为“赤道通天塔”。但是其研究成果并未受到重视,直到1960年苏联科学家 Artsutanov^[3]才系统地阐述了赤道天梯的概念和实施办法。九十年代之后,研究人员开始进一步研究赤道天梯的总体构型、建造方案,奠定了赤道天梯的理论基础^[4,5]。石润^[6]则分析了月球引力摄动对赤道天梯运动的影响并提出了分段式天梯的设计构想,该方案能够有效减小最大应力,具有巨大的优势及工程实用性。星绳系编队作为一种特殊的天梯系统也受到了广泛的关注^[7,8],赵俊淇^[7]则研究了卫星绳系编队系统的动力学建模及姿态控制,采用主动控制方法实现了编队系统的姿态控制。同一时期,由于月球探测的兴起,也出现了月球天梯的构想和设计^[9-12],从而为将来地月运输方式提供新的思路。其中李蒙^[11]研究了不同构型月球天梯的力学特性,并给出了最优设计方案,具有较高的工程参考价值。

稳定性分析是天梯总体设计中最为关键和基础的问题,直接决定了设计结果的可行性。早期 Be-letsii^[13]等将天梯运动限制在赤道面内,并将天梯简化为一个质点连接一个无质量绳索的模型,得出静平衡位置稳定条件与绳索张紧条件等价的结论。而王振坤^[14]则将动力学模型扩展为空间模型,利用线性稳定性定理证明了赤道天梯的渐近稳定特性。

在天梯稳定的前提下需要进一步进行结构力

学设计,但是不论是赤道天梯还是月球天梯,现有的材料均远不能满足天梯的强度需求。文献[6]指出,若采用钢材建设,地球赤道等截面天梯绳内最大应力将达到 382 GPa,远超钢材的强度极限。而新型的基于“碳纳米管”的材料虽然使太空天梯的建设称为可能^[15],但是其高昂的成本以及复杂的工艺成为了新的瓶颈。

以上所有的研究成果均限制在地月系中,尚没有文献将分析结果拓展应用于其他天体。近年来,“卡西尼”号土星探测器获取了大量土星卫星的第一手资料,发现土卫二南极地区存在大量羽流,暗示着海洋甚至生命的存在^[16]。土卫六则存在厚重的含氮和碳氢化合物的大气层,可能成为原始生命孕育的温床^[17]。以上发现极大增加了进一步探索开发土星卫星的意义。

本文将目光投向地月系以外,提出了土星系太空天梯网的构想,该构想能够实现土星系主要卫星之间的有效载荷的无工质转移,极大拓宽人类探索土星卫星的能力。值得注意的是,设计出的部分太空天梯利用现有的复合材料技术就能够满足强度需求,基本克服了天梯设计建造的材料难题。在实现资源原位利用的基础上,其建造难度远小于地月天梯。

本文首先以土卫二为例建立“刚性杆-珠点”模型并推导出拉格朗日方程,随后以土卫二为例系统地分析了其稳定条件。之后将结论拓展至其他土星卫星并初步设计出一套动力学稳定的土星系天梯网方案,最后对方案进行了效能评估和可行性分析。

1 动力学建模

1.1 模型描述

由于土星系主要卫星均处于潮汐锁定状态(自

转周期等于公转周期)且具有较小的轨道偏心率和轨道倾角,因此天梯的动力学特性具有相似性.为了便于展示和分析,本文以土卫二(Enceladus)上指向土星的太空天梯为例完成动力学建模和分析,在第 2.3 节中直接列写出其他卫星天梯稳定性的计算结果.

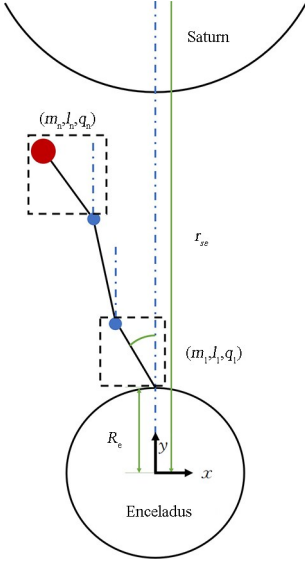


图 1 太空天梯的“刚性杆-珠点”模型示意图
Fig. 1 Schematic diagram of the space elevator with "rigid rod-bead point" model

首先建立如图 1 所示的简化模型.建立坐标系 $O-xyz$,其中原点 O 固定在土卫二质心处, x 轴指向土卫二轨道速度方向, y 轴指向土星质心, z 轴指向轨道法向.由于土卫二轨道偏心率只有 0.0047,为了简化模型,可将土卫二轨道简化为圆轨道.除此之外我们只考虑天梯在轨道平面内的运动,且只考虑了土星和土卫二对天梯的引力作用,忽略了其他天体的引力摄动.

天梯模型则简化为 n 个有质量的“珠点”和无质量的“刚性杆”的串联机构,该模型能够很好地反映出天梯绳的柔性特征.从天梯在卫星的表面锚点出发计数,将第 i 根“刚性杆”与 y 轴的夹角记为 q_i ,杆长记为 l_i .将第 i 个“珠点”的质量记为 m_i .值得注意的是当 $n=1$ 时“刚性杆-珠点”模型则退化为单摆模型,当 $n \rightarrow \infty$ 则退化为柔性重绳模型.

1.2 拉格朗日方程推导

系统是一个拥有 n 个自由度的完整理想系统,可以采用 n 个广义坐标及其导数描述系统的位形.为便于直观理解,我们选取夹角 $q_1 \cdots q_n$ 作为广义

坐标.接下来将分别用广义坐标及其导数描述系统的动能 T 、势能 V 、广义力 Q_i .

(1) 系统动能 T

利用广义坐标导数可以表示出所有“珠点”的速度矢量:

$$\mathbf{v}_i = \left[\sum_{j=1}^i (-l_j \dot{q}_j \cos q_j), \sum_{j=1}^i (-l_j \dot{q}_j \sin q_j) \right]^T \quad (1)$$

计算得到系统的总动能.

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left[\left(\sum_{j=1}^i l_j \dot{q}_j \cos q_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^i l_j \dot{q}_j \sin q_j \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 系统势能 V

系统的总势能可以分解为三项.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 \quad (3)$$

其中 V 表示为总势能, V_1 表示由坐标原点绕土星公转而引起的势能, V_2 表示由坐标系旋转而引起的离心势能, V_3 表示土星和土卫二引起的引力势能.

