

含时滞轨道吸振器的建筑结构的动力学分析*

管明杰 茅晓晨[†]

(河海大学 力学与材料学院,南京 211100)

摘要 本文研究了具有时滞轨道非线性吸振器的建筑结构的动力响应及其控制效果.采用谐波平衡法和弧长延拓法给出了简谐激励作用下主结构的幅频响应曲线,并与龙格库塔法的结果进行了对比.考察了不同参数情况下幅频曲线的变化情况,揭示了系统的复杂运动现象.结果表明,轨道非线性会导致幅频曲线向左偏转.时滞反馈控制能够降低主结构的位移幅值,并可抑制混沌响应.

关键词 轨道吸振器, 时滞反馈控制, 建筑结构, 复杂运动

中图分类号:O322;O328

文献标志码:A

Dynamical Analysis of a Building Structure with a Time-Delay Track Vibration Absorber*

Guan Mingjie Mao Xiaochen[†]

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract In this paper, the dynamical responses and control performance of a building structure with a delayed track nonlinear vibration absorber are studied. The amplitude-frequency response curves of the system under external excitation are given by harmonic balance method and arc-length continuation method. The fourth-order Runge-kutta algorithm is performed to validate the obtained results. The properties of the amplitude-frequency response for different system parameters are analyzed and complex dynamical motions are shown. It is shown that the track nonlinearity can lead to the left-leaning phenomenon. In addition, the delayed feedback control can reduce the displacement amplitude of the primary structure and suppress the complicated responses.

Key words track vibration absorber, time-delay feedback control, building structure, complicated vibrations

引言

建筑结构在地震、风等动力荷载作用下,会产生较大的振动响应,导致结构的变形和破坏^[1].随着现代制造技术的快速发展,建筑结构更加轻柔化和复杂化,其振动现象日益显著.例如,摩天大厦中

的悬挑、不规则等设计会造成结构刚度突变,诱发大幅的持续振动^[2].为了有效抑制结构的振动水平,人们提出了多种控制方法,如非线性吸振器等.

非线性吸振器能够有效拓展减振带宽和提升鲁棒性.目前,非线性吸振器的种类和形式不断更新,如分段线性式^[3-4]、碰撞式^[5-6]、轨道式^[7-9]等.轨

2023-06-26 收到第 1 稿,2023-07-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12172119, 11872169), 江苏省自然科学基金资助项目(BK20191295), National Natural Science Foundation of China (12172119, 11872169) and Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20191295).

[†] 通信作者 E-mail:maochen@hhu.edu.cn

道式吸振器通过设计轨道形状提供不同形式的非线性作用力,并在土木工程中得到了应用.例如,轨道吸振器可以将输入建筑结构的能量从低阶模态向高阶模态转化,从而快速有效地衰减结构响应^[7].Lu 等人提出了一种轨道非线性能量汇,给出了与质量比和轨道形状相关的优化设计过程,并在五层钢框架结构上进行了一系列振动试验,有效验证了轨道吸振器的良好减振性能^[8].此外,单边碰撞的轨道非线性吸振器不仅能够吸收和耗散建筑结构的能量,还可以在结构刚度和输入能级变化时表现出很强的鲁棒性^[9].

近年来,主动控制备受关注,能够提升控制效果和适应复杂工况.在控制过程中,传感器、滤波器、控制器、作动器等环节中存在时滞效应.Olgac 首次提出了时滞动力吸振器的概念^[10].徐鉴教授团队长期从事时滞吸振器的研究,取得了许多重要进展,并得到了实际应用^[11-13].Zheng 等人研究了具有时滞加速度反馈的主动质量阻尼器对建筑结构的振动控制问题,给出了控制增益和时滞的参数空间中的稳定区域^[14].Bellizzi 等人考察了时滞主动阻尼非线性吸振器,基于复变量平均法和几何奇异摄动法预测了周期响应和准周期响应.结果表明,较小的时滞会导致系统状态发生重大变化,如抑制准周期响应区域和降低振动水平^[15].Mohanty 等人提出了具有时滞反馈的压电片堆式主动非线性吸振器,给出了基础简谐激励和外扰力共同作用下的振动控制效果,可有效提升安全性和经济性^[16].

