

# 基于能量整形方案实现具有通讯时滞欠驱动 Euler-Lagrange 网络的一致性\*

郑斌<sup>1</sup> 苗中华<sup>3</sup> 周进<sup>1,2†</sup>

(1. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 力学与工程科学学院, 上海 200072)

(2. 上海飞行器力学与控制研究院, 上海 200092)

(3. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200072)

**摘要** 本文主要基于能量整形方案研究具有通讯时滞网络化欠驱动 Euler-Lagrange (EL) 系统的一致性问  
题, 通过利用阻尼注入和互连分配的无源控制(PBC)技术, 在有向连通网络拓扑下提出了一个简单的分布式  
协议, 来实现在无引导者和有引导者一跟随者两种情形下欠驱动 EL 网络的一致性. 本文提出的一致性能量  
整形方案的主要特点是有机地整合了系统欠驱动和驱动部分以及控制器三部分能量作为整个系统的总能量,  
这个总能量被利用作为一个合适的 Lyapunov 函数, 它能够充分确保网络化欠驱动 EL 系统达到所期望  
的分布式一致性. 最后, 通过由欠驱动 EL 网络所描述柔性关节机械臂系统的数值模拟, 来分析通讯时滞对  
一致性的效应和验证所提出控制算法的正确性.

**关键词** 欠驱动 EL 网络, 柔性关节机械臂, 通讯时滞, 一致性, 能量整形方案

**中图分类号**: O313

**文献标志码**: A

## Consensus of Networked Underactuated Euler-Lagrange with Communication Delays Based on Energy-Shaping Scheme\*

Zheng Bin<sup>1</sup> Miao Zhonghua<sup>3</sup> Zhou Jin<sup>1,2†</sup>

(1. Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai 200072, China)

(2. Shanghai Institute of Aircraft Mechanics and Control, Shanghai 200092, China)

(3. School of Mechatronic Engineering and Automation, Shanghai 200072, China)

**Abstract** This paper studies the consensus problem of networked underactuated Euler-Lagrange (EL) systems with communication delays based on energy-shaping scheme. By using damping injection and interconnection assignment of passivity-based control (PBC) techniques, a simple distributed protocol in underactuated EL networks with the directed connected topology is proposed to achieve consensus in both leaderless and leader-follower cases. The key feature of the proposed energy-shaping scheme are to systematical integration of the energy of the actuated and underactuated parts of the system, as well as the controller for the whole system energy, which is utilized as a suitable Lyapunov function that can fully ensure the networked underactuated EL systems achieve the desired consensus. Finally, numerical simulations of the flexible-joint manipulator systems described by the underactuated EL systems are performed to analyze the effect of communication delays on the consensus, and to verify the correctness of the proposed control algorithms.

**Key words** underactuated Euler-Lagrange systems, flexible-joint manipulator, communication delays, consensus, energy-shaping scheme

## 引言

近十年多来,网络化 Euler-Lagrange (EL) 系统的合作行为与协调控制,作为一类具有代表性的多智能体系统,它的分布式同步和一致性控制已经成为包括动力学与控制等许多领域备受瞩目的热点课题之一<sup>[1-5]</sup>. 这主要是由于 EL 动力学能够描述包括机器人操纵机械臂,自主车辆和无人航天器等无数的物理和力学对象,尤其是在大规模的集成化的生产过程中,在灵活性、并行性、可操作性和可拓展性方面表现出潜在而又独有的优点. 一般来说,多个机器人的合作行为与协调控制从理论上可以归结为网络化 EL 系统的同步和一致性问题,现有大量同步和一致性问题的研究主要集中在 EL 网络在无引导者和有引导者一跟随者的两种情形<sup>[6-14]</sup>.

虽然近年来许多学者对于网络化 EL 系统提出和发展了大量的同步和一致性协议和算法,但这些结果大多涉及到完全驱动的 EL 动力学系统. 然而在实际工程应用中,如协作的柔性机械臂系统,航天器的姿态同步,水下探测的机器人都是典型的欠驱动 EL 系统,由于其控制输入的数量严格小于系统自由度(DOF). 同时网络化欠驱动 EL 系统是一个涉及多重动力学高度非线性和强耦合的复杂动态系统,尤其是考虑到当网络中涉及不同个体之间的信息交互时,使得对网络化欠驱动 EL 系统协同控制方案的设计相对于完全驱动 EL 系统更为复杂并具有挑战性. 因此,近年来一些学者致力于研究不同类型欠驱动 EL 系统的同步和一致性问题<sup>[15-19]</sup>. 例如, Nuño 等<sup>[16]</sup>提出了一类比例加阻尼的控制器实现了非恒同欠驱动 EL 网络渐近地达到一致性. Ortega 等<sup>[19]</sup>通过坐标变换,在不需要知道初始条件情况下来解决通信渠道存在未知延迟的一致性问题的.

能量整形技术是一种基于无源控制(PBC)结构的有效方案,近年来已被广泛用于处理大量各种复杂互联结构模式的物理和机械系统的动力学与控制问题. 这个控制方案的基本思想可以追溯到早期的开创性工作<sup>[20]</sup>,其核心是整合系统各个部分

能量和控制器能量作为一个系统的总能量,它被用来构造作为一个合适的 Lyapunov 函数,并进一步通过阻尼注入来确保整个闭环控制系统的稳定性. 能量整形另一个重要的特征是它不需要速度测量,从而可以避免速度传感器装置在实际应用中的不精确性甚至失效. 近来, Nuño 等<sup>[21]</sup>应用能量整形和阻尼注入控制方案,提出了一种分散式控制协议用于求解完全驱动 EL 网络在无引导者和有引导者两种情形下的一致性问题的. Cruz-Zavala 等<sup>[22]</sup>利用基于 PBC 结构的能量整形技术,给出了完全驱动 EL 系统在有限时间内达到一致性的算法. 另一方面,由于涉及诸如个体间直接或间接相互作用,网络化控制系统(NCS)中传感、通讯、计算与执行等环节不可避免地存在时滞效应<sup>[23]</sup>. 其中通讯时滞是影响协作机器人之间信息交互的关键因素之一,它通常是由传输信号延迟、信道噪声、量化误差等网络环境的不确定性随机因素引起的,它能极大影响 NCS 的性能甚至最终改变系统的稳定性<sup>[16,22]</sup>. 然而,目前尚未见到利用能量整形方案来实现具有通讯时滞欠驱动 EL 网络的一致性问题. 因此,无论从理论上还是从工程应用背景来看,这是一个极其重要而不可缺少的挑战性的研究问题.

本文的主要目的是利用能量整形方案无源控制的技术特征,来研究由欠驱动 EL 动力学所描述网络化柔性机械臂系统一致性跟踪控制问题. 通过结合互连分配加上阻尼注入策略,将具有通讯时滞 EL 网络欠驱动和驱动部分,以及控制器三部分能量有机地整合一个总的系统能量,从而使得导出的一致性协议能够确保网络化欠驱动 EL 系统达到无引导者和有引导者一追随者两种情形下所期望的跟踪一致性问题. 所获得的一致性协议是充足分布式的,同时也不需要速度测量,因而它能很方便地应用于实际中协作的网络化机器人系统.

本文的组织结构具体如下:第 1 节介绍一些相关符号、图论知识和网络化欠驱动 EL 系统动力学模型. 第 2 节介绍了本文的主要结果,分别在无引导者和有引导者一跟随者的情况下,讨论具有通讯时滞欠驱动 EL 网络的一致性问题. 第 3 节通过数

值仿真验证所提出控制算法有效性,并分析通讯时滞对一致性的效应.第4节最后对本文给出一个简短的总结.

