文章编号:1672-6553-2023-21(8)-006-013
DOI:10.6052/1672-6553-2023-024

时滞系统非线性动力学研究进展*

孙中奎[1†] 金晨[1,2]

(1. 西北工业大学 数学与统计学院,西安 710129)

(2. 太原科技大学 应用科学学院,太原 030024)

摘要 综述了近年来时滞系统非线性动力学的研究进展,重点阐述了时滞系统的稳定性与分岔、时滞系统的混沌及其控制、时滞系统随机动力学研究、时滞网络系统的动力学方面的一些理论和方法的研究结果,结合研究现状展望了若干值得关注的问题.

关键词 时滞, 动力学, 非线性, 振动控制

中图分类号:O313 **文献标志码**:A

Advances in Nonlinear Dynamics for Delayed Systems*

Sun Zhongkui[1†] Jin Chen[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710129, China)

(2. School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan, Shanxi 030024, China)

Abstract The recent advances in nonlinear dynamics for delayed systems are reviewed in this paper. The review mainly focuses on the stability and bifurcations, chaos and its control, stochastic dynamics and network dynamics of delayed systems. Finally, some open problems for future investigations are prospected based on the research actuality.

Key words time delay, dynamics, nonlinearity, vibration control

引言

人们对时滞系统的研究由来已久. 最早可追溯至 18 世纪中叶, Bernoulli、Poisson、Euler、Lagrange 等人在对古典几何问题的研究中就涉及到了时滞系统[1]. 1771 年 Condorcet 导出了历史上已知的第一个时滞系统。但是,由于时滞系统本身的复杂性,在此后的两个世纪中,对这方面的研究基本陷于停顿。直到二十世纪七十年代,在生物、物理、经济、电路系统、控制理论和工程应用等问题的研究中,推导出大量的时滞系统,才又一次引发人们对时滞系统的研究热潮[2-5]. 近年来,随着非线性科学的蓬勃发展,时滞动力系统的研究逐渐成为被广泛关注的热点前沿问题. 由中科院与科睿唯安联合发布的《研究前沿》在 2018 年和 2019 年连续两年将时滞系统理论方法的研究列为工程学、数学与计算机领域十大热点前沿之一.

时滞在现实系统中普遍存在,在过去很长一段时间里,人们对动力系统的研究经常忽略系统中的固有时滞. 这种做法在对精度要求不高的情况下的确可以起到简化系统的效果,但是随着对系统精度要求的不断提高,时滞对系统性能的影响越来越不

2023-03-21 收到第 1 稿,2023-05-24 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11772254, 11972288)和山西省自然科学基金(20210302124546), National Natural Science Foundation of China (11772254, 11972288) and National Natural Science Foundation of Shanxi (20210302124546).

† 通信作者 E-mail:dynsun@126.com

可忽略. 在数学、生物、力学、经济、工程等领域中的时滞问题逐渐引起了人们的广泛关注[6-10]. 随着对时滞系统研究的深入,人们发现一方面忽略时滞可能会导致错误的结论. 例如:在对悬臂梁系统研究中,若不考虑时滞因素根本无法解释系统在某些条件下的强烈的自激振动现象. 另一方面,与无时滞的动力系统相比,含有时滞的动力系统往往会呈现更加复杂的动力学现象. 例如:著名的 Mackey-Glass 方程,即便其方程维数只有一维,系统也可以产生混沌现象.在 Ikeda 方程中,时滞甚至还能导致高维混沌.

在时滞系统中,系统状态随时间的演化不仅依赖当前,还和系统过去的状态有关. 这在数学上一般用时滞微分方程来描述. 由于时滞的存在,导致时滞系统的特征方程有无穷多个根,其解空间是无穷维的. 这给对时滞系统的研究带来了巨大困难和挑战. 同时,已有的研究已经发现,时滞可能导致系统从稳定变为不稳定,甚至出现极限环、分岔、混沌等复杂的动力学行为,对系统性能产生重要影响. 基于以上分析,对时滞系统的研究具有重大的理论价值和工程应用前景,是一个具有挑战性的前沿课题.

本文将以时滞为主题,对以下四方面科学问题进行综述,即时滞系统的稳定性与分岔、时滞系统的混沌及其控制、时滞系统随机动力学研究、时滞网络系统的动力学研究. 介绍了时滞系统研究的主要方法,阐述了时滞系统领域内相关热点问题的研究进展,并结合研究现状展望了若干值得关注的问题.

1　时滞系统的稳定性与分岔

1.1　稳定性

研究时滞动力系统稳定性主要有两类方法,一类是基于 Lyapunov 泛函的时域方法. 从系统的状态空间出发,构造满足特定条件的 Lyapunov 泛函[11-16]. 许多学者对此做了很多努力,发展出了很多改进方法,如:Lyapunov-Razumikhin 方法[3,10]、自由权矩阵方法[17,18]、基于 Jensen 不等式,Park 不等式的改良结果[19,20]、时滞分解法[21,22]. 另一类是基于系统方程特征根分析的频域方法.总体思路是根据系统的特征根分布特点判定时滞系统的稳定性. 该方法最早由 Pontryagin 在研究一类超越方程问题时提出并给出了用特征多项式的零点分布来表征的时滞系统的稳定性的原则性方法[23]. 自 Pontryagin 提出的特征根方法问世以来,引起了很多学者的关注和兴趣,相继取得了许多实用性更强的研究成果,丰富完善了此类方法在时滞系统中的应用。如:Rouche 定理[24], Cooke 和 Grossman 方法[25,26], Nyquist 准则[27], Mikhailov 判据[28,29], 辐角原理法[30,31], 域分解方法[32].

总体上看,基于 Lyapunov 泛函的时域方法的基本思路是将稳定性问题转换为寻找 Lyapunov-Kasvoskii 泛函或 Lyapunov-Razumikhin 函数的问题,进而转化为归结为求解线性矩阵不等式的问题. 在实际应用中, 由于构造 Lyapunov 泛函尚无规律可循, 且对沿系统轨线的全导数估计依赖于不等式估计技巧, 导致这类方法得到的结果常常过于保守. 基于系统方程特征根分析的频域方法的基本思路是将时滞系统的稳定性问题转换为频域内超越特征函数的稳定性问题,或复杂矩阵函数的谱问题. 特征根分析中的主要困难是特征方程中含有指数形式的超越函数, 使得特征根有无穷多个, 通常无法获得其所有特征根的信息. 无论是时域方法还是频域方法, 都是在借鉴了研究非线性常微分方程思路的基础上,对其研究方法进行改进和推广,进而应用在对非线性时滞常微分方程的研究中. 频域法只适用于时不变系统,而时域法适用于任何时滞系统.