首先用广义坐标表示出所有“珠点”的位置矢量:

$$\mathbf{r}_i = \left[\sum_{j=1}^i (-l_j \sin q_j), R_e + \sum_{j=1}^i (l_j \cos q_j) \right]^T \quad (4)$$

则可以推导出 V_1 的表达式:

$$V_1 = \omega^2 r_{se} \sum_{i=1}^n m_i \left[R_e + \sum_{j=1}^i (l_j \cos q_j) \right] \quad (5)$$

其中 ω 为坐标系旋转角速度, r_{se} 为土卫二平均轨道半径, R_e 为土卫二的平均半径. V_2 的表达式为:

$$V_2 = -\frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\sum_{j=1}^i l_j \sin q_j \right)^2 + \left(R_e + \sum_{j=1}^i l_j \cos q_j \right)^2 \right] \quad (6)$$

应用引力势能的公式, V_3 可表示为:

$$\begin{aligned} V_3 &= - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_s m_i}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^i l_j \sin q_j \right)^2 + \left(R_e - r_{se} + \sum_{j=1}^i l_j \cos q_j \right)^2}} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\mu_e m_i}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^i l_j \sin q_j \right)^2 + \left(R_e + \sum_{j=1}^i l_j \cos q_j \right)^2}} \end{aligned} \quad (7)$$

其中 μ_s 为土星的引力常数, μ_e 为土卫二的引力常数.至此可以得到用广义坐标表示的系统势能 V .

(3) 广义力 Q_i

系统广义力可以分解为两项.

$$Q_i = Q_{ci} + Q_{fi} \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

其中 Q_{ci} 表示由于坐标系旋转引起的科氏广义力, Q_{fi} 表示杆之间相对转动引起的阻尼广义力.

首先用广义坐标表示每个“珠点”受到的科氏力:

$$\mathbf{F}_{ci} = 2m_i \omega \left[-\sum_{j=1}^i (l_j \dot{q}_j \sin q_j), \sum_{j=1}^i (l_j \dot{q}_j \cos q_j) \right]^T \quad (9)$$

之后用广义坐标表示每个“珠点”的虚位移:

$$\delta \mathbf{r}_i = \left[\sum_{j=1}^i (-l_j \cos q_j \delta q_j), \sum_{j=1}^i (-l_j \sin q_j \delta q_j) \right]^T \quad (10)$$

根据式(9)和式(10)计算元功:

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{ci} \cdot \delta \mathbf{r}_i \quad (11)$$

最终可以根据元功表达式计算每个广义坐标对应的科氏广义力:

$$Q_{ci} = \frac{\partial(\delta A)}{\partial(\delta q_i)} \quad (12)$$

阻尼广义力为力矩, 只与杆之间的相对角速度有关, 可以直接写出表达式.

$$Q_{fi} = \begin{cases} c[-\dot{q}_i + (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i)] & i = 1 \\ c[-(\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) + (\dot{q}_{i+1} - \dot{q}_i)] & i = 2, \dots, n-1 \\ -c(\dot{q}_i - \dot{q}_{i-1}) & i = n \end{cases} \quad (13)$$

其中 c 为阻尼系数, 仿真时设置为正常数.

(3) 动力学方程

描述理想完整系统的拉格朗日方程如下:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

其中 L 为拉格朗日函数, $L = T - V$, 可以进一步将式改写为:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V_1 - V_2 - V_3) = Q_{ci} + Q_{fi} \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

联立式(2)、式(5)~式(7)、式(12)、式(13)和式(15), 即可得到描述系统运动的动力学方程. 基于此, 可以进一步完成太空天梯的运动仿真和稳定性分析.

2 稳定性分析

2.1 天梯绳模型精度对稳定性的影响

我们进一步简化“刚性杆—珠点”模型, 假设所

有的“珠点”质量相同, 所有的“刚性杆”长度相同. 本节将系统地分析不同建模精度下 (n 取值不同) 系统的稳定特性.

(1) 单“珠点”模型

本小节考虑只有一个“珠点”的模型(单摆模型)的稳定性, 且分析中忽略了粘性广义力的作用. 令 $n=1$, 则根据式(15)可以书写出系统的动力学微分方程.

$$l_1 \ddot{q}_1 - \frac{\mu_e R_e \sin q_1}{(2l_1 R_e \cos q_1 + l_1^2 + R_e^2)^{3/2}} + \frac{\mu_s (r_{se} - R_e) \sin q_1}{((l_1 \cos q_1 + R_e - r_{se})^2 + l_1^2 \sin^2 q_1)^{3/2}} + \omega^2 (R_e - r_{se}) \sin q_1 = 0 \quad (16)$$

平衡时 $q_1=0$, 因此可以定义误差向量:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T = (q_1, \dot{q}_1) \quad (17)$$

则可以利用泰勒展开写出平衡位置的误差状态方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{1}{l_1} \left[r_{se}^- \omega^2 + \frac{R_e \mu_e}{(R_e + l_1)^3} - \frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l_1)^3} \right] \quad (18)$$

其中

$$r_{se}^- = r_{se} - R_e \quad (19)$$

进一步写出该线性自治系统的特征方程:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \frac{1}{l_1} \left[r_{se}^- \omega^2 + \frac{R_e \mu_e}{(R_e + l_1)^3} - \frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l_1)^3} \right] & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{1}{l_1} \left[r_{se}^- \omega^2 + \frac{R_e \mu_e}{(R_e + l_1)^3} - \frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l_1)^3} \right] = 0 \quad (20)$$

至此可以得到特征根的解析解:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{l_1} \left[r_{se}^- \omega^2 + \frac{R_e \mu_e}{(R_e + l_1)^3} - \frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l_1)^3} \right]} \quad (21)$$

若式(21)中根号下表达式为正数, 则存在正实部特征根, 系统不稳定; 若表达式为负数, 则特征根为一对纯虚数, 线性系统稳定.