## 1 问题描述

### 1.1 预备知识

本文中使用的以下符号:记  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ,  $\mathbb{R}^n$  是一组  $n \times 1$  的实数向量,  $\mathbb{R}^{n \times n}$  是一组  $n \times n$  的实数矩阵,  $0_n \in \mathbb{R}^n$  是所有元素都等于 0 的向量,  $1_n \in \mathbb{R}^n$  是所有元素都等于 1 的向量,  $\text{diag}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对角矩阵.  $B \otimes C$  表示矩阵  $B$  和  $C$  的 Kronecker 积,对于任何函数  $f: \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L_\infty$  空间表示为集合  $\{f: \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}^n: \|f\|_\infty < \infty\}$ ,  $L_2$  空间表示为集合  $\{f: \mathbb{R} \geq 0 \rightarrow \mathbb{R}^n: \|f\|_2 < \infty\}$ .

### 1.2 图论

在本文中,如图 1 所示,所考虑的机器人个体通过一个有向拓扑图(或有向连通网络)交换信息,每个机器人可以被视为图的一个节点,假设机器人  $i$  通过有向路径获得机器人  $j$  的信息,那么  $a_{ij} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 一般来说与邻接矩阵  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  相关的有向图的拉普拉斯矩阵  $L = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  定义为:  $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$  和  $l_{ij} = -a_{ij}, i \neq j$ . 易知  $l_{ij} \leq 0, i \neq j$ , 以及  $\sum_{j=1}^N l_{ij} = 0$ . 一棵有向生成树是由个节点组成的网络,其中一个节点称为根节点,它有一条通往其他每个节点的有向路径. 关于图的相关知识可以在在文献[24, 25]中找到.

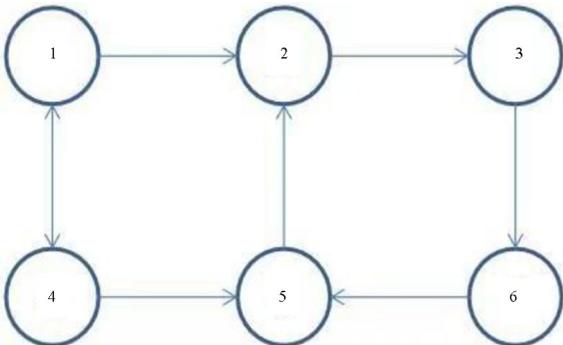


图 1 有向网络通讯拓扑

Fig.1 Directed network communication topology

### 1.3 网络化欠驱动 EL 系统

考虑由  $N$  个柔性机械臂系统构成的网络化欠驱动 EL 系统,其中第  $i$  个个体的欠驱动 EL 动力学可由如下方程表示:

$$\begin{aligned} M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + g_i(q_i) + \\ K_i(q_i - x_i) = 0_n \\ J_i\ddot{x}_i + K_i(x_i - q_i) = \tau_i \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $i=1, 2, \dots, N$ ,  $q_i \in \mathbb{R}^n$  是连杆角度位置,  $x_i \in \mathbb{R}^n$  是电机(关节)角度位置.  $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称正定的惯性矩阵,  $C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i \in \mathbb{R}^n$  为科氏力和离心力,  $g_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是重力矩,  $J_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是电机转子的转动惯量,  $K_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为柔性关节刚度系数,  $\tau_i \in \mathbb{R}^n$  是电机受到的驱动力矩.

通过借助于文献[25],我们可以定义新的变量变换:

$$y_i = x_i - K_i^{-1}g_i(q_i) \quad (2)$$

相应地可以设计出以下形式的控制器:

$$\tau_i = \bar{\tau}_i + g_i(q_i) + J_i K_i^{-1} \ddot{g}_i(q_i) \quad (3)$$

其中  $y_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\tau}_i \in \mathbb{R}^n$  是后面将要设计的控制信号.

通过利用方程(2)和(3),欠驱动 EL 网络(1)可以被约化为:

$$\begin{aligned} M_i(q_i)\ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i)\dot{q}_i + \\ K_i(q_i - y_i) = 0_n \\ J_i\ddot{y}_i + K_i(y_i - q_i) = \bar{\tau}_i \end{aligned} \quad (4)$$

一般地,欠驱动 EL 系统(1)具有以下性质<sup>[24, 25]</sup>:

性质 1(有界性):存在正实数  $g_M, g_m, g_c$  和  $g_d$ , 使得  $0 < g_m I_n \leq M_i(q_i) \leq g_M I_n$ , 其中  $M_i(q_i) = M_i^T(q_i)$ ,  $\|C_i(q_i, \dot{q}_i)\| \leq g_c \|\dot{q}_i\|$ , 以及  $\|g_i(q_i)\| \leq g_d$  成立.

性质 2(反对称性):矩阵  $\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)$  是反对称的,即对任意的  $w \in \mathbb{R}^n$ , 有

$$w^T [\dot{M}_i(q_i) - 2C_i(q_i, \dot{q}_i)] w = 0$$

为了研究网络化欠驱动 EL 系统分布式控制方案的设计,以下给出在无引导者和有引导者一跟随者两种情形下一致性定义如下:

定义 1: 考虑由  $N$  个非同恒柔性机械臂系统构成的欠驱动 EL 网络(1),通过使用分布式控制器  $\tau_i \in \mathbb{R}^n$ , 使得相应的连杆角度位置  $q_i$  将渐近地趋于一个共同常值. 也就是说存在一个常数向量  $q_c$ .

$\in \mathbb{R}^n$ , 对于所有  $i \in [1, N]$ , 有以下结论成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i(t) - q_c\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_c\| = 0 \quad (5)$$

**定义 2:** 考虑由  $N$  个非恒同柔性机械臂系统构成的欠驱动 EL 网络(1), 通过使用分布式控制器  $\tau_i \in \mathbb{R}$ , 使得相应的连杆角度位置将渐近地趋于一个期望常值  $q_l \in \mathbb{R}^n$ , 同时需要至少有一个个体可以直接获取引导者的位置信息  $q_l$ , 这样对于所有  $i \in [1, N]$ , 有以下结论成立:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i(t) - q_l\| = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_l\| = 0 \quad (6)$$

基于文献[21], 约化系统(4)中有如下能量函数:

$${}^s T(q, y, \dot{q}, \dot{y}) = {}^s K(q, y, \dot{q}, \dot{y}) + {}^s P(q, y) \quad (7)$$

其中  ${}^s K(q, y, \dot{q}, \dot{y}) = \sum_{i=1}^N {}^s K_i(q_i, y_i, \dot{q}_i, \dot{y}_i)$  和  ${}^s P(q, y) = \sum_{i=1}^N {}^s P_i(q_i, y_i)$

相应的动能函数定义为:

$${}^s K_i(q_i, y_i, \dot{q}_i, \dot{y}_i) = \frac{1}{2} [\dot{q}_i^T M_i(q_i) \dot{q}_i + \dot{y}_i^T J_i \dot{y}_i] \quad (8)$$

和势能函数的定义为:

$${}^s P_i(q_i, y_i) = \frac{1}{2} (q_i - y_i)^T K_i (q_i - y_i) \quad (9)$$

我们注意到  ${}^s T$  是正定的, 对于欠驱动 EL 系统, 我们可以有

$${}^s \dot{T}(q, y, \dot{q}, \dot{y}) = \dot{y}^T \bar{\tau} \quad (10)$$

## 2 主要结果

### 2.1 无引导者的情形

首先, 让控制器的广义坐标定义为  $\theta \in \mathbb{R}^{Nn}$ , 通过应用 EL 系统的运动方程, 我们可以相应得到反映控制器动力学特征的方程

$$M_c \ddot{\theta} + D\dot{\theta} + \nabla_{\theta} {}^c P(y, \theta) = 0_{Nn} \quad (11)$$

和相应地总能量函数:

$${}^c T(y, \theta, \dot{\theta}) = {}^c K(\theta, \dot{\theta}) + {}^c P(y, \theta) \quad (12)$$

其中  ${}^c K(\theta, \dot{\theta}) = 1/2 \dot{\theta}^T M_c \dot{\theta}$  是控制器的动能函数,  $M_c$  是半正定的惯性矩阵,  ${}^c P(y, \theta)$  是控制器的势能函数,  $D = \text{diag}(d_i I_n)$  是后面将要设计  $Nn \times Nn$  阻尼矩阵, 这里假设  $d_i > 0$ .