本文基于轨道型非线性吸振器,引入时滞位移反馈控制,提出一种时滞轨道非线性吸振器,并应用于建筑结构的振动抑制.

1 动力学模型

如图 1 所示,建筑结构质量、刚度、阻尼系数分别为 m_1, k_1, c_1 ,其顶部置放吸振器.吸振器由带有轨道的小车和小球构成,其中 m_2 为小车质量, m_3 为小球质量, c_3 为小球与小车间的阻尼系数.轨道小球视为刚体,可沿轨道自由滑动,其轨道形状满足 $y_3(t) = a [x_3(t) - x_2(t)]^4$,其中 y_3 为小球的竖向位移, x_2 和 x_3 分别为小车和小球的水平位移, a 为轨道形状系数^[8].建筑结构和吸振器间的弹簧刚度系数为 k_2 ,阻尼系数为 c_2 .采用时滞位移反馈控制,控制力取为 $Ax_2(t - \tau)$,其中 A 为反馈增益系数, τ 为时滞量.

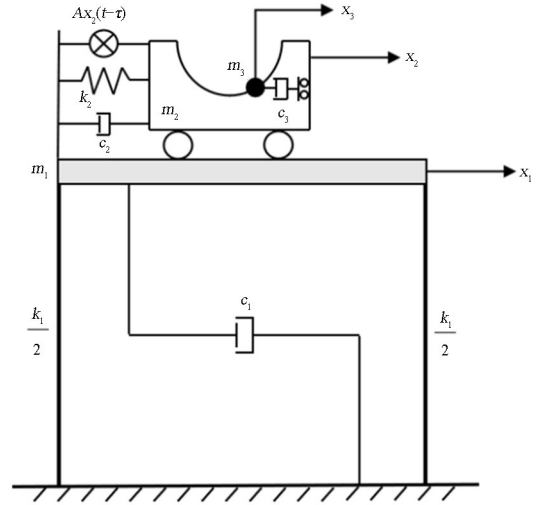


图 1 含时滞轨道非线性吸振器的建筑结构
Fig.1 A building structure with a nonlinear delayed vibration absorber

系统的总动能 T 表达式为:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 \quad (1)$$

其中 x_1 为框架结构的水平位移, v_3 为轨道小球的速度,满足 $v_3^2 = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2$,其中 \dot{x}_3 和 \dot{y}_3 分别为小球的水平和竖直方向速度.系统的总势能 V 表达式为:

$$V = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2 + m_3y_3g \quad (2)$$

根据拉格朗日方程,则有:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = Q_i, i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

其中, Q_i 为外激励和控制力; D 为耗散函数^[17],即

$$D = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2}c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2$$

将式(1)和式(2)代入式(3)中,整理后可得:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = Ax_2(t - \tau) + f(t) \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2(x_2 - x_1) - F_T = -Ax_2(t - \tau) \\ m_3\ddot{x}_3 + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + F_T = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中 $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, f_0 为激励幅值, ω 为激励频率.小车和小球之间的非线性力为 $F_T = F_{T1} + F_{T2} + F_{T3}$,其中 $F_{T1} = 4am_3g(x_3 - x_2)^3$, $F_{T2} = 48a^2m_3(x_3 - x_2)^5(\dot{x}_3 - \dot{x}_2)^2$, $F_{T3} = 16a^2m_3$

$(x_3 - x_2)^6(\ddot{x}_3 - \ddot{x}_2)$, $g = 9.8 \text{ N/kg}$ 为重力加速度.

系统参数取为: $m_1 = 30 \text{ kg}$, $k_1 = 2 \times 10^4 \text{ N/m}$, $c_1 = 0.05 \text{ Ns/m}$, $m_2 = 3 \text{ kg}$, $k_2 = 3470 \text{ N/m}$, $c_2 = 0.6 \text{ Ns/m}$, $m_3 = 3 \text{ kg}$, $a = 200 \text{ m}^{-3}$, $c_3 = 0.8 \text{ Ns/m}^{[7]}$. 激励幅值 f_0 分别取为 1 N 和 10 N , 当激励频率 $\omega = 23.5 \text{ rad/s}$ 时计算在 $t = 70T$ 内系统响应, 其中 T 为外激励周期. 图 2 为 F_T, F_{T1}, F_{T2} 以及 F_{T3} 的变化曲线. 如图 2(a) 所示, F_T 的主要部分为 F_{T1} , 而 F_{T2} 和 F_{T3} 在 F_T 中占比很小. 如图 2(b) 所示, F_{T2} 和 F_{T3} 的影响较大, 在 F_{T1}, F_{T2} 以及 F_{T3} 的同时作用下, F_T 在出现了峰值现象, 即当相对位移增大到某个值后, F_T 会随其的增大而减小, 这种现象有助于在发生较大响应时减轻由于作用力过大而造成减振设备的损害^[7].