绘制出特征根平方随天梯长度的变化曲线, 如图2所示. 可以发现随着天梯长度的增加, 特征根平方单调递减. 当 $l_1 < 303\text{km}$ 时, 系统不稳定; 当 $l_1 > 303\text{km}$ 时, 线性系统稳定, 对应非线性系统稳

定性需要进一步数值验证。

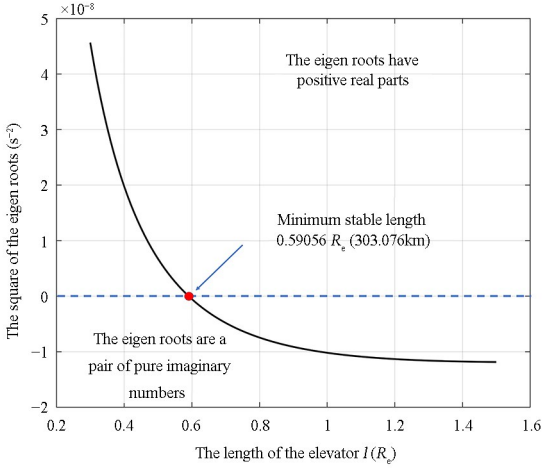


图 2 特征跟平方随天梯长度的变化曲线

Fig. 2 The variation curve of the square of the eigen roots with the length of the elevator

之后进行数值仿真验证,假设初始广义坐标误差为 2° ,求解原始非线性动力学微分方程[式(16)]完成运动仿真。仿真结果表明:当 $l_1 = 305\text{km}$ 时,若设置仿真 10 天,广义坐标始终未发散;而当 $l_1 = 300\text{km}$ 时,设置仿真 2 天,广义坐标单调递增至 50° ,系统不稳定。以上仿真结果进一步验证了分析的正确性。

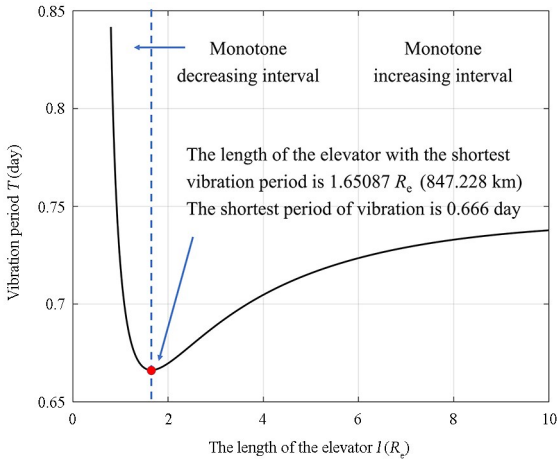


图 3 振动周期随天梯长度的变化曲线

Fig. 3 The variation curve of vibration period with the length of the elevator

在系统稳定的前提下,利用特征根可以计算振动周期为:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-\frac{1}{l_1} \left[r_{se}^- \omega^2 + \frac{R_e \mu_e}{(R_e + l_1)^3} - \frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l_1)^3} \right]}} \quad (22)$$

振动周期随天梯长度的变化曲线如图 3 所示。可以发现,当 $303\text{km} < l_1 < 847\text{km}$,振动周期随着天梯长度的增加而减小。当 $l_1 > 847\text{km}$ 时,振动周期随着天梯长度的增加而增大。当 $l_1 = 847\text{km}$ 时天梯振动周期存在最小值 0.666 天。

(2) 双“珠点”模型

虽然单“珠点”模型能够得到解析的稳定性判据,但是模型较为粗糙,与实际结果会有显著差异。本节取 $n=2$,忽略粘性力和科氏力,进一步分析系统的稳定条件。

由于动力学方程较为复杂,求解特征根的方法不便使用,因此本节采用拉格朗日方法,直接通过势能函数判断稳定性。

根据式(5)~式(7)可以推导出系统在平衡位置(广义坐标均等于 0)势能函数的 Hessen 矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \\ H_{11} &= lm \left[-\frac{R_e \mu_e}{(l + R_e)^3} - \frac{(l + R_e) \mu_e}{(2l + R_e)^3} \right] + \\ &\quad lm \left[\frac{r_{se}^- \mu_s}{(r_{se}^- - l)^3} + \frac{(r_{se}^- - l) \mu_s}{(r_{se}^- - 2l)^3} + (l - 2r_{se}^-) \omega^2 \right] \\ H_{12} &= H_{21} = l^2 m \left[\frac{\mu_e}{(2l + R_e)^3} + \frac{\mu_s}{(r_{se}^- - 2l)^3} - \omega^2 \right] \\ H_{22} &= lm \left[-\frac{(l + R_e) \mu_e}{(2l + R_e)^3} + \frac{(r_{se}^- - l) \mu_s}{(r_{se}^- - 2l)^3} + (l - r_{se}^-) \omega^2 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

其中 m 为每个“珠点”的质量, l 为每根“刚性杆”的长度。根据拉格朗日定理,系统稳定的充分条件为 Hessen 矩阵正定,即矩阵的顺序主子式均大于零:

$$\begin{aligned} H_{11} &> 0 \\ H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21} &> 0 \end{aligned} \quad (24)$$

定义独立于“珠点”质量的判据函数:

$$\begin{aligned} \varphi_1(l) &= \frac{1}{lm} H_{11} \\ \varphi_2(l) &= \frac{1}{l^2 m^2} (H_{11} H_{22} - H_{12} H_{21}) \end{aligned} \quad (25)$$

则系统稳定的条件为判据函数均大于零。绘制出判据函数随着天梯长度的变化曲线,如图 4 所示。

判据函数 $\varphi_1(l)$ 存在一个零点 $l_{11} = 236\text{km}$,当 $l > l_{11}$ 时, $\varphi_1(l) > 0$ 。判据函数 $\varphi_2(l)$ 存在两个零点 $l_{21} = 173\text{km}$ 以及 $l_{22} = 248\text{km}$,当 $l > l_{22}$ 或 $l < l_{21}$ 时, $\varphi_2(l) > 0$ 。综上,当 $l > l_{22}$ 时系统将保持稳

定.能保持稳定的天梯最短长度为 $nl_{22}=495\text{km}$.