为了方便后面的计算, 我们选择  $M_c = I_{Nn}$ , 控制器的势能函数为

$${}^c P(y, \theta) = \frac{1}{2} (y - \theta)^T H (y - \theta) + \frac{1}{2} \theta^T (BL \otimes I_n) \theta \quad (13)$$

其中  $H = \text{diag}(h_i I_n)$ , 是一个  $Nn \times Nn$  的弹簧刚度系数矩阵, 这里  $h_i > 0$ .  $B = \text{diag}(b_i)$  是一个  $N \times N$  的增益矩阵, 其中  $b_i > 0$ .

接下来, 我们将对欠驱动 EL 网络(1)的约化系统(4)设计控制信号如下

$$\bar{\tau}_i = -h_i (y_i - \theta_i) \quad (14)$$

由于网络中机器人个体之间存在通讯时滞的信息交互, 考虑如下控制器动力学方程

$$\ddot{\theta}_i = -d_i \dot{\theta}_i - h_i (\theta_i - y_i) - b_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)]\} \quad (15)$$

这里假定从第  $i$  个个体到第  $j$  个个体的通信交互存在着一个可变的时间延迟  $T_{ji}(t)$ , 进一步假设  $0 \leq T_{ji}(t) \leq T_{ji} < \infty$  成立.

因此, 对网络化欠驱动 EL 系统(1)的驱动部分所施加的控制输入具有以下形式:

$$\tau_i = -h_i (y_i - \theta_i) + g_i(q_i) + J_i K_i^{-1} \ddot{g}_i(q_i) \quad (16)$$

为了方便地得出网络化欠驱动 EL 系统分布一致性的主要结果, 我们引进如下引理:

引理 1<sup>[16]</sup>: 对于任何矢量信号  $\alpha, \beta$ , 任何可变时间延迟  $0 \leq T(t) \leq T < \infty$  和任意常数  $c$ , 有

$$-2 \int_0^t \alpha^T(\sigma) \int_{-T(\sigma)}^0 \beta(\sigma + \zeta) d\zeta d\sigma \leq c \|\alpha\|_2^2 + \frac{T^2}{c} \|\beta\|_2^2 \quad (17)$$

**定理 1:** 对于网络化的欠驱动 EL 系统(1), 通过选择控制输入(16), 只要注入阻尼满足以下条件

$$2d_i > b_i l_{ii} c_i + \sum_{j=1}^N \frac{T_{ij}^2 a_{ji}}{c_j} \quad (18)$$

则在能量整形加阻尼注入的无源控制方案下, 能够实现如定义 1 所述无引导者情形下的一致性问题.

**证明:** 考虑到如下的 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{y}^T J \dot{y} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{\theta} + \frac{1}{2} (q - y)^T K (q - y) + \frac{1}{2} (y - \theta)^T H (y - \theta) + \frac{1}{2} \theta^T (BL \otimes I_n) \theta \quad (19)$$

结合利用上述性质 1,2,容易求得的导数:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\dot{\theta}^T D \dot{\theta} + \theta^T (BL \otimes I_n) \dot{\theta} - \\ &\sum_{i=1}^N b_i \dot{\theta}_i^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)]\} \\ &= \sum_{i=1}^N \{-d_i \|\dot{\theta}_i\|^2 - b_i \dot{\theta}_i^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\theta_j - \\ &\theta_j [t - T_{ji}(t)]\}\} \end{aligned} \quad (20)$$

因为

$$\theta_j - \theta_j [t - T_{ji}(t)] = \int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\theta}_j(\zeta) d\zeta \quad (21)$$

综合以上,我们可以得出:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\sum_{i=1}^N [d_i \|\dot{\theta}_i\|^2 + \\ &b_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{\theta}_i^T \int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\theta}_j(\zeta) d\zeta] \end{aligned} \quad (22)$$

$$U = \begin{pmatrix} d_1 - \frac{b_1 l_{11} c_1}{2} & -\frac{b_1^* T_{21}^2 a_{12}}{2c_1} & \dots & -\frac{b_1^* T_{N1}^2 a_{1N}}{2c_1} \\ -\frac{b_2^* T_{12}^2 a_{21}}{2c_2} & d_2 - \frac{b_2 l_{22} c_2}{2} & \dots & -\frac{b_2^* T_{N2}^2 a_{2N}}{2c_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{b_N^* T_{1N}^2 a_{N1}}{2c_N} & -\frac{b_N^* T_{2N}^2 a_{N2}}{2c_N} & \dots & d_N - \frac{b_N l_{NN} c_N}{2} \end{pmatrix}$$

因此有  $V_1(0) \geq 1_N^T U W$ . 这意味着,如果  $U$  每一列的元素之和都是严格的正数,那么存在  $\lambda_i > 0$ , 使得  $V_1(0) \geq \lambda_1 \|\dot{\theta}_1\|_2^2 + \dots + \lambda_n \|\dot{\theta}_n\|_2^2$  和对任意的  $i \in N$ , 都有  $\dot{\theta}_i \in L_\infty$  成立. 通过简单的计算表明,  $\lambda_i > 0$  存在的充分条件是选择  $d_i$  来满足条件(18). 因此可以设定  $d_i$  满足公式(18)的条件, 就能保证  $\dot{\theta}_i \in L_2$  和  $V_1 \in L_\infty$ , 这也意味着对任意的  $i, j \in N$  都有  $|\theta_i - \theta_j|, \dot{\theta}_i \in L_\infty$  成立.

基于以上分析,  $\dot{\theta}_i \in L_2 \cap L_\infty$  能保证  $|\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)]| \in L_\infty$  成立. 由于上述所有的信号有界,我们从公式(15)中,得出  $\ddot{\theta}_i \in L_\infty$ , 再根据 Barbalat 引理能得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_i(t) = 0_n$ .