1.2　Hopf 分岔

在非线性时滞动力系统中,Hopf 分岔作为被讨论的最多的分岔一直都是时滞系统研究的热点问题之一. Hopf 分岔是非线性系统特有的现象, 分岔发生时系统可在不从外界吸收能量的情况下维持周期振动,即工程中的“自激振动”. 产生这种“自激振动”的内在机制是: 系统平衡点随着某个系统参数变化发生稳定性切换, 而系统非线性将受扰后发散的运动制约在有限范围内. 在数学上, 对应:系统存在某个参数值,使得系统特征方程除了一对简单的共轭纯虚根外,其余特征根均具有负实部. 在时滞系统中,关于 Hopf 分岔的研究成果非常丰富. 整体上看,主要围绕: 分岔存在条件、分岔方向、分岔解的求解及其稳定性等问题进行研

究. 常用研究方法有：

(1)中心流形定理和规范型理论[33-36]

借助中心流形定理对系统降维，利用规范型理论对系统进行等价简化. 不仅可以判定分岔点附近周期解的存在性，还能得到周期解的近似解析表达式. 该方法有严格的数学基础做支撑，因此，受到很多数学家的青睐，但由于其繁杂的计算量和精度上的不足在工程领域和实际应用中受到一定限制.

(2)Lyapunov-Schmidt 方法[37]

该方法的主要思想是将方程所在的整个空间分解为两个子空间，得到等价的子空间的两个方程，其中一个方程由隐函数定理保证了其解的唯一性，于是原方程的分岔分析便被约化为子空间中另一个低维方程的分岔分析.

(3)Fredholm 择一法[38]

区别于中心流形定理中先进行降维，再在低维空间内研究约化系统分岔的做法. 该方法先将解在整个解空间展开，再向低维子空间进行约化.

(4)多尺度法[39-41]

在系统非线性项较小的情况下，该方法十分有效且可以省去应用中心流形定理的繁琐计算过程. 由于只适用于弱非线性系统且分岔参数只能在分岔点的某个邻域内变化，这种方法的应用十分受限.

(5)增量谐波平衡法[42]

这是由 Lau 和 Cheung 提出的基本原理发展而来的方法，现已广泛应用于各种强非线性时滞系统的分岔分析中. 其基本思想是将 Newton-Raphson 方法与谐波平衡法相结合，得到一组非线性代数方程. 但主要问题在于谐波项项数和初始迭代值的选取没有确定的理论依据，主要依靠研究者的经验.

(6)摄动-增量方法[43,44]

该方法是由 Chan 等人在摄动-迭代法的基础上提出的一种改进方法. 把经典的摄动法与增量法相结合，在分岔点附近采用摄动法，然后对参数依次增加一个小量，利用“正交”条件得到一个代数方程组，求其解可得所求周期解的修正量. 该方法即兼顾了多尺度方法的优点，又省去了应用中心流形定理的繁琐计算过程，现已广泛应用于计算各种强非线性时滞系统的周期解问题中.

此外，研究 Hopf 分岔的方法还包括弧长路径跟踪法、特征函数法、频域法、离散 Lyapunov 泛函和不变流形理论相结合等方法. 我国学者胡海岩、王在华、徐鉴等人在对时滞系统的稳定性及分岔的研究中也取得了很多优秀成果[10,45-48].

2 时滞系统的混沌及其控制

2.1 时滞系统中的混沌

混沌作为非线性动力系统所特有的动力学现象，由美国气象学家洛伦兹在研究气候模型时首先发现的. 混沌是一种在确定性系统中出现的随机状态. 对于不含时滞的动力系统而言，混沌现象往往只能在高维系统中出现. 然而，对于含时滞的非线性系统，即便是在最简单的一维系统中，也可产生混沌. 例如，Mackey 和 Glass 在研究粒细胞和骨髓干细胞再循环过程中引入了一个一维的含有时滞的动力系统 Mackey-Glass 系统[49]，并在此一维时滞系统中发现了混沌. 随后 Farmer 对著名的 Macky-Glass 系统的动力学行为进行了深入研究，发现了时滞和吸引子维数之间的线性依赖关系[50]. Heiden 等人在数学上严格证明了一维时滞微分方程可产生混沌[51].

Ikeda 等人、Lepri 等人在对一个含有时滞的光学系统的研究中发现了高维混沌行为[52,53]. Fischer 在半导体激光系统实验中也发现了时滞诱导的高维混沌[54]. 在文献[55]中 Boe 等人、在文献[56]中 Ueda 等人研究了时滞系统的分岔和混沌以及通向混沌的道路. Plaut 等人在文献[57]中研究了参激和外激共同作用下的时滞非线性系统的混沌运动. Nbendjo 等人运用 Melnikov 方法分析了 Duffing 系统出现混沌的必要条件，并结合数值方法研究了该时滞系统的混沌现象[58,59]. 我国学者胡海岩等人研究了带有时滞位移反馈的 Duffing 系统的分岔和混沌现象[60]. 我国学者徐鉴等人在文献[47,48]中分别研究了带有时滞速度反馈的 Duffing 振子和带有时滞位移反馈的 Van der Pol-Duffing 振子的动力学行为，并借助中心流形理论，得到了约化系统，结合分岔图、Poincare 映射等数值方法讨论了时滞导致的分岔以及时滞诱导的混沌等复杂行为.

2.2 混沌的控制及其同步

自混沌现象被发现以来，控制混沌逐渐成为一

个重要的研究方向，并在二十世纪九十年代后取得了长足发展，很多混沌控制方法被提出并在对动力系统混沌控制的应用中不断成熟，完善起来. 控制混沌的主要方法有：OGY 控制法[61-63]、时滞反馈控制法[64,65]、开环控制法[66,67]、自适应控制法[68,69]、线性和非线性控制法[70,71]等. 整体上看，Pyragas 提出的时滞反馈控制法不需重构像空间，不需跟踪目标状态且对噪声不敏感. 因而在各种动力系统中有着更广泛的应用. 在对时滞系统混沌的控制研究中，Babloyantz 等人基于改进的 OGY 控制法研究了一类混沌网络振子的不稳定周期轨道[72]. Celka 应用 Pyragas 所提出的时滞反馈控制法研究了一个时滞电路模型的混沌运动[73]. 在文献[74]中，作者研究了一类含时滞的一阶连续时间矢量系统的混沌控制问题. 文献[75]中，作者推广了标准反馈控制法并将其应用到含时滞的一维动力系统中，实现了混沌控制. 针对不稳定轨道的周期未知的困难，Nakajima 等人[76]和 Kittel 等人[77]分别提出了自适应控制法，并已被广泛应用到对混沌时滞系统的控制上来[78].