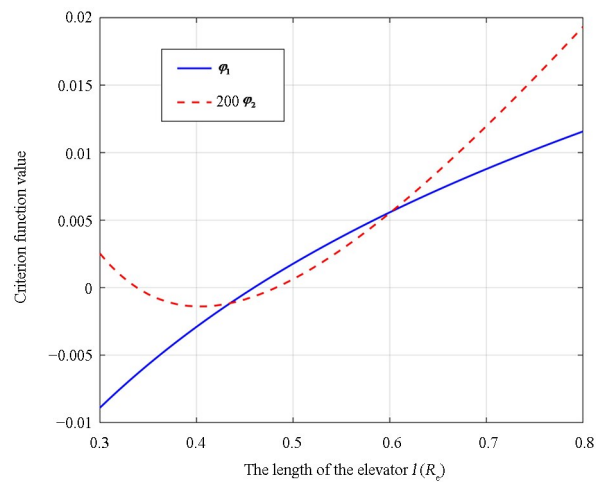


图 4 稳定判据函数随天梯长度的变化曲线
Fig. 4 The variation curve of stability criterion function with the length of the elevator

(3)多“珠点”模型

将分析双“珠点”模型稳定性的方法进一步扩展.在假设所有“珠点”的质量相同,每一段“刚性杆”长度相同的前提下,可以利用拉格朗日定理,分析出任何精度模型下太空天梯的最短稳定长度.将计算结果汇总于图 5 中.

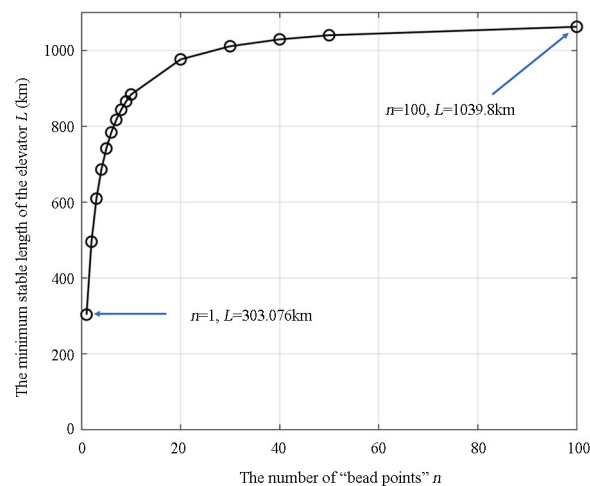


图 5 天梯的最小稳定长度随“珠点”数目的变化曲线
Fig. 5 The variation curve of the minimum stable length of the elevator with the number of "beads"

观察图 5 可以发现,“刚性杆—珠点”模型中“珠点”数目越多,系统的稳定性越弱,表现为天梯最短稳定长度随“珠点”数目的增加而单调递增.当模型中“珠点”数目趋于无穷时,天梯最短稳定长度收敛至有限上界 1084.05km.计算结果也表明,选择 100 个“珠点”(n=100)进行仿真计算基本可以

模拟柔性重绳的力学特性.

2.2 空间站质量对稳定性的影响

第 2.1 节的分析均建立在所有“珠点”质量相同的前提下.而事实上,太空天梯的端点处有必要建立空间站以辅助航天器发射和捕获^[1],因此需要研究端点质量与其余“珠点”质量之比对稳定性的影响,我们定义此比值为“站绳质量比”:

$$K = \frac{m_n}{\sum_{i=1}^{n-1} m_i}$$

(26)

依然利用拉格朗日定理计算不同质量比 K 下天梯的最小稳定长度,计算结果汇总于图 6.可以发现,空间站质量与绳质量比越大,则系统的稳定性越强,表现为天梯最短稳定长度随质量比的增加而单调递减.当质量比趋于无穷时,天梯最短稳定长度为 L_1 拉格朗日点与卫星表面的距离,即 439.862km.

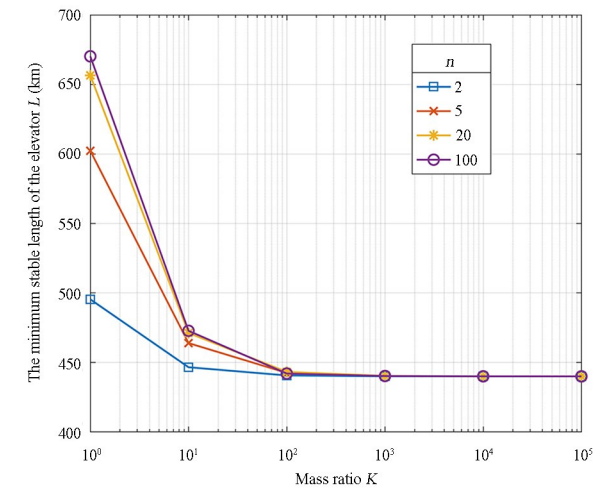


图 6 天梯的最小稳定长度随质量比的变化曲线
Fig. 6 The variation curve of the minimum stable length of elevator with the mass ratio

2.3 结果推广

第 2.1 节和 2.2 节详细讨论了土卫二太空天梯的稳定条件,本节进一步将以上理论和方法推广至土星系其他卫星,为第 3 节中太空天梯网构想提供理论依据.

表 1 列写出土星系主要卫星的部分轨道要素,可以发现这些卫星均处于潮汐锁定状态,轨道偏心率很小且基本处于共面状态.因此天梯的动力学环境与土卫二相似,可以将分析方法推广至其他土星

卫星.

表 1 土星系主要卫星部分轨道要素

Table 1 The orbital elements of the major moons of Saturn

Name	Serial number	Orbital eccentricity	Orbit inclination (degrees)
Mimas	1	0.0202	1.53
Enceladus	2	0.0047	0.02
Tethys	3	0.0001	1.12
Dione	4	0.0022	0.02
Rhea	5	0.0013	0.35
Titan	6	0.0292	0.33

最终其他卫星的太空天梯稳定性分析结果列写于表 2 中,其中天梯相对于土星的位置关系用字母 k 表示, $k=1$ 时表示天梯指向土星, $k=-1$ 时表示天梯背离土星.天梯的最小稳定长度用 L_{ik}^k 表示,其具体意义为:在第 i 颗卫星上建设与土星位置关系为 k 的太空天梯的前提下,当质量比为 K 时天梯的最短稳定长度.

