

# 基于超细长弹性杆模型的斜拉索静力构形分析\*

陆登科 王鹏<sup>†</sup> 王小月 徐嘉伟 刘振海

(济南大学 土木建筑学院, 济南 250000)

**摘要** 以超细长弹性杆模型研究了斜拉索自重和可拉伸情形下的静态位形,建立了斜拉索一般意义下的超细长弹性杆平衡方程,分三种情况讨论了其平衡位形对应的挠性线、索力及索长。(1)忽略抗弯刚度时,其退化为仅考虑弹性拉伸时斜拉索的平衡方程,此时求得其挠性线方程与已有结论一致;(2)忽略弹性拉伸时,其退化为仅考虑抗弯刚度时斜拉索的平衡方程,求得其挠性线方程比忽略抗弯刚度时的结论多一项一阶修正项;(3)同时考虑弹性拉伸和抗弯刚度情形时,求得其近似挠性线方程。以苏通大桥和某实验室斜拉索为例,分别计算了以上三种不同情形下的斜拉索的静力参数,并分析了在不同索长和索力情况下抗弯刚度和弹性拉伸对斜拉索几何构形的影响。

**关键词** 超细长弹性杆, Kirchhoff 动力学比拟, 挠性线, 斜拉索

**中图分类号**:O324;O322

**文献标志码**:A

## Static Configuration Analysis of Stay Cables Based on Super-Thin Elastic Rod Model\*

Lu Dengke Wang Peng<sup>†</sup> Wang Xiaoyue Xu Jiawei Liu Zhenhai

(School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250000, China)

**Abstract** The static configuration of stay cable considering self-weight and stretch ability was studied by using the super-thin elastic rod model. The equilibrium equation of super-thin elastic rod in the general sense of stay cable was established. The deflection curve of cable, cable force and cable length corresponding to the equilibrium configuration were discussed in the following three cases. (1) When the bending rigidity was ignored, it degenerated into the equilibrium equation of the stay cable when only considering the elastic tension. At this time, the deflection curve equation was consistent with the existing conclusions. (2) When elastic tension was ignored, it degenerated into the equilibrium equation of the cable only considering the bending rigidity. The deflection curve equation added a first-order correction term compared to the case when ignoring the bending rigidity. (3) When both elastic tension and bending rigidity were considered, the approximate deflection curve equation was obtained. Taking Sutong Bridge and a laboratory cable as examples, the static parameters of the stay cables under the above three different conditions were calculated respectively, and the influence of bending rigidity and elastic tension on the geometric configuration of the stay cables under different cable lengths and cable forces were analyzed.

**Key words** super-thin elastic rod, Kirchhoff's dynamical analogy, deflection curve, stay cable

2022-09-30 收到第 1 稿,2022-11-06 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助项目(12272148,1172141),National Natural Science Foundation of China(12272148,1172141)。

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:cea\_wangp@ujn.edu.cn

## 引言

斜拉索是斜拉桥的关键构件,斜拉索在重力作用下的几何形态及其索力、索长等静力参数是工程中关注的问题.重力作用下斜拉索几何形态的研究主要有抛物线和悬链线两种构形.然而以往这两种构形的研究大多都基于弹性梁模型,假设索是完全柔性的,忽略了抗弯刚度对斜拉索变形的影响.而考虑抗弯刚度的弹性细杆从直杆转变为悬垂状态是大变形过程,不能用常规的弹性梁模型理论描述<sup>[1,2]</sup>,基于 Kirchhoff 动力学比拟的超细长弹性杆理论适用于描述这种大变形问题,为弹性杆的大变形研究提供了理论框架.随着斜拉桥跨度增加斜拉索长度也不断增加,其变形行为表现出大变形大范围运动<sup>[3,4]</sup>,故本文将基于超细长弹性杆理论,考虑拉伸与抗弯刚度耦合影响,研究其平衡状态下的几何形态及静力参数.

超细长弹性杆模型在宏观和微观领域具有广泛的应用背景,例如海底电缆、高压输电线、绳索、弹簧、石油工程中的钻杆和抽油杆、纳米纤维和纳米管、攀缘类植物的茎等<sup>[5,6]</sup>.近年来,由于超细长弹性模型成功的描述了 DNA 分子的超螺旋几何形态而重新引起学者的关注.关于超细长弹性杆理论在 DNA 力学的应用可参考刘延柱的专著<sup>[6]</sup>及其内的参考文献.Goriely<sup>[7]</sup>对弹性细杆在生物生长问题的建模和应用做了系列工作.薛纭等<sup>[8,9]</sup>对 Kirchhoff 弹性细杆的分析力学建模方法及其在 Cosserat 弹性杆中的扩展做了系统工作.Goyal<sup>[10]</sup>以 DNA 环和海底电缆为背景,研究了 Kirchhoff 弹性杆的超螺旋环的动态形成问题.文献[11]研究提出了一种非对称截面 Kirchhoff 弹性细杆模型的简化方法.文献[12,13]研究了粘弹性及生长因素对超细长弹性杆屈曲的影响.然而目前尚未见超细长弹性杆作为斜拉索力学模型的研究,而随着斜拉桥跨度的不断增加斜拉索的索长不断增加,其变形表现为大变形大范围运动<sup>[3,4]</sup>,超细长弹性杆模型将为模拟其大变形行为提供有效工具.