随着时滞系统混沌研究的蓬勃发展，关于时滞系统混沌同步方面的工作也取得了一系列丰富的成果. 1990 年 Pecora 和 Carroll 首次发现了时滞系统的混沌同步现象[79]. 2000 年 Voss 在含有时滞反馈的动力系统中首次发现了被驱动系统可以与驱动系统的未来状态同步，并将这种反直觉的动力学现象称为超前同步[80]. 随后在 2001 年，Voss 在先前工作的基础上推广了文献[80]的主要结论，使之能够对混沌系统进行长期预测[81]，并运用所提超前同步的概念研究了一个电路系统的超前同步[82]. 紧接着，Masolle 和 Zanette 又进一步推广了 Voss 的结果，研究发现超前同步的超前时间具有一定独立性[83,84]. Pyragas 首次从理论角度研究了一维时滞系统的完全同步，推导了 Mackey-Glass 系统发生完全同步的解析条件[85]. Shahverdiev 等人对含多时滞 Mackey-Glass 系统的完全同步问题展开了全面研究[86]. Boccaletti 等人综述了混沌同步领域的主要方法，详细介绍了几种不同类型的混沌同步的特征[87]. 文献[88,89]和文献[90-92]分别研究了由于参数不匹配而导致的完全同步和滞后同步问题. 文献[93-95]研究了时滞系统的相同步问题. 文献[96,97]研究了带有时滞反馈的神经网络的混沌同步问题. 作者研究了单时滞系统和多时滞系统中的混沌运动及其同步控制策略，揭示了时滞对系统混沌行为的关键性影响[98,99]. 关于机器学习在混沌的预测及其同步问题上的应用可以参看文献[100,101].

此外，近年来有越来越多的学者在一些工程和实际应用中开展了时滞利用的研究，即利用时滞对系统响应进行主动干预和控制. 例如，我国学者徐鉴等人利用时滞对吸振器和隔振器的动态行为进行调节，大大提高了吸振器的吸振性[102-104]. 在海洋平台的动力学控制中，有学者通过在控制通道中引入人为时滞，发现适当的时滞可以增强海洋平台稳定性，减弱波浪引发的振动，从而提高系统的控制性能[105-107].

3　时滞系统的随机动力学研究

关于随机时滞动力系统动力学的研究，虽然没有确定性时滞系统那样深入和完善，但也吸引了海内外诸多学者的关注. 自 Kiyosi Itô 对随机微分方程领域开创性的研究以来[108]，对随机时滞动力系统也取得了一系列成果. Mohammed 的专著[109]对之前的工作进行了总结，进一步发展了随机时滞系统的稳定性理论. Adomian 等人发展了求解非线性随机时滞微分方程的近似方法[110]. Steve Guillouzic 等人首次推导出了随机时滞系统的 FPK 方程，但是方程本身不具有闭合性，根本无法解析的求解，甚至数值求解也非常困难[111]. Frank 基于 Mohammed 理论提出了广义随机时滞系统的 FPK 方程[112]. Kim 等人研究了含时滞的耦合振子的随机共振问题[113]. Ivanov 等人对随机时滞微分方程稳定性理论及其应用进行了综述[114]. 我国学者毛学荣提出了随机 Razumikhin 方法和随机 LaSalle 原理，在随机时滞系统的稳定性分析领域做出了很多开创性的贡献[115-117]. 廖晓昕等人也在随机时滞系统解的稳定性方面做出了优秀的工作[118,119]. Yu 等人研究了一类时滞神经网络系统的随机同步问题[120]. 作者对随机时滞系统中的随机共振、随机分岔、混沌运动现象进行了深入研究，发现了时滞诱导的丰富的分岔现象，发展了适用于随机时滞系统的多尺度方法和广义 Melnikov 理论，提出了利用白噪声来实现或增强非线性系统滞后同步的同步控制策略[121-123]. 此外，对随机时滞系统数值

求解方面的研究可参看文献[124,125].

4 时滞网络系统的动力学研究

近年来,网络系统逐渐成为包括力学、物理学、脑科学在内的诸多领域关注的热点问题. 特别地,时滞耦合作用下网络系统中很多有趣的动力学现象吸引的大量学者的关注. 在时滞耦合网络系统中,同步和振动抑制现象是两类最常见动力学现象. 对时滞耦合网络系统中同步和振动抑制现象的研究对进一步发展时滞网络系统动力学、促进其在相关学科领域的实际应用都有非常重要的理论和现实意义.

4.1 时滞网络系统中的同步

同步在自然界、生物系统、社会生活、工程技术等领域是普遍存在的. 例如,萤火虫同步地闪动荧光、鱼群保持同方向地迅速游动、鸟群的集体迁徙、帕金森氏病和原发性震颤、蝗虫的同步爆发等. 因而研究时滞耦合网络系统中同步现象及其内在机理有着非常明确和重要的现实意义. 同步是指网络中多个振子在耦合作用下,其状态变量保持一定相对关系的动力学行为. 广义上说,同步包括完全同步、相同步、滞后同步、超前同步等. 研究同步问题的理论和方法比较单一,基本上都是采用 Krasovskii-Lyapunov 方法求解平衡点的稳定性和同步的充要条件,再辅以数值分析验证.