表 2 土星系主要卫星太空天梯的稳定长度

Table 2 The stable length of the space elevator on Saturn's major moons

Serial number i	Positional relationship k	L_{i0}^k (km)	$L_{i\infty}^k$ (km)
1	1	907.141	324.818
	-1	912.048	325.804
2	1	1084.05 (Sec. 2.1) 439.862 (Sec. 2.2)	
	-1	1092.87	442.414
3	1	5077.38	1563.99
	-1	5153.37	1573.97
4	1	10176.5	2688.69
	-1	10389.9	2707.43
5	1	21298.5	5043.34
	-1	21943.7	5086.32
6	1	298993	49066.8
	-1	359238	50564.6

3 太空天梯网设计

第 2 节完成了土卫二太空天梯的稳定性分析.并将结果推广至土星系其他主要卫星,得到了在各个卫星上建设太空天梯的最短稳定长度.本节基于以上结果,设计了土星系太空天梯网实现卫星间的轨道转移,并初步分析了该系统的效能和可行性.值得注意的是,该系统能够实现航天器在土星系卫星之间的无工质轨道转移,可节省大量燃料,具有

重要的潜在应用价值.

3.1 基本原理

为了便于分析和计算,只考虑平面内的轨道转移.现以航天器从土卫一转移到土卫三为例(见图 7),说明利用太空天梯网实现分段转移的基本原理.转移流程如下:

- (1)有效载荷乘坐土卫一上背离土星方向的太空天梯上升至合适的高度(5387km),从而获取相对于土星更高的轨道线速度.
- (2)在合适的转移窗口释放有效载荷,则有效载荷将沿着土卫一~土卫二之间的转移轨道运动.当有效载荷抵达远地点时恰好与土卫二上指向土星方向的太空天梯(7110km)实现交会.
- (3)有效载荷对接太空天梯,并乘坐天梯下降至土卫二表面.
- (4)有效载荷通过星球表面机动至土卫二背离土星的一面,并乘坐土卫二上背离土星方向的太空天梯上升至合适的高度(5666km),从而获取相对于土星更高的轨道线速度.
- (5)在合适的转移窗口释放有效载荷,则有效载荷将沿着土卫二~土卫三之间的转移轨道运动.当有效载荷抵达远地点时恰好与土卫三上指向土星方向的太空天梯(7539km)实现交会.
- (6)有效载荷对接太空天梯,并乘坐太空天梯下降至土卫三表面.至此完成了有效载荷的无工质空间转移.

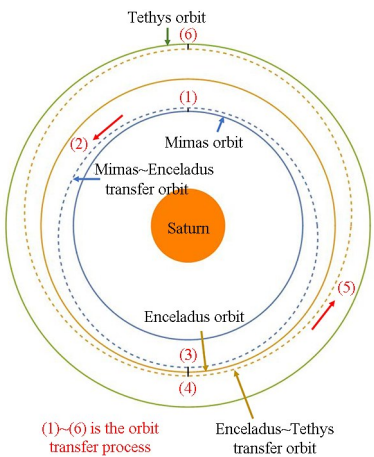


图 7 土星系太空天梯网原理图
Fig. 6 Schematic diagram of Saturn space elevator network

以上展示了将有效载荷从半长轴较小的卫星转移至半长轴较大的卫星上的过程.事实上,只需

将以上方案流程反转,则也可以实现将有效载荷从半长轴较大的卫星转移至半长轴较小的卫星上。

值得注意的是,以上方案具有普适性。只需要在表 1 所示天体上建设长度合适的太空天梯,则以上转移方案可以扩展至表 1 中任何两个天体之间,从而实现有效载荷在土星系主要卫星之间的高效转移。

3.2 总体设计

总体设计的目的是确定各卫星上太空天梯的建造长度,从而实现第 3.1 节中的构想。

设有效载荷直接通过两个太空天梯从卫星 i 转移至卫星 j 。卫星 i 上天梯的设计长度为 l_i^{-k} ,卫星 j 上天梯的设计长度为 l_j^k 。其中上标表示天梯相对土星的方位,如果上标为 1 则表示天梯指向土星,如果上标为 -1 则表示背离土星。 k 具有如下的表达式:

$$k = \begin{cases} 1 & i < j \\ -1 & i > j \end{cases} \quad (27)$$

则可以书写出给定天梯长度下,天梯顶端相对于土星的线速度。

$$v_i^{-k} = \sqrt{\frac{\mu_s}{r_i^3}} (r_i + kR_i + kl_i^{-k}) \quad (28)$$

$$v_j^k = \sqrt{\frac{\mu_s}{r_j^3}} (r_j - kR_j - kl_j^k) \quad (29)$$

其中 r_i 和 r_j 分别为出发卫星和目标卫星的轨道半径, R_i 和 R_j 分别为出发星球和目标星球的星球半径, μ_s 为土星的引力常数。

根据转移轨道的近拱点半径和远拱点半径与天梯长度的关系,可以推导出转移轨道的半长轴。

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (r_i + kR_i + kl_i^{-k} + r_j - kR_j - kl_j^k) \quad (30)$$

根据轨道能量方程可以推导出以下两个等式:

$$\frac{1}{2} (v_i^{-k})^2 - \frac{\mu_s}{r_i + kR_i + kl_i^{-k}} = -\frac{\mu_s}{2a_{ij}} \quad (31)$$

$$\frac{1}{2} (v_j^k)^2 - \frac{\mu_s}{r_j - kR_j - kl_j^k} = -\frac{\mu_s}{2a_{ij}} \quad (32)$$

联立式(27)~式(32)即可求解出太空天梯的设计长度 l_i^{-k} 和 l_j^k 。

代入具体卫星的参数,可以计算出有效载荷在不同卫星之间直接转移所需要建设的太空天梯长

度,计算结果如图 8 和图 9 所示。

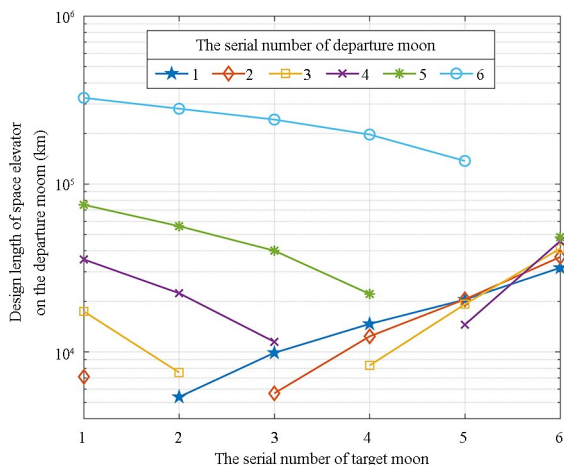


图 8 出发星球上太空天梯的设计长度

Fig. 8 Design length of the space elevator on departure moon

观察设计结果可以发现以下规律:目标星球和出发星球编号差越大则所需要建设的太空天梯长度越长。例如从土卫二转移至土卫三,只需要在土卫二上建设 5666km 的天梯即可,可以设此距离为基准距离。而如果从土卫二直接转移至土卫五,则需要在土卫二上建设 20547km (3.6 倍基准距离) 的天梯,并且在土卫五上建设 56042km (10 倍基准距离) 的天梯。天梯建设长度过长将导致工程实施难度增大。