本文基于超细长弹性杆模型,建立了考虑弹性拉伸和抗弯刚度因素耦合时斜拉索在重力作用下的平衡方程,利用等效弹性模量给出斜拉索在弹性拉伸和抗弯刚度耦合作用下的几何形态的近似表达,并讨论其两种退化情形,即仅考虑弹性拉伸或

抗弯刚度两种特殊情形下的斜拉索几何构形及其索力、索长.最后以苏通大桥斜拉索和某实验室斜拉索实际参数为例,分别计算了以上三种情形下所得结果对应的斜拉索的静力参数,并通过图表对比了弹性拉伸和抗弯刚度对斜拉索几何形态的影响.

## 1 斜拉索的超细长弹性杆模型

大跨度桥梁斜拉索的长度远大于其截面的尺寸,表现为极端细长性,可将斜拉索看作刚性圆截面的超细长弹性杆,以其中心线上任一点为原点建立弧坐标  $s_0$ ,根据 Kirchhoff 动力学比拟,可将弹性杆看作以弧坐标  $s_0$  为自变量的离散系统,其位形可以比拟为截面沿其中心线运动形成.斜拉索的始端和终端以  $O$  和  $O_1$  表示,其平衡时的挠性线与弹性杆的中心线位形重合,如图 1 所示. $l$  为水平跨度, $h$  为垂直高度, $L$  为两端间的距离,两端点固定铰支.以  $O$  为原点,沿弹性杆中心线向上端点  $O_1$  建立弧坐标  $s_0$ ,以确定中心线上任意截面形心  $P$  的位置.为了确定截面的位置和姿态,以  $O$  为原点建立固定坐标系( $O$ - $xyz$ ),其中  $z$  轴垂直于  $O$ - $xy$  平面,以及固结于截面形心的 Frenet 坐标系( $P$ - $NBT$ ), $T$ 、 $N$  和  $B$  为  $P$  点处中心线的切线轴、法线轴和副法线轴,分别以  $e_T$ 、 $e_N$ 、 $e_B$  代表其单位矢量, $e_B = e_T \times e_N$ ,当截面运动至  $P$  点时,此时截面的 Frenet 坐标系的切线轴  $T$  与固定坐标系的  $x$  轴在  $O$ - $xy$  平面上的夹角为  $\varphi$ .设  $P'$  为无限接近  $P$  点的临近点, $P'$  和  $P$  点相对参考点  $O$  的矢径分别为  $r$  和  $r + \Delta r$ ,弧坐标分别为  $s_0$  和  $s_0 + \Delta s_0$ ,如图 2 所示.分析弹性杆微元段  $PP'$  的平衡条件,设  $P$  点处的截面受到的临近截面的内力主矢和主矩为  $(F + \Delta F)$  和  $(M + \Delta M)$ , $P'$  点处的截面受到临近截面的内力主矢和主矩为  $-F$  和  $-M$ ,单位长度杆所受到的重力为  $mg$ ,在平衡时上述作用力对  $P$  点简化的内力主矢和主矩应等于零,当仅保留一阶小量时,导出

$$\Delta F + mg \Delta s_0 = 0 \quad (1a)$$

$$\Delta M + \Delta s_0 e_T \times F = 0 \quad (1b)$$

将上式各项除以  $\Delta s_0$ , $\Delta s_0 \rightarrow 0$  时

$$\lim_{\Delta s_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s_0} = \frac{dr}{ds_0} = e_T \quad (2)$$

从式(1a),(1b)中可以导出斜拉索弹性杆的平衡方程

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds_0} + m\mathbf{g} = 0 \quad (3a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds_0} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} = 0 \quad (3b)$$

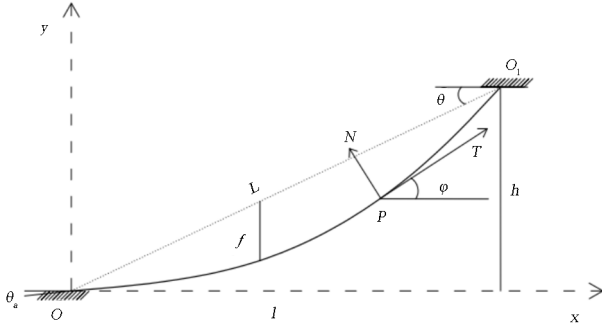


图1 斜拉索的中心线  
Fig.1 Center line of stay cable

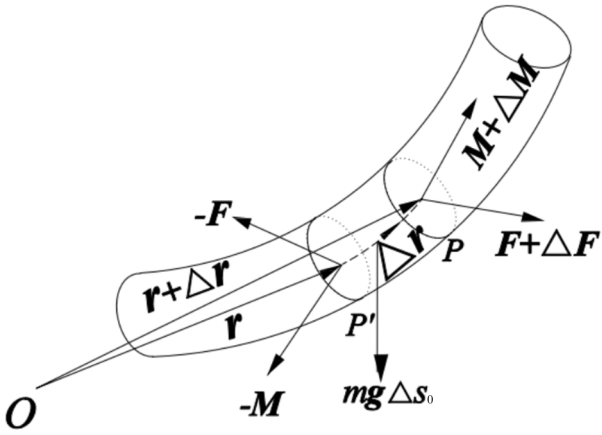


图2 斜拉索超细长弹性杆模型微元段受力图  
Fig.2 The force diagram of infinitesimal segment of ultra-slender elastic rod model of stay cable