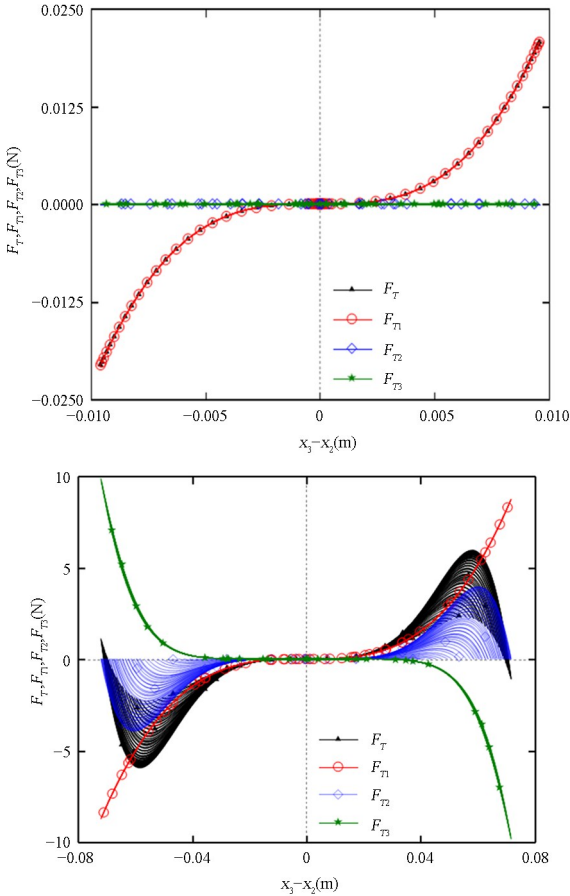


图 2 不同外激励幅值作用下非线性力的变化曲线

Fig.2 The curve of nonlinear force for different excitation amplitudes

2 幅频特性

本文采用谐波平衡法(HBM)求解系统动力学响应^[16]. 为简化起见, 引入轨道小球相对轨道小车的位移 $x_n(t) = x_3(t) - x_2(t)$. 方程可改写为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + \\ k_2(x_1 - x_2) = Ax_2(t - \tau) + f_0 \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c_3 \dot{x}_n \\ + k_2(x_2 - x_1) - F_T = -Ax_2(t - \tau) \\ m_3(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_n) + c_3 \dot{x}_n + F_T = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中 $F_T = 4am_3gx_n^3 + 48a^2m_3x_n^5\dot{x}_n^2 + 16a^2m_3x_n^6\ddot{x}_n$. 式(5)的谐波近似解设为如下形式:

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1(t) \cos(\omega t) + b_1(t) \sin(\omega t) \\ x_2(t) = a_2(t) \cos(\omega t) + b_2(t) \sin(\omega t) \\ x_n(t) = a_3(t) \cos(\omega t) + b_3(t) \sin(\omega t) \\ x_2(t - \tau) = a_2(t) \cos[\omega(t - \tau)] + \\ b_2(t) \sin[\omega(t - \tau)] \end{cases} \quad (6)$$

通过将式(6)代入式(5)中计算残差力, 并借助伽辽金条件可得到非线性微分方程组. 由于 $a_1(t), b_1(t), a_2(t), b_2(t), a_3(t), b_3(t)$ 均是关于时间 t 的慢变函数, 忽略高阶项 $\ddot{a}_i(t), \ddot{b}_i(t), \dot{a}_i(t)\dot{a}_j(t), \dot{a}_i(t)\dot{b}_j(t)$, 从而得到关于 $\dot{a}_1(t), \dot{b}_1(t), \dot{a}_2(t), \dot{b}_2(t), \dot{a}_3(t)$ 和 $\dot{b}_3(t)$ 的微分方程组 $N\dot{S} = Z$. 其中, $S = \{a_1(t), b_1(t), a_2(t), b_2(t), a_3(t), b_3(t)\}^T$, 矩阵 $N = (n_{pq})$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}^T$, n_{pq} 和 z_q 表达式见附录, $p, q = 1, 2, \dots, 6$. 根据定常解条件 $\dot{S} = 0$, 可得非线性代数方程组 $N^{-1}Z = 0$. 借助弧长延拓法求解该代数方程组, 可给出位移幅值 $|X_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$. 通过计算雅可比矩阵的特征值可判断定常解的稳定性. 若所有特征值实部为负则稳态解稳定, 为正则不稳定.