Dhamala 等人在含时滞的 Hindmarsh-Rose 神经元网络中发现了时滞增强神经同步的现象,在无时滞的条件下,这种同步只有通过更高的耦合强度才能实现[126]. 王青云和陈关荣研究了具有化学突触和信息传输时滞的无标度 Rulkov 神经网络系统,发现在不同的抑制突出概率下时滞可以促进或抑制神经元网络的同步[127]. Rossoni 等人研究了 Hodgkin-Huxley 神经元系统同步的稳定性. 通过计算最大李雅普诺夫指数发现了两个神经元 Hodgkin-Huxley 在含时滞的扩散耦合和脉冲耦合下的同步与去同步行为[128]. Selivanov 等研究了时滞耦合下 Stuart-Landau 振子网络的同步及其控制策略,将时滞耦合与控制理论中的速度梯度法相结合,提出了一种新的同步控制的自适应方法[129]. Schöll 及其合作者在复杂网络等领域开展了大量关于时滞诱导或增强振子的同步运动、振幅奇异态以及复杂动力学等方面的研究工作,取得了许多有价值的研究进展[130-132]. 杨晓丽等人研究了模神经元网络中时滞对抑制突发同步的差分反馈控制的显著影响,发现了在小世界网络和无标度网络中部分时滞耦合诱导的时空有序现象[133,134]. 国内的王青云团队长期从事生物神经元网络系统的动力学研究,针对时滞诱导的同步转迁行为开展了大量研究工作,取得了一系列有意义的研究成果[135-137]. 马军团队在时滞耦合神经元系统的群体动力学领域做出了出色的工作[138-139]. 茅晓晨等人在时滞神经网络系统的稳定性切换、分岔、同步等方面的研究也取得了丰富的成果[140,141]. 此外,关于含时滞的复杂网络中各类稳定性、控制与同步问题的研究,还可参阅文献[142-144].

4.2 时滞网络系统中的振动控制

时滞网络系统中另一个典型现象是振动抑制,指多个处于振荡态的振子在相互作用下,稳定到不动点解的动力学行为. 1998 年,Reddy 等人考虑到振子之间的相互作用存在时间延迟,在两个全同的极限环振子中引入了时滞耦合,首次发现了在全同振子中的振幅死亡现象[145]并从实验的角度证实了时间延迟能使耦合系统产生振幅死亡现象[146]. 随后,Strogatz 教授在 Nature 杂志上指出 Reddy 等人关于时延诱导的振幅死亡的研究具有重要的科学意义[147]. 邹为等人研究发现部分时滞耦合能扩大系统发生振幅死亡态的参数区域,揭示了振幅死亡区域和比例因子存在近似的函数关系[148]. Teki 等人研究了两个一维复杂的 Ginzburg-Landau 系统,发现全同耦合系统引入时滞后才能出现振幅死亡态[149]. 作者研究了全局时滞耦合的分数阶振子系统的振幅死亡. 利用分数阶时滞系统的稳定性理论,推导了死亡岛的边界解析条件和死亡岛个数的理论表达式,发现了分数阶导数和时滞共同诱导的死亡岛涌现现象[150,151].

近年来,对于不同形式的时滞诱导的振动抑制行为的研究也吸引了很多学者的关注,取得了丰富的成果. Atay 研究了两个带有分布式时滞的耦合振子,发现当时滞分布在一个区间而不是集中在一点时,能扩大振幅死亡区域[152]. 随后,Kyrychko 等人将分布式时滞引入非全同的耦合振子系统,研究发现在弱时滞分布下,振子的频率失谐越高,系

统的振幅死亡区域越大;强时滞分布下,频率失谐越高,系统的振幅死亡区域越小[153]. Konishi 等人研究了具有不同的耦合时滞笛卡尔网络,发现了子网中的耦合时滞存在差异情况下诱导的振幅死亡行为[154]. Saxena 等人研究了一个具有积分时滞耦合的动力系统,发现积分时滞耦合下系统的振动抑制行为会更加稳健[155].

5　展望

本文以时滞动力系统为主题,对非线性时滞系统中我们所关心的问题进行了四个方面的综述,介绍了近期取得的一些研究进展和成果. 通过以上综述可以看出,时滞系统是对事物规律更本质的刻画,已经成为包括数学、力学、物理学、生命科学、信息科学在内的诸多学科领域内的热点研究课题. 海内外诸多学者开展了大量研究工作,取得了一系列有意义的研究成果. 随着非线性科学的飞速发展,时滞系统在各个领域的应用前景广阔,必将是今后一个时期里非线性科学领域重点关注的课题之一.

下面就本文涉及的研究内容,对一些值得关注的问题和发展趋势进行研究展望:

(1)时滞系统的理论性研究

目前,研究时滞系统的理论方法仍然十分有限,数学基础相对薄弱. 时滞系统的特征方程有无穷多个根,其解空间是无穷维 Banach 空间. 这给对时滞系统的研究带来了巨大困难和挑战. 尤其是对高维时滞系统和随机时滞系统动力学行为的研究在深度和广度上都存在很大的不足.

(2)时滞系统的动力学复杂性研究

在以往海量的关于时滞系统动力学的研究中,学者们发现了包括随机共振、随机分岔、混沌及其同步、振幅死亡在内的诸多复杂动力学现象. 但对这些复杂动力学现象的内在机制的研究相对较少且极具挑战性. 特别地,对于时滞诱导的特有的动力学现象背后机理的研究在理论上存在明显短板. 因此,时滞系统复杂动力学及动力学复杂性的研究仍然是国内外学者关注的重要课题[156].

(3)数据驱动的时滞系统动力学研究

大数据时代的到来,通过计算对大数据进行加工处理和从中萃取有用信息的人工智能技术得到了长足发展. 此类数据驱动的技术已广泛应用于包括科学、社会、经济、管理在内的诸多领域, 逐渐成为促进社会创新发展的核心驱动力之一[157]. 机器学习作为数据驱动技术中最具智能特征,最前沿的研究领域之一,研究其在时滞系统中的应用,并以此为工具进一步探究时滞系统的复杂动力学无疑是一个具有广阔前景的研究方向. 例如,作者基于机器学习方法开发了"参数感知"的储层计算方案,成功预测了时滞耦合振子中的振幅死亡现象[158].

(4)含时滞的机器人动力学及控制研究

近年来,随着制造业自动化程度的不断提升,以机器人为代表的智能制造行业蓬勃发展. 在《中国制造 2025》规划中明确将机器人列为全面推进实施制造强国战略的十大重点领域之一. 由于各种滤波器和数字控制器的大量使用,机器人模型中的时滞是不可避免的且对系统有着不可忽略的重要影响[159]. 对含时滞的机器人动力学及控制问题的研究既丰富了机器人动力学又契合了国家重大战略需求,是一个具有重大理论和现实意义的问题.