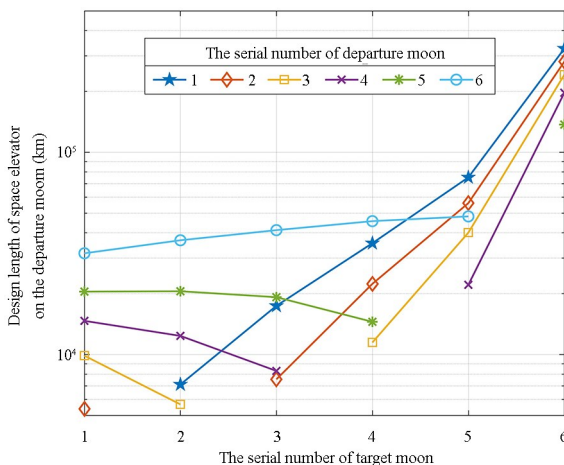


图 9 目标星球上太空天梯的设计长度

Fig. 9 Design length of the space elevator on target moon

由于直接转移方案实现难度很大,因此有必要采取 3.1 节中介绍的分段转移方案,天梯只负责在相邻卫星之间实现运输。例如,需要完成从土卫二转移至土卫五的任务,可以依次以土卫三、土卫四为跳板,从而可以极大地减小单个太空天梯的建设

长度. 计算表明, 只需在土卫二上建设 5666km(1 倍基准距离)的天梯, 并且在土卫五上建设 22113km(3.9 倍基准距离)的天梯即可. 可见采用分段转移方案可以极大降低工程实现难度.

采取分段转移方案, 并对比表 2 的计算结果后, 可以将太空天梯网总体设计方案汇总于表 3 中.

表 3 土星系太空天梯网总体设计结果

Table 3 The overall design results of the Saturn space elevator network

Serial number i	Positional relationship k	Design length l_i^k (km)	Stability
1	-1	5386.61	Stable
2	1	7109.83	Stable
	-1	5665.54	Stable
3	1	7538.69	Stable
	-1	8295.12	Stable
4	1	10176.5	Stable
	-1	14510.5	Stable
5	1	22113.1	Stable
	-1	48178.2	Stable
6	1	137090	Related to the mass ratio K

表 3 表明, 对于土卫一至土卫五太空天梯, 可以证明在设计长度下, 无论顶端的空间站质量如何变化, 系统在平衡位置均保持稳定. 而对于土卫六太空天梯则存在着不同的结论, 当质量比 $K \rightarrow +\infty$ 时, 系统在平衡位置保持稳定, 当质量比 $K = 0$ 时, 系统不稳定. 因此实际中需要通过适当增加空间站质量以改善系统的稳定性.

接下来将表 2 和表 3 的内容汇总, 将土星系太空天梯网设计结果及其稳定性分析结果汇总于图 10 中. 其中, 当天梯长度取值在不稳定区间内时(红色线条), 系统一定不稳定; 当天梯长度取值在亚稳定区间内时(蓝色线条), 系统的稳定性与质量比有关, 存在临界质量比, 当实际质量比大于临界质量比时系统稳定; 当天梯长度取值在稳定区间内时(黑色线条), 系统一定保持稳定. 图中的卫星大小和天梯长度按照真实比例绘制. 值得注意的是, 为了方便展示, 土卫五背离土星方向的天梯绘图长度按比例缩短至 1/2, 土卫六天梯绘制长度按比例缩短至 1/10.

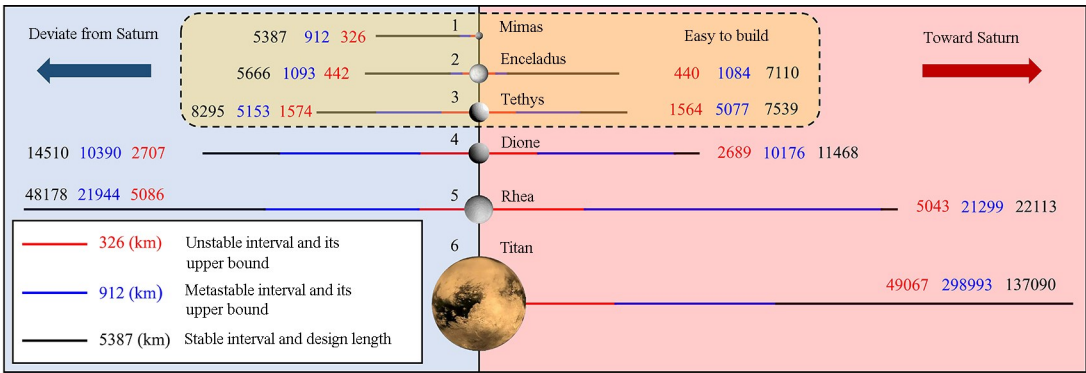


图 10 土星系太空天梯网设计方案

Fig. 10 The design result of Saturn space elevator network

3.3 效能分析

为了全面分析土星系太空天梯网的优势, 本节首先采用传统霍曼转移方法计算出在不同卫星之间转移所需要的速度增量, 之后再分析采用太空天梯网之后能够节约的速度增量.

设航天器从第 i 颗卫星表面起飞, 消耗速度增量 Δv_{ij} , 当飞离第 i 颗卫星的引力影响球之后剩余速度大小为 v_{ji}^∞ . 经过转移轨道之后被第 j 颗卫星捕获时相对剩余速度大小为 v_{ji}^∞ , 着陆时消耗速度

增量大小为 Δv_{ji} . 则可以根据逃逸轨道和捕获轨道的能量方程列出剩余速度和消耗速度增量之间的关系.