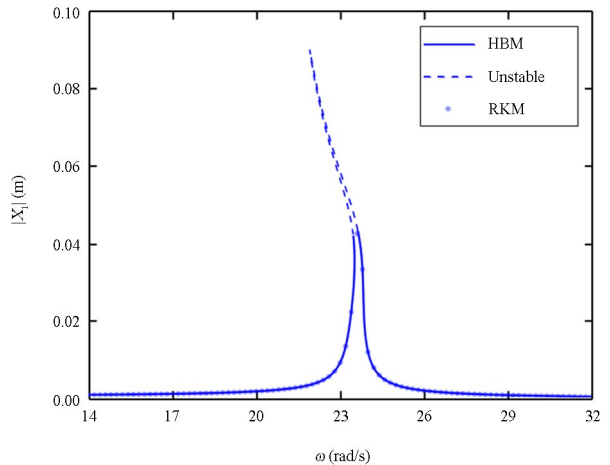


图 3 主系统的位移幅频曲线

Fig.3 The amplitude-frequency curve of the primary system

图 3 为当 $k_2 = 3470\text{N/m}$, $a = 200\text{m}^{-3}$, $f_0 = 10\text{N}$, $A = -80\text{N/m}$, $\tau = 0.05\text{s}$ 时, 建筑结构的位移的幅频曲线. 为了验证谐波平衡法的准确性, 采用龙格库塔法(RKM)进行验证. 由图 3 可知, 龙格库塔法与谐波平衡法的结果在稳定周期解的区域基本吻合, 说明两种方法的结果相一致. 此外, 主系统位移幅频曲线的共振峰向左偏转, 表现出软弹簧特性. 同时, 在共振峰附近出现了不稳定的解.

3 参数讨论

采用纯被动控制时, 考察吸振器参数对于幅频曲线的影响情况. 如图 4(a) 所示, 随着弹簧刚度系数由 3700N/m 增大到 5200N/m , 幅频响应曲线向右移动, 并且向左偏转的程度有所减弱. 此外, 在稳定区域内, 周期运动的位移振幅的峰值从 0.0535m 增大到 0.0763m , 而不稳定区域内的共振峰幅值从 0.2039m 增大到 0.5665m . 图 4(b) 给出了不同轨道形状系数对应的主系统的幅频曲线. 当时, 吸振器退化为线性情形. 当时, 系统的幅频曲线向左偏转,

共振峰附近也出现了不稳定解. 随着轨道形状系数的增大, 幅频曲线向左偏转的程度也增大.

下面考察位移反馈控制, 首先考虑无时滞情形. 系统的弹簧刚度系数 k_2 与轨道形状系数 a 分别取为 3470N/m 和 200m^{-3} , 其他参数保持不变. 如图 5 所示, 反馈增益的值从零变为 -500N/m 时, 稳定周期运动振幅的峰值分别为: 0.0477m , 0.0431m , 0.0379m , 0.0387m , 0.0347m . 不稳定的共振峰幅值从 0.1658m 降低到 0.1000m . 与无反馈控制相比, 受控系统的稳定周期运动的幅值的峰值与不稳定区域的共振峰幅值都有所降低.