参考文献

[1] KOLMANOVSKII V B, NOSOV V R. Stability of functional differential equations [J]. Nonlinear Analysis, 1982, 6(9):873－910.

[2] KUANG Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics [M]. Academic Press, 1993.

[3] WALTHER H O, HALE J K, LUNEL S M V. Introduction to functional differential equations [J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1995, 32(1): 132－136.

[4] ERNEUX T. Applied delay differential equations [J]. Springer Science & Business Media, 2009.

[5] 廖晓昕. 稳定性的数学理论及应用 [M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1988.
LIAO X X. Mathematical theory and application of stability [M]. Wuhan: Central China Normal University Press, 1988. (in Chinese)

[6] 胡海岩, 王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展 [J]. 力学进展, 1999, 29(4):501－512.
HU H Y, WANG Z H. Review on nonlinear dynamics systems involving time delay [J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(4):501－512. (in Chinese)

[7] 徐鉴, 裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望 [J]. 力学进展, 2006, 36(1): 17－30.

XU J, PEI L J. Advances in dynamics for delayed systems [J]. Advances in Mechanics, 2006, 36(1): 17－30. (in Chinese)

[8] 张舒，徐鉴. 时滞耦合系统非线性动力学的研究进展 [J]. 力学学报，2017，49(3)：565－587.
ZHANG S, XU J. Review on nonlinear dynamics in systems with coupling delays [J]. Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(3): 565－587. (in Chinese)

[9] 茅晓晨. 时滞耦合系统动力学的研究进展 [J]. 动力学与控制学报，2017，15(4)：295－306.
MAO X C. Advances in dynamics for coupled system with time delays [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(4): 295－306. (in Chinese)

[10] HU H Y, WANG Z H, SCHAECHTER D B. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback [J]. Applied Mechanics Review, 2003, 56(3): B37.

[11] HALE J K. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977

[12] STÉPÁN G. Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions [M]. Essex: Longman Scientific & Technical, 1989.

[13] HUANG Y. Delay differential equations with application to population dynamics [J]. Academic Press, 1993.

[14] 秦元勋. 带有时滞的动力系统的运动稳定性 [M]. 北京:科学出版社，1983.
QIN Y X. Stability of the dynamical systems with time delay [M]. Beijing: Science Press, 1983. (in Chinese)

[15] GOURLEY S A, CHAPLAIN M A J. Travelling fronts in a food-limited population model with time delay. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics, 2002, 132(1): 75－89.

[16] FRIDMAN E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems [J]. Systems & Control Letters, 2001, 43(4): 309－319.

[17] 吴敏，何勇. 时滞系统鲁棒控制:自由权矩阵方法 [M]. 北京：科学出版社，2008.
WU M, HE Y. Robust control of time-delay systems: a free weight matrix approach [M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)

[18] WU M, HE Y, SHE J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435－1439.

[19] LIU K, FRIDMAN E. Wirtinger's inequality and Lyapunov-based sampled-data stabilization [J]. Automatica, 2012, 48(1): 102－108.

[20] PARK P G. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time-invariant delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(4): 876－877.

[21] GOUAISBAUT F, PEAUCELLE D. Delay-dependent robust stability of time delay systems [J]. IFAC Proceedings Volumes, 2006, 39(9): 453－458.

[22] HAN Q L. A discrete delay decomposition approach to stability of linear retarded and neutral systems [J]. Automatica, 2009, 45(2): 517－524.

[23] PONTRZXGIN L S .On the zeros of some elementary transcendental function [J]. American Mathematical Society, 1942, 1(1):95－110.

[24] DIEUDONNÉ J. Foundations of modern analysis [M]. New York: Academic Press, 1960.

[25] COOKE K L, GROSSMAN Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1982, 86(2): 592－627.

[26] WEI J J, RUAN S G. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1999, 130(3-4): 255－272.

[27] LIAO X F, CHEN G R. Local stability, Hopf and resonant codimension-two bifurcation in a harmonic oscillator with two time delays [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2001, 11(08): 2105－2121.

[28] KOLMANOVSKII, V B, MYSHKIS A D. Introduction to the theory and applications of functional differential equations [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2013.

[29] KRALL A M. Stability criteria for feedback systems with a time lag [J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control, 1964, 2(2): 160－170.

[30] HABETS L C G J M. A reliable stability test for exponential polynomials [J]. Memorandum COSOR, 1992, 9248:1－12.

[31] HWANG C, CHENG Y C. A numerical algorithm for stability testing of fractional delay systems [J]. Automatica, 2006, 42(5): 825－831.

[32] NEIMARK J I. D-decomposition of the space of quasi-polynomials (on the stability of linearized distrib-

utive systems) [J]. American Mathematical Society Translations, 1973, 102: 95−131.

[33] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

[34] FARIA T, MAGALHAES L T. Normal forms for retarded functional differential equations with parameters and applications to Hopf bifurcation [J]. Journal of Differential Equations, 1995, 122(2): 181−200.

[35] BUONO P L, BELAIR J. Restrictions and unfolding of double Hopf bifurcation in functional differential equations [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 189(1): 234−266.

[36] MAO X C, HU H Y. Hopf bifurcation analysis of a four-neuron network with multiple time delays [J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 55(1): 95−112.

[37] 陆启韶，彭临平，杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2010.
LU Q S, PENG L P, YANG Z Q. Ordinary differential equations and dynamical systems [M]. Beijing: Beihang University Press, 2010. (in Chinese)

[38] IOOSS G, JOSEPH D D. Elementary stability and bifurcation theory [M]. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.

[39] DAS S L, CHATTERJEE A. Multiple scales without center manifold reductions for delay differential equations near Hopf bifurcations [J]. Nonlinear Dynamics, 2002, 30(4): 323−335.

[40] NAYFEH A H. Order reduction of retarded nonlinear systems-the method of multiple scales versus center-manifold reduction [J]. Nonlinear Dynamics, 2008, 51(4): 483−500.

[41] WANG H L, HU H Y. Bifurcation analysis of a delayed dynamic system via method of multiple scales and shooting technique [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005, 15(02): 425−450.

[42] LAU S, CHEUNG Y. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems [J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(4):959.

[43] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillators [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1996, 31(1): 59−72.

[44] XU J, CHUNG K W. A perturbation-incremental scheme for studying Hopf bifurcation in delayed differential systems [J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2009, 52(3): 698−708.