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu_s}{r_i^3}} R_i + \Delta v_{ij} \right)^2 - \frac{\mu_i}{R_i} = \frac{1}{2} v_{ij}^{\infty 2} \tag{33}$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mu_s}{r_j^3}} R_j + \Delta v_{ji} \right)^2 - \frac{\mu_j}{R_j} = \frac{1}{2} v_{ji}^{\infty 2} \tag{34}$$

其中充分利用了卫星的自转角速度以节约消耗的速度增量. μ_i 为出发卫星的引力常数, μ_j 为目标卫星的引力常数. 根据转移轨道能量方程可以推导出

以下两个等式：

$$\frac{1}{2}\left(kv_{ij}^\infty + \sqrt{\frac{\mu_s}{r_i^3}}r_i\right)^2 - \frac{\mu_s}{r_i} = \frac{-\mu_s}{r_i + r_j} \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}\left(-kv_{ji}^\infty + \sqrt{\frac{\mu_s}{r_j^3}}r_j\right)^2 - \frac{\mu_s}{r_j} = \frac{-\mu_s}{r_i + r_j} \tag{36}$$

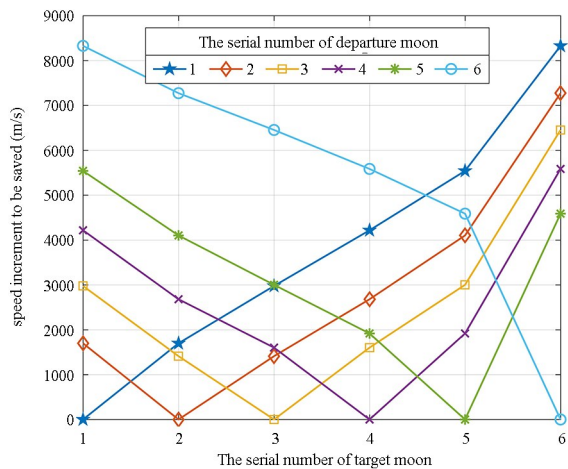


图 11 土星系太空天梯网能够节约的速度增量
Fig. 11 The speed increment to be saved

联立式(33)~式(36)可以计算得到两次机动所需要的速度增量 Δv_{ij} 和 Δv_{ji} .定义总速度增量作为轨道转移的代价.

$$\Delta V_{ij} = \Delta v_{ij} + \Delta v_{ji} \tag{37}$$

则可以计算出航天器在不同卫星之间转移所需要的速度增量.值得注意的是,以上计算是在一定的假设条件下给出的(脉冲机动、共面轨道、限制性二体),实际速度增量大小还需要应用多种优化算法进一步数值计算^[18].

由于利用太空天梯网转移有效载荷不需要任何速度增量,因此速度增量 ΔV_{ij} 即为太空天梯网能够节约的速度增量.计算结果如图 11 所示.计算结果表明,第 3.2 节设计的太空天梯网能够节约大量的速度增量.例如:出发星球选择为土卫一,目标星球选择为土卫六,则可以节省 8300m/s 的速度增量.即使目标星球选择为土卫三,也可以节省 2940m/s 的速度增量.

3.4 可行性分析

第 3.2 节中的表 3 已经说明了在各卫星上建设的太空天梯在平衡位置均可以保证稳定,因此太空天梯网的构想在稳定性层面上可行.但是限于材料科学发展的限制,需要进一步分析太空天梯处于

平衡时绳上的最大应力.

根据受力分析可知,等截面天梯绳所受的最大应力应处于卫星的拉格朗日点处,则可以列写出拉格朗日点外侧天梯绳的受力平衡方程.

$$T_i^k = \rho A \left(\frac{\mu_s}{r_i^2} y - \frac{1}{2} \frac{\mu_s}{r_i^3} y^2 - \frac{\mu_s}{|y - r_i|} - \frac{\mu_i}{|y|} \right) \Big|_a^b \tag{38}$$

其中 ρ 为天梯绳密度, A 为天梯绳的横截面积, a 和 b 满足以下等式关系.

$$a = kl_i^k + kR_i \tag{39}$$

$$b = kL_{i\infty}^k + kR_i \tag{40}$$

其中 k 取 1 表示天梯指向土星, k 取-1 表示天梯背离土星, l_i^k 为天梯的设计长度, $L_{i\infty}^k$ 为质量比趋于无穷时的最短稳定长度(拉格朗日点与卫星表面的距离).值得说明的是式中未考虑天梯绳顶端空间站的质量,因此只适用于当绳质量远大于空间站质量的工况.可以计算得到绳上最大比应力为:

$$\frac{\sigma_i^k}{\rho} = \left(\frac{\mu_s}{r_i^2} y - \frac{1}{2} \frac{\mu_s}{r_i^3} y^2 - \frac{\mu_s}{|y - r_i|} - \frac{\mu_i}{|y|} \right) \Big|_a^b \tag{41}$$

由式可知,天梯的最大比应力与采用的材料和天梯的横截面形状大小无关,可以作为统一的强度性能指标.接下来根据表 2 和表 3 的中的数据计算太空天梯网中所有天梯的最大比应力.结果列写在表 4 中.

表 4 土星系主要卫星太空天梯的最大比应力
Table 4 The maximum specific stress of the space elevator on Saturn's main moons

Serial number i	Positional relationship k	Maximum specific stress $\sigma_i^k/\rho(\text{GPa} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^3)$
1	-1	0.2655
2	1	0.5218
	-1	0.3223
3	1	0.5572
	-1	0.6326
4	1	1.2522
	-1	1.8265
5	1	4.7908
	-1	18.064
6	1	496.58

表 4 表明,随着卫星编号的增加,天梯绳上的最大比应力随之增加.值得注意的是,前三颗土星卫星天梯的最大比应力均小于 $0.65\text{GPa} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{cm}^3$,

现有的玻璃纤维—树脂、硼—铝、碳—树脂、碳—镁等复合材料均能够满足强度需求^[19]。而在后三颗土星卫星上建设天梯所需的材料要求很苛刻,现有的复合材料不能满足强度需求,还有待新型材料(例如实用碳纳米管)的开发和研制。