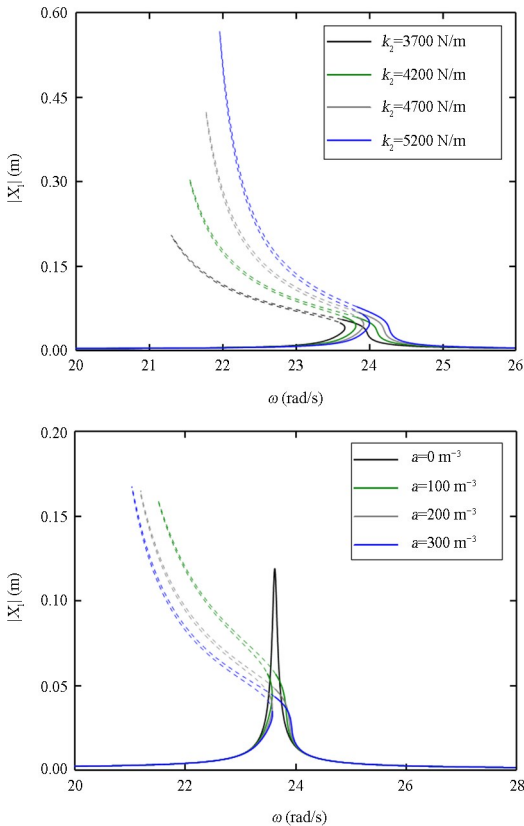


图 4 不同弹簧刚度系数 k_2 与轨道形状系数 a 时, 主系统的位移幅频曲线

Fig.4 Effects of the spring stiffness k_2 and the coefficient of track shape a on the amplitude-frequency curve of the primary system

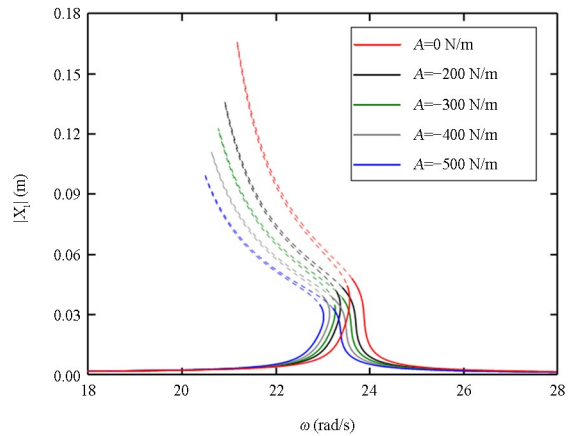


图 5 不同反馈增益 A 的主系统位移幅频曲线

Fig.5 Effects of the feedback gain A on the amplitude-frequency curve of the primary system

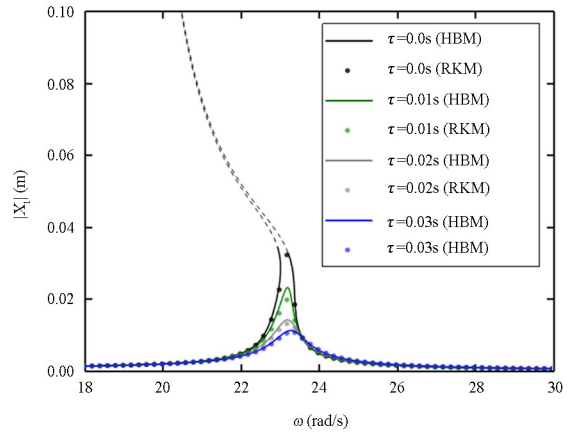


图 6 不同时滞下的主系统位移幅频曲线

Fig.6 Effects of the time delay on the amplitude-frequency curve of the primary system

考虑控制中的时滞效应, 而其余系统参数保持不变. 图 6 给出了不同时滞量情形下主系统的位移幅频曲线, 其中. 如图 6 所示, 无时滞时, 幅频曲线的共振峰表现出向左偏转特性, 并且在共振峰附近出现不稳定区域. 当 $\tau = 0.01\text{s}$ 时, 共振峰基本不偏

转,不稳定区域消失,类似于线性情形.此时,共振峰的幅值降至 0.0230m .随着时滞量的继续增大,幅频曲线的峰值进一步降低,并与龙格库塔法的计算结果基本吻合.这说明,引入时滞可以消除幅频响应曲线中的不稳定区域,减弱系统的软弹簧特性,并可提高振动抑制效果.