[45] HU H Y, WU Z Q. Stability and Hopf bifurcation of four-wheel-steering vehicles involving driver's delay [J]. Nonlinear Dynamics, 2000, 22(4): 361−374.

[46] HU H Y, WANG Z H. Singular perturbation methods for nonlinear dynamic systems with time delays [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(1): 13−27.

[47] XU J, YU P. Delay-induced bifurcations in a nonautonomous system with delayed velocity feedbacks [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, 14(08): 2777−2798.

[48] XU J, CHUNG K W. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2003, 180(1-2): 17−39.

[49] MACKEY M C, GLASS L. Oscillation and chaos in physiological control systems [J]. Science, 1977, 197(4300): 287−289.

[50] FARMER J D. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1982, 4(3): 366−393.

[51] AN DER HEIDEN U, WALTHER H O. Existence of chaos in control systems with delayed feedback [J]. Journal of Differential Equations, 1983, 47(2): 273−295.

[52] IKEDA K, MATSUMOTO K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1987, 29(1-2): 223−235.

[53] LEPRI S, GIACOMELLI G, POLITI A, et al. High-dimensional chaos in delayed dynamical systems [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1994, 70(3): 235−249.

[54] FISCHER I, HESS O, ELSÄBER W, et al. High-dimensional chaotic dynamics of an external cavity semiconductor laser [J]. Physical Review Letters, 1994, 73(16): 2188.

[55] BOE E, CHANG H C. Transition to chaos from a two-torus in a delayed feedback system [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1991, 1(01): 67−81.

[56] UEDA Y, OHTA H, STEWART H B. Bifurcations in a system described by a nonlinear differential equation with delay [J]. Chaos: An Interdisciplinary

Journal of Nonlinear Science, 1994, 4(1): 75-83.

[57] PLAUT R H, HSIEH J C. Chaos in a mechanism with time delays under parametric and external excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 114(1): 73-90.

[58] NBENDJO B R N, SALISSOU Y, WOAFO P. Active control with delay of catastrophic motion and horseshoes chaos in a single well Duffing oscillator [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 23(3): 809-816.

[59] NBENDJO B R N, TCHOUKUEGNO R, WOAFO P. Active control with delay of vibration and chaos in a double-well Duffing oscillator [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2003, 18(2): 345-353.

[60] HU H Y, DOWELL E H, VIRGIN L N. Resonances of a harmonically forced Duffing oscillator with time delay state feedback [J]. Nonlinear Dynamics, 1998, 15(4): 311-327.

[61] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(11): 1196.

[62] EPUREANU B I, DOWELL E H. On the optimality of the Ott-Grebogi-Yorke control scheme [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1998, 116(1-2): 1-7.

[63] 胡海岩. 力学系统混沌的主动控制 [J]. 力学进展, 1996, 26(4): 453-463.
HU H Y. Active control of chaos in mechanical systems [J]. Advances in Mechanics, 1996, 26(4): 453-463. (in Chinese)

[64] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback [J]. Physics Letters A, 1992, 170(6): 421-428.

[65] PYRAGAS K. Control of chaos via an unstable delayed feedback controller [J]. Physical Review Letters, 2001, 86(11): 2265.

[66] BELLMAN R, BENTSMAN J, MEERKOV S. Vibrational control of nonlinear systems: vibrational stabilizability [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1986, 31(8): 710-716.

[67] CHACÓN R. Maintenance and suppression of chaos by weak harmonic perturbations: a unified view [J]. Physical Review Letters, 2001, 86(9): 1737.

[68] ARECCHI F T, BOCCALETTI S. Adaptive strategies for recognition, noise filtering, control, synchronization and targeting of chaos [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 1997, 7(4): 621-634.

[69] GE S S, WANG C, LEE T H. Adaptive backstepping control of a class of chaotic systems [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2000, 10(05): 1149-1156.

[70] JACKSON E A, GROSU I. An open-plus-closed-loop (OPCL) control of complex dynamic systems [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1995, 85(1-2): 1-9.

[71] LIU Z R, CHEN G R. On the relationship between parametric variation and state feedback in chaos control [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(06): 1411-1415.

[72] BABLOYANTZ A, LOURENCO C, SEPULCHRE J A. Control of chaos in delay differential equations, in a network of oscillators and in model cortex [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1995, 86(1-2): 274-283.

[73] CELKA P. Delay-differential equation versus 1D-map: application to chaos control [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1997, 104(2): 127-147.

[74] SHU Y L, TAN B D, LI C D. Control of chaotic n-dimensional continuous-time system with delay [J]. Physics Letters A, 2004, 323(3-4): 251-259.

[75] GUAN X P, CHEN C L, PENG H P, et al. Time-delayed feedback control of time-delay chaotic systems [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2003, 13(01): 193-205.

[76] NAKAJIMA H, ITO H, UEDA Y. Automatic adjustment of delay time and feedback gain in delayed feedback control of chaos [J]. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 1997, 80(9): 1554-1559.

[77] KITTEL A, PARISI J, PYRAGAS K. Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time [J]. Physics Letters A, 1995, 198(5-6): 433-436.

[78] TIAN Y C, GAO F. Adaptive control of chaotic continuous-time systems with delay [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1998, 117(1-4): 1-12.

[79] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821.

[80] VOSS H U. Anticipating chaotic synchronization [J]. Physical Review E, 2000, 61(5): 5115.

[81] VOSS H U. Dynamic long-term anticipation of chaotic states [J]. Physical Review Letters, 2001, 87(1): 014102.

[82] VOSS H U. Real-time anticipation of chaotic states of an electronic circuit [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2002, 12(07): 1619-1625.

[83] MASOLLER C, NINDEXDAMIANDAMIA´AN H Z. Anticipated synchronization in coupled chaotic maps with delays [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2001, 300(3-4): 359-366.

[84] SIVAPRAKASAM S, SHAHVERDIEV E M, SPENCER P S, et al. Experimental demonstration of anticipating synchronization in chaotic semiconductor lasers with optical feedback [J]. Physical Review Letters, 2001, 87(15): 154101.

[85] PYRAGAS K. Synchronization of coupled time-delay systems: analytical estimations [J]. Physical Review E, 1998, 58(3): 3067.

[86] SHAHVERDIEV E M, NURIEV R A, HASHIMOV R H, et al. Chaos synchronization between the Mackey-Glass systems with multiple time delays [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, 29(4): 854-861.