事实上,从地球运输天梯的材料,之后在土星卫星上完成装配是一种可行的思路。但是行星际运输成本极高,亟需要开发原位资源利用技术。以土卫二为例,根据卡西尼号探测器的测量结果,土卫二密度达到了 1.16 g/cm^3 ,高于普通冰卫星的密度。这表明土卫二中含有较多的硅酸盐和铁。除此之外卡西尼号还在土卫二南极羽流中发现了碳氢化合物,如丙烷、乙烷和乙炔。如果能通过原位利用技术充分利用以上资源制备出比强度满足要求的天梯材料,那么建设天梯的成本将会大幅度下降。

4 结论

本文以土卫二为例,分析了在土星系卫星上建设太空天梯的稳定性问题,得出了以下主要结论:

(1)“刚性杆—珠点”模型中“珠点”数目越多,系统的稳定性越弱,表现为天梯最短稳定长度随“珠点”数目的增加而单调递增。当模型中“珠点”数目趋于无穷时,天梯最短稳定长度收敛至有限上界。

(2)空间站质量与绳质量比越大,则系统的稳定性越强,表现为天梯最短稳定长度随质量比的增加而单调递减。当质量比趋于无穷时,天梯最短稳定长度为拉格朗日点与卫星表面的距离。

在此基础上,提出了利用土星系太空天梯网实现无工质轨道转移的构想,得出了以下主要结论:

(1)设计的土星系太空天梯网中的所有天梯均能够在平衡位置保持稳定。

(2)该方案相比传统霍曼转移变轨能够节省数千米每秒的速度增量,具有重要的应用价值。

(3)在土星主要卫星当中,土卫一至土卫三天梯最大比应力处于较小的水平,可以采用现有复合材料完成建造。土卫四至土卫六天梯尚无法采用现有材料建造,还有待新型材料(例如实用碳纳米管)的开发和研制。

提出的方法和得到的结论可以为天梯网的进一步设计提供依据。

参考文献

- [1] 关英姿,文梓达,汪小卫,等. 天梯动力学与控制研究进展 [J]. 宇航学报, 2022, 43(5): 537—547.
GUAN Y Z, WEN Z D, WANG X W, et al. Research progress on dynamics and control of the space elevator [J]. Journal of Astronautics, 2022, 43(5): 537—547. (in Chinese)
- [2] PEARSON J. Konstantin Tsiolkovski and the origin of the space elevator [J]. AAS History Series, 2005, 26: 17—24.
- [3] ARTSUTANOV Y. V Kosmos na elektrovoze komso-molskaya Pravda [J]. Science, 1960, 158: 946—951.
- [4] PULLUM L L, SWAN P A. Systems engineering for the space elevator-complexity [C]. Proceedings of the International Astronautical Federation-56th International Astronautical Congress, Fukuoka, Japan, 2005.
- [5] LAUBSCHER B. Space elevator systems level analysis [C]. Proceedings of the International Astronautical Federation-55th International Astronautical Congress, Vancouver, Canada, 2004.
- [6] 石润. 一种分段式天梯系统的月球引力分析和动力学性能研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.
SHI R. Research on lunar gravitational influence and dynamic performance of a segmented space elevator system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021. (in Chinese)
- [7] 赵俊淇,陈卫东,余本嵩. 基于刚体卫星绳系编队系统的动力学建模及姿态控制 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(2): 8—14.
ZHAO J Q, CHEN W D, YU B S. Dynamic modeling and attitude control of tether satellite formation system with a rigid body [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(2): 8—14. (in Chinese)
- [8] 余本嵩,文浩,金栋平. 绳系卫星编队动力学及控制研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(5): 321—328.
YU B S, WEN H, JIN D P. Advances in dynamics and control of tethered satellite formations [J]. Journal of Dynamics and Control, 2015, 13(5): 321—328. (in Chinese)
- [9] RADLEY C F. The lunar space elevator, a near

- term means to reduce cost of lunar access [C]. Proceedings of the AIAA SPACE and Astronautics Forum and Exposition, Orlando, America, 2017.
- [10] BUROV A A, KOSENKO I I. Pendulum motions of extended lunar space elevator [J]. *Mechanics of Solids*, 2014, 49(5): 506–517.
- [11] 李蒙, 陈伟跃, 杨胜, 等. 月球天梯力学特性研究 [J]. *中国空间科学技术*, 2016, 36(3): 63–69.
LI M, CHEN W Y, YANG S, et al. Research on mechanical characteristics of lunar space elevators [J]. *Chinese Space Science and Technology*, 2016, 36(3): 63–69. (in Chinese)
- [12] 王晓慧, 毛李恒. L1点月球天梯绕地运行过程动力学 [J]. *载人航天*, 2018, 24(1): 7–13.
WANG X H, MAO L H. Dynamics research of L1 point lunar space elevator orbiting around the Earth [J]. *Manned Spaceflight*, 2018, 24(1): 7–13. (in Chinese)
- [13] BELETSKII V V, IVANOV M B, OTSTAVNOV E I. Model problem of a space elevator [J]. *Cosmic Research*, 2005, 43(2): 152–156.
- [14] 王振坤. 天梯系统特征参数设计及动力学研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019.
WANG Z K. Research on characteristic parameters design and dynamics of tethered space elevator system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019. (in Chinese)
- [15] AHMED K, AVI S D, TANVIR M S, et al. Transportation in between the earth and space by using carbon nanotubes as the elevator cable [C]. Proceedings of the 2019 5th International Conference on Advances in Electrical Engineering, Dhaka, Bangladesh, 2019.
- [16] MACKENZIE M S, NEVEU M, DAVILA A F, et al. Science objectives for flagship-class mission concepts for the search for evidence of life at enceladus [J]. *Astrobiology*, 2022, 22(6): 685–712.
- [17] 微凉. 泰坦上的十大科学发现 [J]. *太空探索*, 2017, (10): 32–35.
WEI L. Top ten scientific discoveries on Titan [J]. *Space Exploration*, 2017, (10): 32–35. (in Chinese)
- [18] 李海洋, 周晓东, 张旭光, 等. 多目标空间探测智能轨迹优化方法综述 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(2): 1–14.
LI H Y, ZHOU X D, ZHANG X G, et al. Review on multi-target space trajectory optimization via intelligent methods [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(2): 1–14. (in Chinese)
- [19] 张少实, 庄茁. 复合材料与粘弹性力学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2011: 9.
ZHANG S S, ZHUANG Z. Composite materials and viscoelastic mechanics [M]. Beijing: China Machine Press, 2011: 9. (in Chinese)