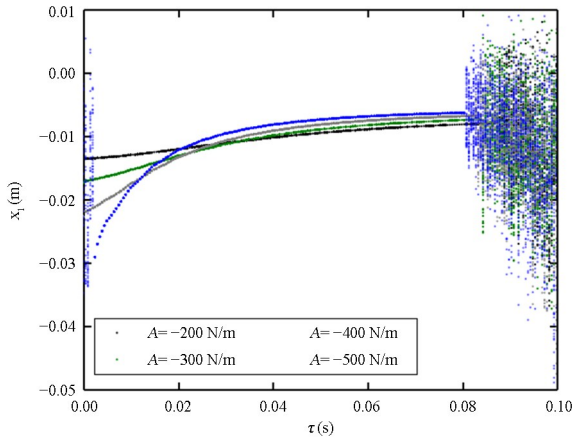


图7 主系统位移随时滞量变化的分叉图

Fig.7 The bifurcation diagram of the displacement of the primary structure with the change of time delay

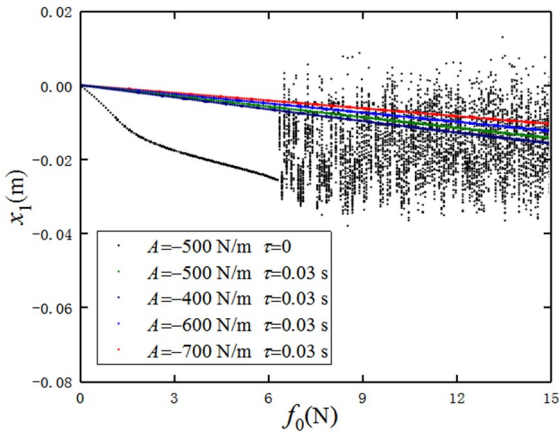


图8 在主结构位移随外激励幅值变化的分叉图

Fig.8 The bifurcation diagram of the displacement of the primary system as the excitation amplitude varies

图7给出了不同反馈增益时,主结构的位移在随时滞量变化的分叉图,其中外激励频率确取为 23.1rad/s . Poincaré 截面选取为 $P = \{(\tau, x_1(t)) : (y_1(t) = 0, \dot{y}_1(t) > 0)\}$, 其中 $y_1(t) = \dot{x}_1(t)$. 如图7所示,时滞量位于 0.002s 和 0.08s 之间,主系统的响应为周期运动,而继续增加时滞量会导致混沌运动.随着反馈增益绝对值的增加,当 $0.002\text{s} < \tau < 0.012\text{s}$ 时,系统周期运动的振幅不断增加,而当 $0.033\text{s} < \tau < 0.08\text{s}$ 时,系统周期运动的振幅减小,进一步抑制了振动.这表明,反馈增益和时滞量均会

影响周期运动的幅值.此外,当时滞量很小时,即约为 $0 \sim 0.002\text{s}$,随着反馈增益绝对值的增大,周期振荡可变为混沌运动.

图8给出了主结构的位移在 Poincaré 截面上随激励幅值变化的分叉图,其中 Poincaré 截面为 $P = \{(f_0, x_1(t)) : (y_1(t) = 0, \dot{y}_1(t) > 0)\}$, 外激励频率为 23.1rad/s . 如图8所示,当 $A = -500\text{N/m}$, $\tau = 0$ 时,即无时滞的位移反馈控制,在 $f_0 > 6.36\text{N}$ 情形下主系统会进入混沌状态,而时滞取 0.03s 可使系统由混沌变为周期运动.保持时滞量不变,反馈增益分别取 -400N/m , -600N/m , -700N/m 时,主系统的位移幅值会随着激励幅值的增大而增加.这说明,在激励幅值较大时,时滞能够抑制混沌响应,改善减振效果,并具有一定的鲁棒性.

4 结论

本文提出了一种时滞轨道非线性吸振器,并将其安装在建筑结构顶部.通过谐波平衡法结合弧长延拓法给出了幅频响应曲线,并与龙格库塔法的结果进行了对比验证.结果表明,系统的幅频响应曲线共振峰会出现向左偏转现象,并且共振峰附近存在不稳定区域.在被动控制时,轨道非线性造成了幅频曲线共振峰附近的软弹簧特性与不稳定性.考虑时滞反馈控制后,可消除幅频曲线中的不稳定区域,降低甚至消除共振峰的软弹簧特性,并能够降低共振峰的幅值.此外,时滞反馈控制还可有效调控复杂运动,改善振动抑制效果.