[87] BOCCALETTI S, KURTHS J, OSIPOV G, et al. The synchronization of chaotic systems [J]. Physics Reports, 2002, 366(1-2): 1-101.

[88] SHAHVERDIEV E M, NURIEV R A, HASHIMOV R H, et al. Parameter mismatches, variable delay times and synchronization in time-delayed systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2005, 25(2): 325-331.

[89] HUANG T W, LI C D, LIAO X F. Synchronization of a class of coupled chaotic delayed systems with parameter mismatch [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2007, 17(3): 033121.

[90] SHAHVERDIEV E M, SIVAPRAKASAM S, SHORE K A. Lag synchronization in time-delayed systems [J]. Physics Letters A, 2002, 292(6): 320-324.

[91] TAHERION S, LAI Y C. Observability of lag synchronization of coupled chaotic oscillators [J]. Physical Review E, 1999, 59(6): R6247.

[92] WANG L P, YUAN Z T, CHEN X H, et al. Lag synchronization of chaotic systems with parameter mismatches [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(2): 987-992.

[93] SENTHILKUMAR D V, LAKSHMANAN M, KURTHS J. Phase synchronization in time-delay systems [J]. Physical Review E, 2006, 74(3): 035205.

[94] CHEN J Y, WONG K W, SHUAI J W. Phase synchronization in coupled chaotic oscillators with time delay [J]. Physical Review E, 2002, 66(5): 056203.

[95] SURESH R, SENTHILKUMAR D V, LAKSHMANAN M, et al. Global phase synchronization in an array of time-delay systems [J]. Physical Review E, 2010, 82(1): 016215.

[96] LI C P, SUN W G, KURTHS J. Synchronization of complex dynamical networks with time delays [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2006, 361(1): 24-34.

[97] ZHOU J, XIANG L, LIU Z R. Synchronization in complex delayed dynamical networks with impulsive effects [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 384(2): 684-692.

[98] SUN Z K, XU W, YANG X L, et al. Effects of time delays on bifurcation and chaos in a non-autonomous system with multiple time delays [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31(1): 39-53.

[99] SUN Z K, XU W, YANG X L. Adaptive scheme for time-varying anticipating synchronization of certain or uncertain chaotic dynamical systems [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2008, 48(7-8): 1018-1032.

[100] TANG Y, KURTHS J, LIN W, et al. Introduction to Focus Issue: when machine learning meets complex systems-networks, chaos, and nonlinear dynamics [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2020, 30(6): 063151.

[101] ZHANG C, JIANG J, QU S X, et al. Predicting phase and sensing phase coherence in chaotic systems with machine learning [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2020, 30(8): 083114.

[102] XU J, SUN X. A multi-directional vibration isolator based on quasi-zero-stiffness structure and time-delayed active control [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, 100: 126-135.

[103] WANG F, XU J. Parameter design for a vibration absorber with time-delayed feedback control [J]. Acta Mechanica Sinica, 2019, 35: 624-640.

[104] SUN X, XU J, FU J. The effect and design of time delay in feedback control for a nonlinear isolation system [J]. Mechanical Systems and Signal Process-

ing, 2017, 87: 206－217.

[105] CHEN C W. Modeling, control, and stability analysis for time-delay TLP systems using the fuzzy Lyapunov method [J]. Neural Computing and Applications, 2011, 20: 527－534.

[106] ZHANG B L, TANG G Y. Active vibration H∞ control of offshore steel jacket platforms using delayed feedback [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(22): 5662－5677.

[107] ZHANG B L, HAN Q L, ZHANG X M, et al. Sliding mode control with mixed current and delayed states for offshore steel jacket platforms [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2013, 22(5): 1769－1783.

[108] ITÔ K. On stochastic differential equations [M]. New York: American Mathematical Society, 1951.

[109] MOHAMMED S E A, SALAH-EL DIN A M. Stochastic functional differential equations [M]. London: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

[110] ADOMIAN G, RACH R. Nonlinear stochastic differential delay equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983, 91(1): 94－101.

[111] GUILLOUZIC S, L'HEUREUX I, LONGTIN A. Small delay approximation of stochastic delay differential equations [J]. Physical Review E, 1999, 59(4): 3970.

[112] FRANK T D. Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: application to the stochastic Gompertz model with delay [J]. Physical Review E, 2002, 66(1): 011914.

[113] KIM S, PARK S H, PYO H B. Stochastic resonance in coupled oscillator systems with time delay [J]. Physical Review Letters, 1999, 82(8): 1620.

[114] IVANOV A F, KAZMERCHUK Y I, SWISHCHUK A V. Theory, stochastic stability and applications of stochastic delay differential equations: a survey of results [J]. Differential Equations Dynamics. Systems, 2003, 11(1-2): 55－115.

[115] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. Amsterdam: Elsevier, 2007.

[116] MAO X R, KOROLEVA N, RODKINA A. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations [J]. Systems & Control Letters, 1998, 35(5): 325－336.

[117] MAO X R. LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1999, 236(2): 350－369.

[118] LIAO X X, MAO X R. Exponential stability and instability of stochastic neural networks [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1996, 14(2): 165－185.

[119] JIANG M H, SHEN Y, LIAO X X. Robust stability of uncertain neutral linear stochastic differential delay system [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(6): 829－836.

[120] YU W W, CAO J D. Synchronization control of stochastic delayed neural networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 373: 252－260.

[121] SUN Z K, YANG X L, XU W. Resonance dynamics evoked via noise recycling procedure [J]. Physical Review E, 2012, 85(6): 061125.

[122] JIN C, SUN Z K, XU W. Stochastic bifurcations and its regulation in a Rijke tube model [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, 154: 111650.

[123] SUN Z K, YANG X L. Generating and enhancing lag synchronization of chaotic systems by white noise [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2011, 21(3): 033114.

[124] DOERING C R, SARGSYAN K V, SMEREKA P. A numerical method for some stochastic differential equations with multiplicative noise [J]. Physics Letters A, 2005, 344(2-4): 149－155.

[125] YU Z H. The improved stability analysis of the backward Euler method for neutral stochastic delay differential equations [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2013, 90(7): 1489－1494.

[126] DHAMALA M, JIRSA V K, DING M. Enhancement of neural synchrony by time delay [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(7): 074104.