现在对公式(15)进行微分可以得到:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ddot{\theta}_i &= -d_i \ddot{\theta}_i - h_i (\dot{\theta}_i - \dot{y}_i) - \\ &b_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\dot{\theta}_i - [1 - \dot{T}_{ji}(t)] \dot{\theta}_j [t - T_{ji}(t)]\} \end{aligned} \quad (25)$$

事实上利用  $\dot{y}_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i \in L_\infty$  和  $\dot{T}_{ji}(t)$  的有界

同时对(22)进行积分

$$\begin{aligned} V_1(t) - V_1(0) &= \\ &= -\sum_{i=1}^N [d_i \int_0^t \|\dot{\theta}_i(\sigma)\|^2 d\sigma + \\ &b_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \int_0^t \dot{\theta}_i(\sigma) \int_{\sigma-T_{ji}(\sigma)}^\sigma \dot{\theta}_j(\zeta) d\zeta d\sigma] \end{aligned} \quad (23)$$

因为  $V_1(t) \geq 0$  和根据引理 1:

$$\begin{aligned} V_1(0) &\geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_i a_{ij} \left[ \left( \frac{d_i}{b_i l_{ii}} - \frac{c_i}{2} \right) \|\dot{\theta}_i\|_2^2 - \right. \\ &\left. \frac{T_{ji}^2}{2c_i} \|\dot{\theta}_j\|_2^2 \right] \end{aligned} \quad (24)$$

令  $W = (\|\dot{\theta}_1\|_2^2, \dots, \|\dot{\theta}_n\|_2^2) \in \mathbb{R}^N$ ,  $l_{ii} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$

我们可得

性,可以保证  $\frac{d}{dt} \ddot{\theta}_i \in L_\infty$ . 因此  $\ddot{\theta}_i$  是一致连续的,并且有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \ddot{\theta}_i(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\theta}_i(t) - \dot{\theta}_i(0)] = -\dot{\theta}_i(0)$ , 因此我们可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{\theta}_i(t) = 0_n$ . 应用相同的方法,可以确定  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \ddot{\theta}_i(t) = 0_n$ . 进一步从公式(25)中我们可以得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{y}_i = 0_n$ .

接下来的证明主要分为以下两个部分:第一是证明控制器的广义坐标  $\theta$  收敛于一个共同常值;第二是证明变量  $y$  收敛于控制器的广义坐标和最终证明变量收敛于连杆角度位置.

首先,我们可以利用以下事实:  $\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)] = \theta_i - \theta_j + \int_{t-T_{ji}(t)}^t \dot{\theta}_j(\zeta) d\zeta$ , 又因为  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_i(t) = 0_n$ , 我们可以得到:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N a_{ij} [\theta_i(t) - \theta_j(t)] = 0_n$ . 用矩阵的形式并利用有向图拉普拉斯矩阵的性质,最后这个表达式可以写成:  $\lim_{t \rightarrow \infty} (L \otimes I_n) \theta(t) = 0_{Nn}$ .

这样就完成了第一步的证明. 接下来我们来看第二步的证明,对公式(4)进行微分:  $\frac{d}{dt} \dot{y}_i = J_i^{-1} [-$

$K_i(\dot{y}_i - \dot{q}_i) - h_i(\dot{y} - \dot{\theta})]$ , 因为  $\dot{q}_i, \dot{y}_i$  和  $\dot{\theta}_i \in L_\infty$ , 这能保证  $\frac{d}{dt}\dot{y}_i \in L_\infty$ . 因此  $\dot{y}_i$  是一致连续的并且有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \ddot{y}_i(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{y}_i(t) - \dot{y}_i(0)] = -\dot{y}_i(0)$$

再根据 Barbalat 引理能得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{y}_i = 0_n$ .

相应地, 因为  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{d}{d\sigma}\ddot{y}_i(\sigma) d\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{y}_i(t) - \dot{y}_i(0)] = -\dot{y}_i(0)$ , 并且  $\ddot{q}_i, \ddot{y}_i$  和  $\frac{d}{dt}\dot{y}_i \in L_\infty$ , 这

能保证  $\frac{d^2}{dt^2}\dot{y}_i \in L_\infty$ . 同样地, 我们可以得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}\dot{y}_i = 0_n$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i = 0_n$ . 另外,  $\dot{q}_i, \dot{q}_i$  和  $\dot{y}_i$  保证了  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}\dot{y}_i = 0_n$ .

综上所述, 我们已知,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{y}_i = 0_n, \lim_{t \rightarrow \infty} \ddot{q}_i = 0_n$  和系统 (4) 我们可以得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i - \theta_i| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i - q_i| = 0$ , 同时这也意味着  $\lim_{t \rightarrow \infty} |q_i(t) - q_c| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{q}_i(t) - \dot{q}_c| = 0$ . 这就完成了该部分具有通讯时滞无引导者一致性的证明.

2.2 有引导者一跟随者的情形

这节来讨论有引导者一跟随者情形的一致性, 在讨论之前先介绍一个引理.

## 2.2 有引导者一跟随者的情形

这节来讨论有引导者一跟随者情形的一致性, 在讨论之前先介绍一个引理.

引理 2:<sup>[21]</sup> 考虑对角矩阵是一个矩阵  $R = \text{diag}(r_i)$  是一个  $N \times N$  矩阵, 假设至少有一个元素是严格的正数, 即  $r_i > 0$ , 那么矩阵  $L_l = L + R$  是对称正定的并且是满秩的.

与无引导者一致性问题的情况不同, 我们选择上述对角矩阵  $R = \text{diag}(r_i)$  来建立引导者一跟随者的互连关系. 当引导者可以发出信息到第  $i$  个跟随者时,  $r_i > 0$ , 否则  $r_i = 0$ , 即存在至少一条从引导者到任何  $N$  个跟随者的有向边.

在这种情形下, 控制器的动力学可由方程 (11) 给出. 同样设  $M_c = I_{N_n}$  相应控制器的动能函数为

$\mathcal{K}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{\theta}$  和势能函数可以表示为:

$$\mathcal{P}(y, \theta) = \frac{1}{2} (y - \theta)^T H (y - \theta) + \frac{1}{2} \theta^T (BL \otimes I_n) \theta + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T (BR \otimes I_n) \tilde{\theta} \quad (26)$$

其中  $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - (1_N \otimes q_l)$ . 控制信号如公式

(14), 相对于第  $i$  个 EL 系统的控制器动力学可以表示为:

$$\ddot{\theta}_i = -d_i \dot{\theta}_i - h_i(\theta_i - y_i) - b_i r_i(\theta_i - q_l) - b_i \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)]\} \quad (27)$$

所以, 最终导出的控制输入为以下形式:

$$\tau_i = -h_i(y_i - \theta_i) + g_i(q_i) + J_i K_i^{-1} \ddot{g}_i(q_i) \quad (28)$$

**定理 2:** 对于网络化的欠驱动 EL 系统 (1), 通过选择上述控制输入 (28), 只要注入阻尼满足条件 (18), 则在能量整形加阻尼注入的无源控制方案下, 能够实现如定义 2 所述有引导者一跟随者情形下的一致性.

**证明:** 考虑到如下的 Lyapunov 函数:

$$V_2 = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \frac{1}{2} \dot{y}^T J \dot{y} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \dot{\theta} + \frac{1}{2} (q - y)^T K (q - y) + \frac{1}{2} (y - \theta)^T H (y - \theta) + \frac{1}{2} \theta^T (BL \otimes I_n) \theta + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T (BR \otimes I_n) \tilde{\theta} \quad (29)$$

结合上述性质 1, 2, 很容易得到  $V_2$  的导数:

$$\dot{V}_2 = -\dot{\theta}^T D \dot{\theta} + \theta^T (BL \otimes I_n) \dot{\theta} - \sum_{i=1}^N b_i \dot{\theta}_i^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \{\theta_i - \theta_j [t - T_{ji}(t)]\} \quad (30)$$

其余的证明与前面定理 1 的证明相似, 这里就不将赘述. 只要来满足条件 (18), 我们就能得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} [q_i(t) - \theta_i(t)] = 0_n$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{r_i [\theta_i(t) - q_l] + \sum_{j=1}^N a_{ij} [\theta_i(t) - \theta_j(t)]\} = 0_n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [q_i(t) - \theta_i(t)] = 0_n \quad (31)$$

同样利用有向图拉普拉斯矩阵的性质上述公式 (31) 可以表述为:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(R \otimes I_n) \tilde{\theta}(t) + (L \otimes I_n) \theta(t)] = 0_{N_n} \quad (32)$$

又因为

$$(L \otimes I_n) \theta(t) = (L \otimes I_n) \tilde{\theta}(t) \quad (33)$$

那么

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [(L + R) \otimes I_n] \tilde{\theta}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (L_l \otimes I_n) \tilde{\theta}(t) = 0_{N_n} \quad (34)$$

再根据引理 2, 我们可以得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}(t) = 0_{N_n}$ , 也就是说,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1_N \otimes q_l$ . 同时从定理 1 的证明, 类

似可以得出  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i(t) - q_l\| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_l\| = 0$ . 这就完成了该部分具有通讯时滞有引导者-跟随者情形下一致性定理的证明.