参考文献

- [1] THENOZHI S, YU W. Advances in modeling and vibration control of building structures [J]. Annual Reviews in Control, 2013, 37(2): 346-364.
- [2] 李子懿,肖从真,李建辉,等.复杂高层建筑结构抗震设计方法研究现状与展望 [J]. 建筑科学, 2019, 35(9): 120-125.
- [3] LI Z Y, XIAO C Z, LI J H, et al. Research status and prospects of seismic design method for complicated high-rise building structure [J]. Building Science, 2019, 35(9): 120-125. (in Chinese)
- [4] GOURDON E, LAMARQUE C H. Energy pumping with various nonlinear structures: Numerical evidences [J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 40(3):

- 281-307.
- [4] 姚红良,张钦,杨沛然,等.分段线性刚度非线性能量阱的参数优化方法[J].东北大学学报(自然科学版),2019,40(12):1732-1738.
- YAO H L, ZHANG Q, YANG P R, et al. Optimization method of nonlinear energy sinks with piecewise linear stiffness [J]. Journal of Northeastern University(Natural Science), 2019, 40(12): 1732-1738. (in Chinese)
- [5] GENDELMAN O. Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink [J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(21): 4599-4608.
- [6] LI T, SEGUY S, BERLIOZ A. Optimization mechanism of targeted energy transfer with vibro-impact energy sink under periodic and transient excitation [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 87(4): 2415-2433.
- [7] WANG J, WIERSCHEM N, SPENCER J B F, et al. Experimental study of track nonlinear energy sinks for dynamic response reduction [J]. Engineering Structures, 2015, 94: 9-15.
- [8] LU X, LIU Z, LU Z. Optimization design and experimental verification of track nonlinear energy sink for vibration control under seismic excitation [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017, 24(12): e2033.
- [9] LI W, WIERSCHEM N E, LI X, et al. Numerical study of a single-sided vibro-impact track nonlinear energy sink considering horizontal and vertical dynamics [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2019, 141(6): 061013.
- [10] OLGAC N, HOLM-HANSEN B T. A Novel active vibration absorption technique: delayed resonator [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 176(1): 93-104.
- [11] 赵艳影,徐鉴.时滞非线性动力吸振器的减振机理[J].力学学报,2008,40(1):98-106.
- ZHAO Y Y, XU J. Mechanism analysis of delayed nonlinear vibration absorber [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2008, 40(1): 98-106. (in Chinese)
- [12] SUN Y, XU J. Experiments and analysis for a controlled mechanical absorber considering delay effect [J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 339: 25-37.
- [13] MENG H, SUN X, XU J, et al. The generalization of equal-peak method for delay-coupled nonlinear system [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2020, 403: 132340.
- [14] ZHENG Y, HUANG J, SUN Y, et al. Building vibration control by active mass damper with delayed acceleration feedback: multi-objective optimal design and experimental validation [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2018, 140(4): 1-7.
- [15] BELLIZZI S, CHUNG K-W, SAMPAIO R. Response regimes of a linear oscillator with a nonlinear energy sink involving an active damper with delay [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 97(2): 1667-1684.
- [16] MOHANTY S, DWIVEDY S K. Nonlinear dynamics of piezoelectric-based active nonlinear vibration absorber using time delay acceleration feedback [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 98(2): 1465-1490.
- [17] 陈峻峰,刘昆,梁文杰,等.磁悬浮飞轮储能系统机电耦合非线性动力学研究[J].动力学与控制学报,2013,11(3):225-234.
- CHEN J, LIU K, LIANG W, et al. Study on nonlinear dynamics of electromechanical coupling in flywheel energy storage system based on active magnetic bearings [J]. Journal of Dynamics and Control, 2013, 11(3): 225-234. (in Chinese)