[127] WANG Q Y, CHEN G R. Delay-induced intermittent transition of synchronization in neuronal networks with hybrid synapses [J]. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2011, 21(1): 013123.

[128] ROSSONI E, CHEN Y H, DING M Z, et al. Stability of synchronous oscillations in a system of Hodgkin-Huxley neurons with delayed diffusive and pulsed coupling [J]. Physical Review E, 2005, 71(6): 061904.

[129] SELIVANOV A A, LEHNERT J, DAHMS T, et al. Adaptive synchronization in delay-coupled net-

works of Stuart-Landau oscillators [J]. Physical Review E, 2012, 85(1): 016201.

[130] WILLE C, LEHNERT J, SCHÖLL E. Synchronization-desynchronization transitions in complex networks: an interplay of distributed time delay and inhibitory nodes [J]. Physical Review E, 2014, 90 (3): 032908.

[131] GJURCHINOVSKI A, SCHÖLL E, ZAKHAROVA A. Control of amplitude chimeras by time delay in oscillator networks [J]. Physical Review E, 2017, 95(4): 042218.

[132] TAHER H, OLMI S, SCHÖLL E. Enhancing power grid synchronization and stability through time-delayed feedback control[J]. Physical Review E, 2019, 100(6): 062306.

[133] YANG X L, HU L P, SUN Z K. How time-delayed coupling influences differential feedback control of bursting synchronization in modular neuronal network [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1-10.

[134] YANG X L, LI H D, SUN Z K. Partial coupling delay induced multiple spatiotemporal orders in a modular neuronal network [J]. PloS One, 2017, 12 (6): e0177918.

[135] 王青云,张红慧. 生物神经元系统同步转迁动力学问题 [J]. 力学进展, 2013 (1): 149-162.
WANG Q Y,ZHANG H H. Advances of synchronization transition in neuronal networks [J]. Advances in Mechanics, 2013 (1): 149-162. (in Chinese)

[136] WANG Q Y, DUAN Z S, Perc M, Chen G R. Synchronization transitions on small-world neuronal networks: Effects of information transmission delay and rewiring probability [J]. EPL (Europhysics Letters), 2008, 83(5): 50008.

[137] WANG Q Y, LU Q S, CHEN G R, et al. Bifurcation and synchronization of synaptically coupled FHN models with time delay [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 39(2): 918-925.

[138] MA J, XU J. An introduction and guidance for neurodynamics [J]. Science Bulletin, 2015, 60(22): 1969-1971.

[139] MA J, TANG J. A review for dynamics of collective behaviors of network of neurons [J]. Science China Technological Sciences, 2015, 58(12): 2038-2045.

[140] MAO X C, WANG Z H. Stability, bifurcation, and synchronization of delay-coupled ring neural networks [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(2): 1063-1078.

[141] MAO X C, WANG Z H. Stability switches and bifurcation in a system of four coupled neural networks with multiple time delays [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 82(3): 1551-1567.

[142] CAO J D, LI L. Cluster synchronization in an array of hybrid coupled neural networks with delay [J]. Neural Networks, 2009, 22(4): 335-342.

[143] SONG Y, MAKAROV V A, VELARDE M G. Stability switches, oscillatory multistability, and spatio-temporal patterns of nonlinear oscillations in recurrently delay coupled neural networks [J]. Biological Cybernetics, 2009, 101: 147-167.

[144] ZHOU J, WU Q, XIANG L, et al. Impulsive synchronization seeking in general complex delayed dynamical networks [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2011, 5(3): 513-524.

[145] REDDY D V R, SEN A, JOHNSTON G L. Time delay induced death in coupled limit cycle oscillators [J]. Physical Review Letters, 1998, 80(23): 5109.

[146] REDDY D V R, SEN A, JOHNSTON G L. Experimental evidence of time-delay-induced death in coupled limit-cycle oscillators [J]. Physical Review Letters, 2000, 85(16): 3381.

[147] STROGATZ S H. Death by delay [J]. Nature, 1998, 394(6691): 316-317.

[148] ZOU W, ZHAN M. Partial time-delay coupling enlarges death island of coupled oscillators [J]. Physical Review E, 2009, 80(6): 065204.

[149] TEKI H, KONISHI K, HARA N. Amplitude death in a pair of one-dimensional complex Ginzburg-Landau systems coupled by diffusive connections [J]. Physical Review E, 2017, 95(6): 062220.

[150] XIAO R, SUN Z K, YANG X L, et al. Emergence of death islands in fractional-order oscillators via delayed coupling [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, 69: 168-175.

[151] XIAO R, SUN Z, YANG X, et al. Amplitude death islands in globally delay-coupled fractional-order oscillators [J]. Nonlinear Dynamics, 2019, 95(3): 2093-2102.

[152] ATAY F M. Distributed delays facilitate amplitude death of coupled oscillators [J]. Physical Review Letters, 2003, 91(9): 094101.

[153] KYRYCHKOY N, BLYUSSl K B, SCHÖLL E. Amplitude and phase dynamics in oscillators with

distributed-delay coupling [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2013, 371 (1999): 20120466.

[154] SUGITANI Y, KONISHI K. Design of coupling parameters for inducing amplitude death in Cartesian product networks of delayed coupled oscillators [J]. Physical Review E, 2017, 96(4): 042216.

[155] SAXENA G, PRASAD A, RAMASWAMY R. Dynamical effects of integrative time-delay coupling [J]. Physical Review E, 2010, 82(1): 017201.

[156] 王在华，胡海岩. 时滞动力系统的稳定性与分岔：从理论走向应用 [J]. 力学进展，2013，43(1)：3－20.

WANG Z H, HU H Y. Stability and bifurcation of delayed dynamic systems: from theory to application [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 3－20. (in Chinese)

[157] 徐宗本. 人工智能的10个重大数理基础问题 [J]. 中国科学：信息科学，2021，51(12)：1967－1978.

XU Z B. Ten fundamental problems for artificial intelligence: mathematical and physical aspects [J]. Scientia Sinica Informationis, 2021, 51(12): 1967－1978. (in Chinese)

[158] XIAO R, KONG L W, SUN Z K, et al. Predicting amplitude death with machine learning [J]. Physical Review E, 2021, 104(1): 014205.

[159] ZHOU Y S, WANG Z H, CHUNG K W. Turning motion control design of a two-wheeled inverted pendulum using curvature tracking and optimal control theory [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2019, 181(2): 634－652.