### 3 数值模拟

本节通过数值模拟来验证上述基于能量整形方案提出的分布式一致性协议的正确性和有效性. 如图 2 所示, 给出了柔性关节的示意图. 这里选取 5 个柔性机械臂系统构成欠驱动 EL 网络[如图 3(a)所示], 第  $i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ) 个欠驱动 EL 系统的

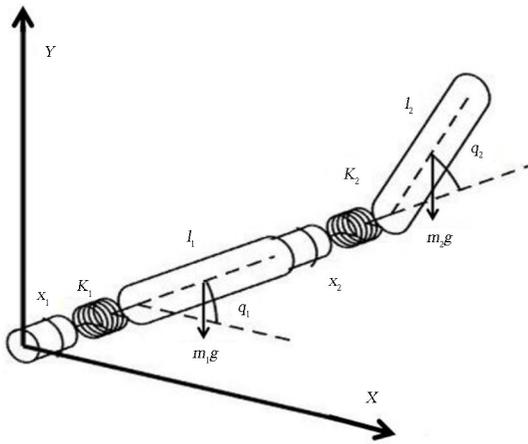


图 2 柔性关节模型  
Fig.2 Flexible-joint model

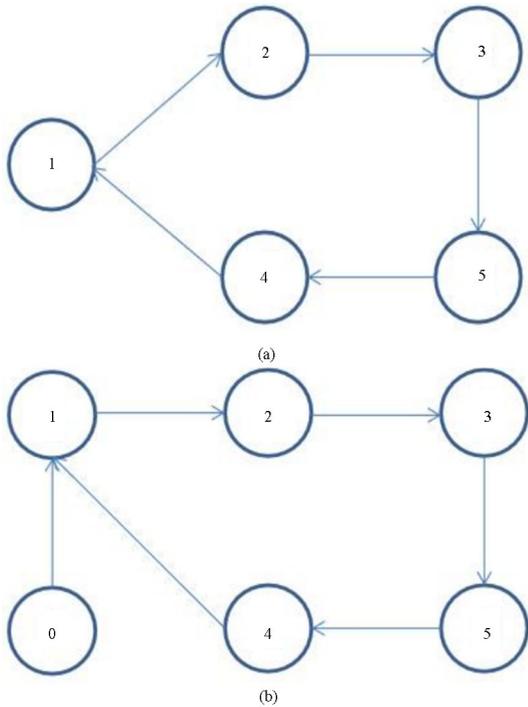


图 3 网络通讯拓扑  $G_1$  和  $G_2$

Fig.3 Network Communication Topology  $G_1$  and  $G_2$

$$M_i(q_i) = \begin{bmatrix} \alpha_i + 2\beta_i \cos q_{i2} & \delta_i + \beta_i \cos q_{i2} \\ \delta_i + \beta_i \cos q_{i2} & \delta_i \end{bmatrix}$$

$$C_i(q_i, \dot{q}_i) = \begin{bmatrix} -\beta_i \dot{q}_{i2} \sin q_{i2} & -\beta_i (\dot{q}_{i1} + \dot{q}_{i2}) \sin q_{i2} \\ \beta_i \dot{q}_{i1} \cos q_{i2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$g_i(q_i) = \begin{bmatrix} gl_{i1}(m_{i1} + m_{i2}) \cos q_{i2} + gl_{i2} m_{i2} \cos(q_{i1} + q_{i2}) \\ gl_{i2} m_{i2} \cos(q_{i1} + q_{i2}) \end{bmatrix}$$

动力学方程由方程(1)给出, 其中  $\alpha_i = l_{i1}^2 m_{i2} + l_{i2}^2 (m_{i1} + m_{i2})$ ,  $\beta_i = l_{i1} l_{i2} m_{i2}$  和  $\delta_i = l_{i2}^2 m_{i2}$ . 这里  $l_{ik}$  和  $m_{ik}$  分别表示连杆的长度和质量,  $g=9.81$  代表的是重力加速度. 在数值模拟中, 我们设置这 5 个机器人组成的网络是由 3 组非恒同的欠驱动 EL 系统组成, 每组的物理参数为: 对于第一, 二个机器人, 我们选择  $m_1 = 4\text{kg}, m_2 = 2\text{kg}, l_1 = 0.4\text{m}, l_2 = 0.4\text{m}, K_i = 4I, J_i = \text{diag}(1.5, 1.2)$ ; 对于第三, 四个机器人, 我们选择  $m_1 = 3\text{kg}, m_2 = 2.5\text{kg}, l_1 = 0.6\text{m}, l_2 = 0.5\text{m}, K_i = 6.5I, J_i = \text{diag}(1.2, 1)$ ; 对于第五个机器人, 我们选择  $m_1 = 3.5\text{kg}, m_2 = 2.5\text{kg}, l_1 = 0.3\text{m}, l_2 = 0.35\text{m}, K_i = 4.5I, J_i = \text{diag}(0.8, 0.7)$ .

从图 3(a) 可以得出 Laplacian 矩阵为

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据定理 1, 我们所设计的控制输入的参数选取  $h_i = 60, d_i = 10, b_i = 5$ , 不难验证它们是满足本文的假设和定理 1 的条件. 在这节中我们分别选取 5 个欠驱动 EL 系统初始位置

$$q_1(0) = [4.0, 3.6]^T, \quad q_2(0) = [5.1, 4.8]^T,$$

$$q_3(0) = [3.3, 3.1]^T, \quad q_4(0) = [4.6, 4.2]^T,$$

$$q_5(0) = [5.4, 5.1]^T, \quad x_1(0) = [4.4, 3.8]^T,$$

$$x_2(0) = [5.4, 5.7]^T, \quad x_3(0) = [3.6, 4.1]^T,$$

$$x_4(0) = [4.9, 5.2]^T.$$

5 个欠驱动的 EL 系统初始速度分别选择如下:

$$\dot{q}_1(0) = [0.8, 0.2]^T, \quad \dot{q}_2(0) = [-0.2, 0.3]^T,$$

$$\dot{q}_3(0) = [0.6, -0.4]^T, \quad \dot{q}_4(0) = [-0.5, 0.1]^T,$$

$$\dot{q}_5(0) = [0.5, 0.2]^T, \quad \dot{x}_1(0) = [-0.6, 0.3]^T,$$

$$\dot{x}_2(0) = [0.5, 0.1]^T, \quad \dot{x}_3(0) = [-0.3, 0.4]^T,$$

$$\dot{x}_4(0) = [-0.2, 0.3]^T, \quad \dot{x}_5(0) = [0.3, -0.4]^T.$$

在网络通讯拓扑  $G_1$  下, 考虑不同大小的通讯时滞  $T_{ji}(t) = 0, 0.1 + 0.01 \cos t, 1 + 0.01 \cos t$ , 图 4、