附录:

$$\begin{aligned}
 n_{11} &= c_1 + c_2, n_{12} = 2m_1\omega, n_{13} = -c_2, n_{14} = 0, n_{15} = 0, n_{16} = 0, n_{21} = -2m_1\omega, n_{22} = c_1 + c_2, n_{23} = 0, \\
 n_{24} &= -c_2, n_{25} = n_{26} = 0, n_{31} = -c_2, n_{32} = 0, n_{33} = c_2, n_{34} = 2m_2\omega, n_{35} = -c_3, \\
 n_{36} &= -10a^2m_3\omega a_3^6 - 30a^2m_3\omega a_3^4b_3^2 - 30a^2m_3\omega a_3^2b_3^4 - 10a^2m_3\omega b_3^6, n_{41} = 0, n_{42} = -c_2, n_{43} = -2m_2\omega, \\
 n_{44} &= c_2, n_{45} = 10a^2m_3\omega a_3^6 + 30a^2m_3\omega a_3^4b_3^2 + 30a^2m_3\omega a_3^2b_3^4 + 10a^2m_3\omega b_3^6, n_{46} = -c_3, n_{51} = 0, n_{52} = 0, \\
 n_{53} &= 0, n_{54} = 2m_3\omega, n_{55} = c_3, n_{56} = 10a^2m_3\omega a_3^6 + 30a^2m_3\omega a_3^4b_3^2 + 30a^2m_3\omega a_3^2b_3^4 + 10a^2m_3\omega b_3^6 + 2m_3\omega, \\
 n_{61} &= 0, n_{62} = 0, n_{63} = -2m_3\omega, n_{64} = 0, \\
 n_{65} &= -10a^2m_3\omega a_3^6 - 30a^2m_3\omega a_3^4b_3^2 - 30a^2m_3\omega a_3^2b_3^4 - 10a^2m_3\omega b_3^6 - 2m_3\omega, m_{66} = c_3. \\
 z_1 &= -k_1a_1 - k_2a_1 + k_2a_2 + f_0 - c_1b_1\omega - c_2b_1\omega + c_2b_2\omega + m_1a_1\omega^2 + Aa_2\cos(\omega\tau) - Ab_2\sin(\omega\tau),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2 &= -k_1 b_1 - k_2 b_1 + k_2 b_2 + c_1 a_1 \omega - c_2 a_1 \omega - c_2 a_2 \omega + m_1 b_1 \omega^2 + A a_2 \sin(\omega \tau) + A b_2 \cos(\omega \tau), \\
z_3 &= +k_2 a_1 - k_2 a_2 + 3m_3 a g a_3^3 - 5a_3^7 a^2 m_3 \omega^2 - 15b_3^4 a_3^3 a^2 m_3 \omega^2 + 3m_3 a g a_3 b_3^2 - 5b_3^6 a_3 a^2 m_3 \omega^2 - \\
&\quad 15m_3 a^2 a_3^5 b_3^2 \omega^2 + c_2 b_1 \omega - c_2 b_2 \omega + m_2 a_2 \omega^2 + c_3 b_3 \omega - A a_2 \cos(\omega \tau) + A b_2 \sin(\omega \tau), \\
z_4 &= -c_3 a_3 \omega + m_2 b_2 \omega^2 + k_2 b_1 - k_2 b_2 - 15b_3^3 a_3^4 a^2 m_3 \omega^2 + 3m_3 a g b_3^3 - 5b_3^7 a^2 m_3 \omega^2 - 5m_3 a^2 a_3^6 b_3 \omega^2 + \\
&\quad 3m_3 a g a_3^2 b_3 - 15m_3 a^2 b_3^5 a_3^2 \omega^2 - c_2 a_1 \omega + c_2 a_2 \omega - A a_2 \sin(\omega \tau) - A b_2 \cos(\omega \tau), \\
z_5 &= 5a_3^7 a^2 m_3 \omega^2 + 15m_3 a^2 a_3^5 b_3^2 \omega^2 + 15b_3^4 a_3^3 a^2 m_3 \omega^2 + 5b_3^6 a_3 a^2 m_3 \omega^2 - 3m_3 a g a_3^3 - 3m_3 a g a_3 b_3^2 + \\
&\quad m_3 a_2 \omega^2 + m_3 a_3 \omega^2 - c_3 b_3 \omega, \\
z_6 &= 5m_3 a^2 a_3^6 b_3 \omega^2 + 15b_3^3 a_3^4 a^2 m_3 \omega^2 + 15m_3 a^2 b_3^5 a_3^2 \omega^2 + 5b_3^7 a^2 m_3 \omega^2 - 3m_3 a g a_3^2 b_3 - \\
&\quad 3m_3 a g b_3^3 + m_3 b_2 \omega^2 + m_3 \omega^2 b_3 + c_3 a_3 \omega
\end{aligned}$$