$$q_i = [q_{i1}, q_{i2}]^T, \quad x_i = [x_{i1}, x_{i2}]^T$$

图 6 和图 8 描述了在上述不同通讯时滞下,连杆位置的变化状态. 图 5、图 7 和图 9 分别描述了当时滞  $T_{ji}(t)=0, 0.1+0.01\cos t, 1+0.01\cos t$  时,控制器的广义坐标  $\theta$  的变化状态. 此外,比较上述 6 个图,不难看出,随着通讯延迟的增加,5 个欠驱动 EL 系统达到一致性状态的时间变长. 因此可以得到以下结论:机器人个体之间的通讯时滞可以降低网络一致性的协同性能,较大的通讯时滞能够减缓达到一致性的进程,但并不影响系统一致性的稳定性,这也证实了所提出的控制算法的正确性和有效性. 另外,当  $d=0$  不满足定理的条件时,连杆位置  $q$  的变化状态如图 10 所示,5 个欠驱动 EL 系统没有达到一致性. 这一模拟结果与定理 1 是一致的.

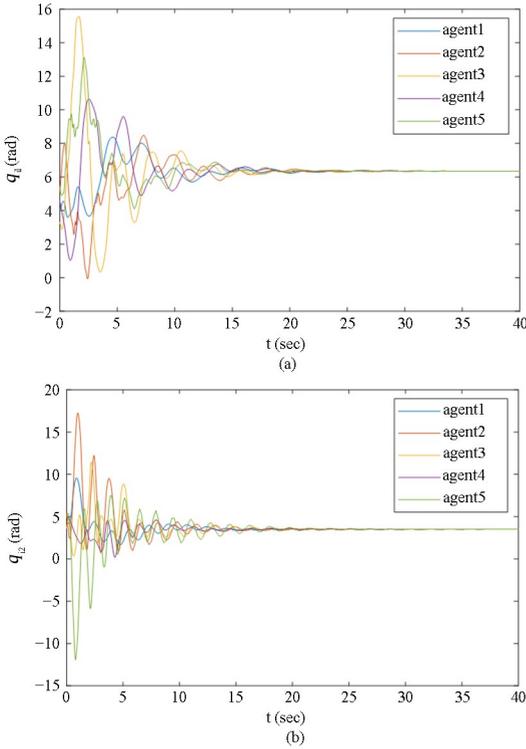


图 4 当  $T_{ji}(t)=0$  时,连杆位置  $q$  在时间  $t=0s\sim 40s$  的变化状态  
Fig.4 When  $T_{ji}(t)=0$ , the state of change of the link angular position  $q$  at time  $t=0s\sim 40s$

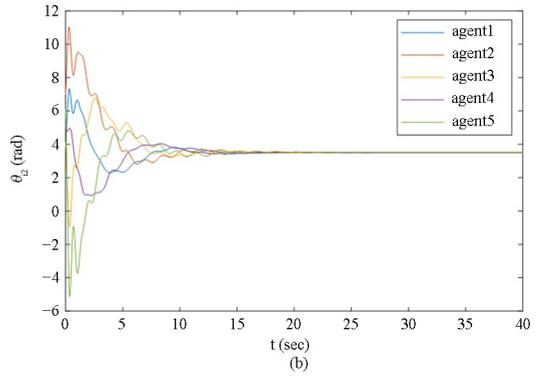
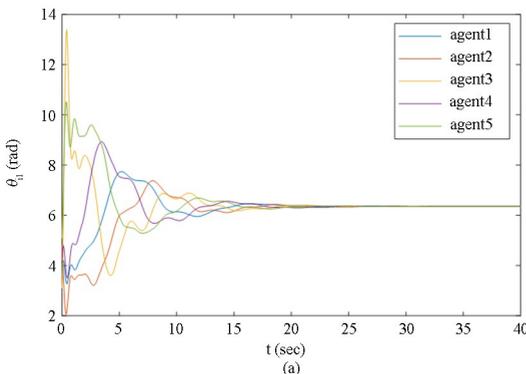


图 5 当  $T_{ji}(t)=0$  时,控制器的广义坐标  $\theta$  在时间  $t=0s\sim 40s$  内的变化状态  
Fig.5 When  $T_{ji}(t)=0$ , the state of change of the generalized coordinate of the controller  $\theta$  at time  $t=0s\sim 40s$

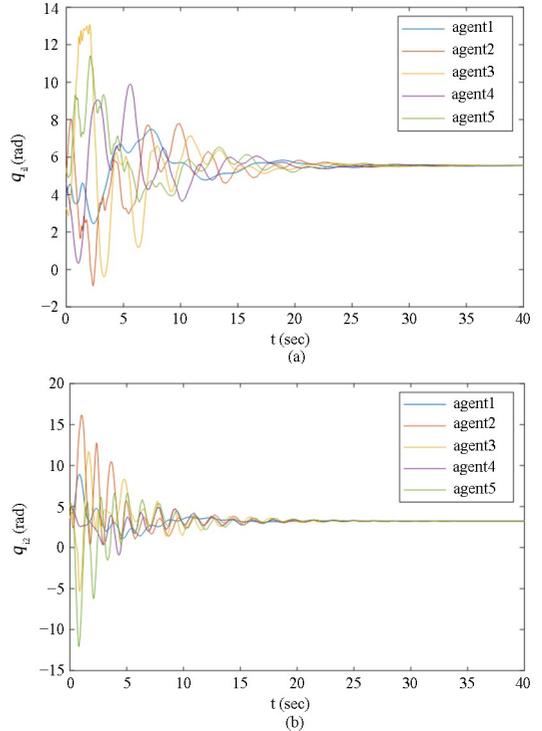


图 6 当  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t)$  时,连杆位置  $q$  在时间  $t=0s\sim 40s$  的变化状态  
Fig.6 When  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t)$ , the state of change of the link angular position  $q$  at time  $t=0s\sim 40s$

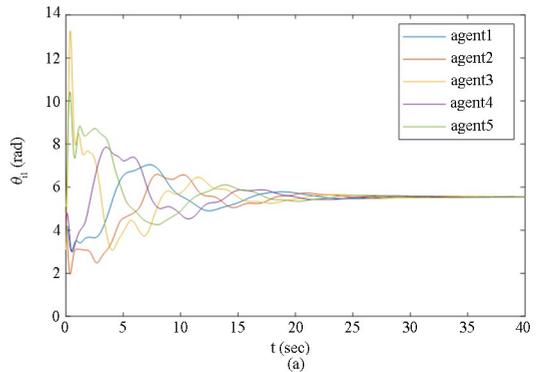


图 7 当  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t)$  时,控制器的广义坐标  $\theta$  在时间  $t=0s\sim 40s$  内的变化状态  
Fig.7 When  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t)$ , the state of change of the generalized coordinate of

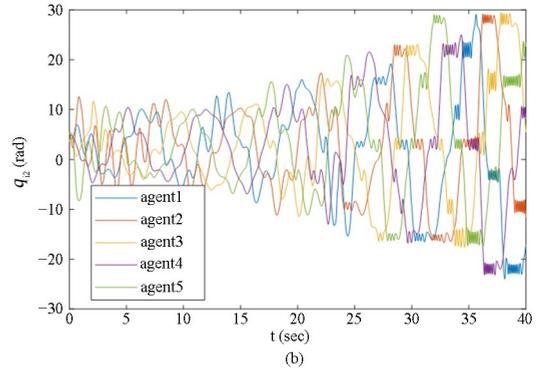
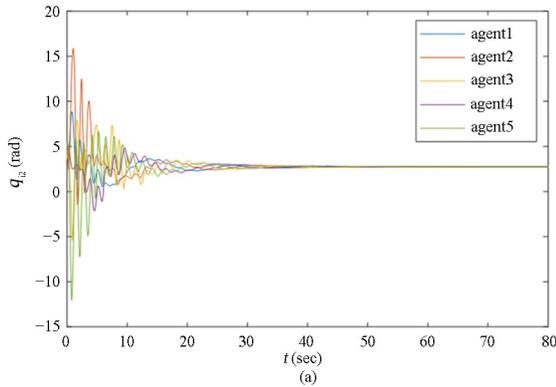
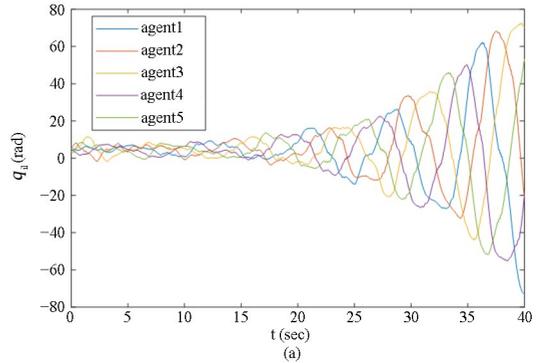
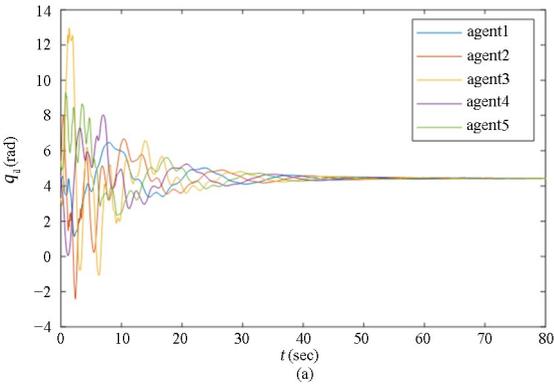
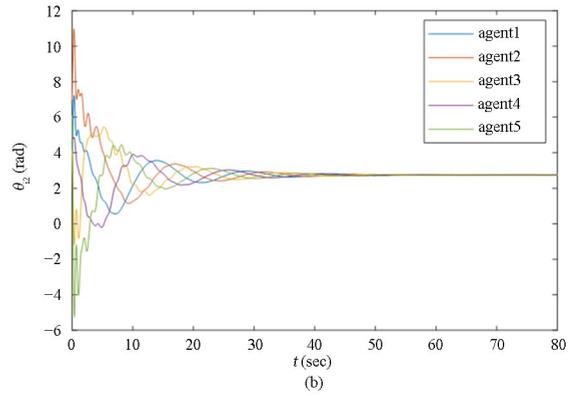
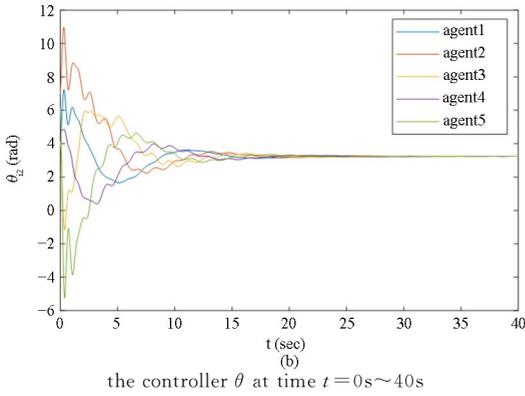


图8 当  $T_{ji}(t)=1+0.01\cos(t)$  时, 连杆位置  $q$  在时间  $t=0s\sim 80s$  的变化状态

图10 当  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t), d=0$  时, 连杆位置  $q$  不能达到一致性

Fig.8 When  $T_{ji}(t)=1+0.01\cos(t)$ , the state of change of the link angular position  $q$  at time  $t=0s\sim 80s$

Fig.10 When  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t), d=0$ , the link angular position  $q$  can not achieve consensus

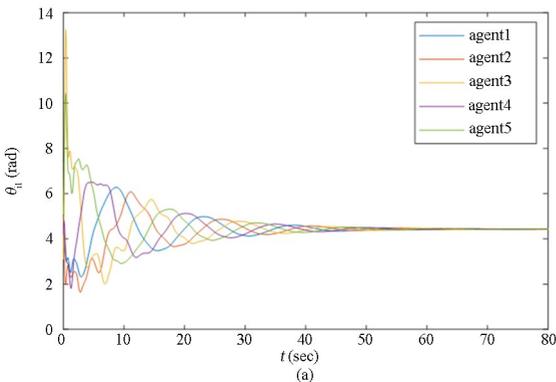


图9 当  $T_{ji}(t)=1+0.01\cos(t)$  时, 控制器的广义坐标  $\theta$  在时间  $t=0s\sim 80s$  内的变化状态

Fig.9 When  $T_{ji}(t)=1+0.01\cos(t)$ , the state of change of the generalized coordinate of the controller  $\theta$  at time  $t=0s\sim 80s$

在图3(a)的基础上,我们让引导者(标记为0)的信息只传输给机器人个体1,通信拓扑结构如图3(b)所示. 选取  $h_i=60, d_i=10, b_i=5$  和  $r_i=6$ , 虚拟引导者的位置为  $q_l=[1, -1]^T$ , 其它的初始条件和系统的物理参数一样.

考虑在网络通讯拓扑  $G_2$ , 通讯时滞为  $T_{ji}(t)=0.1+0.01\cos(t)$  的情况下, 图11说明了五个欠驱动 EL 系统的连杆位置在时间内的变化状态. 图12显示控制器的广义坐标的变化状态. 从图11和图12可以看出这与引导者传达给机器人个体1的信息  $q_l=[1, -1]^T$  完全一致, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|q_i(t) - q_l\| = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\dot{q}_i(t) - \dot{q}_l\| = 0$ . 这一模拟结

果与定理 2 的结果是相符合的。

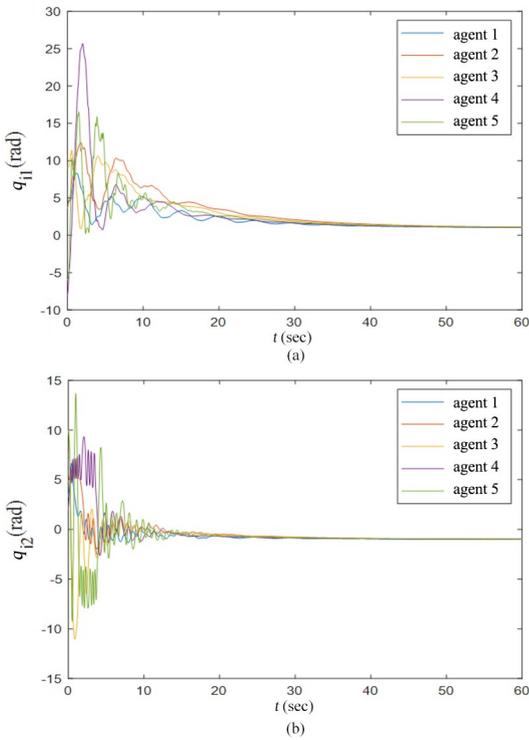


图 11 当  $T_{ji}(t) = 0.1 + 0.01\cos(t)$  时, 连杆位置  $q$  在时间  $t = 0s \sim 60s$  的变化状态

Fig.11 When  $T_{ji}(t) = 0.1 + 0.01\cos(t)$ , the state of change of the link angular position  $q$  at time  $t = 0s \sim 80s$

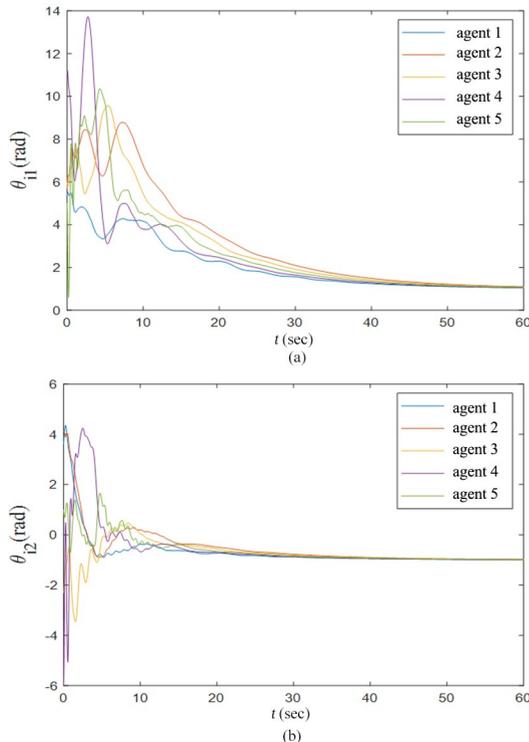


图 12 当  $T_{ji}(t) = 0.1 + 0.01\cos(t)$  时, 控制器的广义坐标  $\theta$  在时间  $t = 0s \sim 60s$  内的变化状态

Fig.12 When  $T_{ji}(t) = 0.1 + 0.01\cos(t)$ , the state of change of the generalized coordinate of the controller  $\theta$  at time  $t = 0s \sim 60s$

## 4 结论

本文在无引导者和有引导者一跟随者的两种情况下,通过充分利用能量整形方案无源控制的特征,将具有通讯时滞 EL 网络欠驱动和驱动部分以及控制器三部分能量有机地整合一个总的系统能量,这个总能量被选择作为一个合适的 Lyapunov 函数,使得该分布式协议能够确保网络化欠驱动 EL 系统实现所期望的跟踪一致性.它是充足分布式的同时也不需要速度测量,因而它将很方便地应用于实际工程中网络化机器人的控制与协作.最后,以欠驱动 EL 网络的数值模拟来验证理论算法的有效性同时分析不同通讯时滞对一致性性能的影响.

## 参考文献

- [1] GAO C, WANG Z, HE X, et al. Fault-tolerant consensus control for multiagent systems: an encryption-decryption scheme [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2021, 67(5): 2560—2567.
- [2] WANG X, WANG G, LI S. Distributed finite-time optimization for disturbed second-order multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 51(9): 4634—4647.
- [3] SAKTHIVEL R, PARIVALLAL A, MANICKAVALLI S, et al. Resilient dynamic output feedback control for bipartite consensus of multiagent systems with Markov switching topologies [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2021, 31(12): 5926—5942.
- [4] WANG J, GAO J, WU P. Attack-resilient event-triggered formation control of multi-agent systems under periodic DoS attacks using complex Laplacian [J]. ISA Transactions, 2022, 128: 10—16.
- [5] SHI Y, LIU C, WANG Y. Asymptotically stable filter for MVU estimation of states and homologous unknown inputs in heterogeneous multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2021, 19(2): 884—894.
- [6] HUANG J, XIANG Z. Leader-following bipartite consensus with disturbance rejection for uncertain multiple Euler-Lagrange systems over signed networks [J]. Journal of the Franklin Institute, 2021, 358(15): 7786—7803.

- [7] LU M, LIU L. Leader-following consensus of multiple uncertain Euler-Lagrange systems subject to communication delays and switching networks [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 63(8): 2604–2611.
- [8] HU H, WEN G, YU W, et al. Finite-time coordination behavior of multiple Euler-Lagrange systems in cooperation-competition networks [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 49(8): 2967–2979.
- [9] WEI B, XIAO F, FANG F, et al. Velocity-free event-triggered control for multiple Euler-Lagrange systems with communication time delays [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(11): 5599–5605.
- [10] CAI X, WANG C, WANG G, et al. Leader-following consensus control of position-constrained multiple Euler-Lagrange systems with unknown control directions [J]. *Neurocomputing*, 2020, 409: 208–216.
- [11] HE C, HUANG J. Leader-following consensus for multiple Euler-Lagrange systems by distributed position feedback control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, 66(11): 5561–5568.
- [12] NGO V T, LIU Y C. Event-based communication and control for task-space consensus of networked Euler-Lagrange systems [J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2021, 8(2): 555–565.
- [13] YANG Z J, QIN P. Robust synchronization tracking control of networked Euler-Lagrange systems using reference trajectory estimation based on virtual double-integrators [J]. *International Journal of Systems Science*, 2016, 47(9): 2088–2099.
- [14] MA C, ZENG Q, ZHAO X. Synchronization of networked Euler-Lagrange systems by sampled-data communication with time-varying transmission delays under directed topology [J]. *Neurocomputing*, 2015, 149: 729–735.
- [15] KORAYEM M H, NEKOO S R. Finite-time state-dependent Riccati equation for time-varying non-affine systems: rigid and flexible joint manipulator control [J]. *ISA Transactions*, 2015, 54: 125–144.
- [16] NUÑO E, SARRAS I, BASAÑEZ L. Consensus in networks of nonidentical Euler-Lagrange systems using  $P+d$  controllers [J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2013, 29(6): 1503–1508.
- [17] HU Y, DIAN S, GUO R, et al. Observer-based dynamic surface control for flexible-joint manipulator system with input saturation and unknown disturbance using type-2 fuzzy neural network [J]. *Neurocomputing*, 2021, 436: 162–173.
- [18] SHI H, WANG M, WANG C. Pattern-based autonomous smooth switching control for constrained flexible joint manipulator [J]. *Neurocomputing*, 2022, 492: 162–173.
- [19] AVILA-BECERRIL S, ESPINOSA-PÉREZ G, PANTELEY E, et al. Consensus control of flexible-joint robots [J]. *International Journal of Control*, 2015, 88(6): 1201–1208.
- [20] TAKEGAKI M, ARIMOTO S. A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators [J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1981, 103(2): 119–125.
- [21] NUÑO E, ORTEGA R. Achieving consensus of Euler-Lagrange agents with interconnecting delays and without velocity measurements via passivity-based control [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2017, 26(1): 222–232.
- [22] CRUZ-ZAVALA E, NUÑO E, MORENO J A. Finite-time consensus of Euler-Lagrange agents without velocity measurements via energy shaping [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(17): 6006–6030.
- [23] KLOTZ J R, OBUZ S, KAN Z, et al. Synchronization of uncertain Euler-Lagrange systems with uncertain time-varying communication delays [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 48(2): 807–817.
- [24] MA M, ZHOU J, CAI J. Pinning synchronization in networked Lagrangian systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2016, 18(2): 569–580.
- [25] NUÑO E, VALLE D, SARRAS I, et al. Leader-follower and leaderless consensus in networks of flexible-joint manipulators [J]. *European Journal of Control*, 2014, 20(5): 249–258.