将求导过程改为相对截面的 Frenet 坐标系 (P-NBT) 进行, 得

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + m\mathbf{g} = 0 \quad (4a)$$

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds_0} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} = 0 \quad (4b)$$

式中的波浪号表示变量相对动坐标系 (P-NBT) 的局部导数,  $\boldsymbol{\omega}$  为弯扭度<sup>[6]</sup>, 表示为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_N + \omega_2 \mathbf{e}_B + \omega_3 \mathbf{e}_T \quad (5)$$

$$\omega_1 = \kappa \sin \chi, \omega_2 = \kappa \cos \chi, \omega_3 = \tau + \frac{d\chi}{ds_0} \quad (6)$$

其中  $\kappa$ ,  $\tau$  和  $\chi$  为在 P 点处弹性杆的曲率、挠率和截面相对 Frenet 坐标系扭转的角度。

为使以上方程封闭, 我们需引入主矩的本构关系. 假设弹性杆无原始曲率和扭率, 则杆截面的主矩可表达为

$$\mathbf{M} = EI\omega_1 \mathbf{e}_N + EI\omega_2 \mathbf{e}_B + GI_T\omega_3 \mathbf{e}_T \quad (7)$$

式中  $E$  和  $G$  为杨氏模量和剪切模量,  $I$  和  $I_T$  为截面的惯性矩和极惯性矩. 以上方程结合适当的边界条件即可解出弹性细杆的位形。

考虑杆弹性拉伸时, 假设杆 P 点处截面位置由  $s_0$  变化到  $s$ , 引入拉伸比

$$\alpha(s) = ds/ds_0 \quad (8)$$

则在当前位形中弹性细杆平衡方程可表达为

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} + \alpha^{-1}m\mathbf{g} = \frac{\tilde{d}\mathbf{F}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + \alpha^{-1}m\mathbf{g} = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} = \frac{\tilde{d}\mathbf{M}}{ds} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{M} + \mathbf{e}_T \times \mathbf{F} = 0 \quad (9b)$$

此时除了满足主矩的本构关系 (7), 还需附加轴向力的本构关系

$$F_3 = EA(\alpha - 1) \quad (10)$$

式中  $A$  为拉索截面积. 斜拉索在平面内变形, 且杆截面无扭转, 则

$$\tau = 0, \chi = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = \varphi', \omega_3 = 0 \quad (11)$$

本构方程 (7) 变为

$$\mathbf{M} = EI\varphi' \mathbf{e}_B \quad (12)$$

式中  $\varphi'$  为截面转角对弧坐标  $s$  的变化率, 即斜拉索中心线的曲率  $\kappa$ , 撇号表示对弧坐标  $s$  的导数. 将式 (11), 式 (12) 带入方程组 (9), 并向连体坐标系 (P-NBT) 的坐标轴投影, 得到

$$F'_1 + F_3\varphi' - \alpha^{-1}mg \cos \varphi = 0 \quad (13a)$$

$$F'_3 - F_1\varphi' - \alpha^{-1}mg \sin \varphi = 0 \quad (13b)$$

$$EI\varphi'' + F_1 = 0 \quad (13c)$$

分别将式 (13a), (13b) 与  $\cos \varphi$  和  $\sin \varphi$  相乘后相加, 或与  $\sin \varphi$  和  $\cos \varphi$  相乘后相减, 得

$$(F_1 \sin \varphi - F_3 \cos \varphi)' = 0 \quad (14a)$$

$$(F_1 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi)' = \alpha^{-1}mg \quad (14b)$$

由式 (14a) 和 (14b) 可以导出斜拉索 OP 段沿  $x$  轴和  $y$  轴的初积分

$$F_1 \sin \varphi - F_3 \cos \varphi = -F_0 \quad (15a)$$

$$F_1 \cos \varphi + F_3 \sin \varphi = mg \int_0^s \alpha^{-1} ds - F_A \quad (15b)$$

式中  $F_0$  和  $F_A$  为斜拉索起始端 O 处张力的水平分力和竖向分力. 利用式 (15a) 和 (15b) 消去  $F_3$  后, 将  $F_1$  代入式 (13c) 得

$$EI\varphi'' + (mg \int_0^s \alpha^{-1} ds - F_A) \cos \varphi - F_0 \sin \varphi = 0 \quad (16)$$

通过式(16)求解出  $\varphi(s)$ , 进而就可以得到表示斜拉索位形的挠性线。

在实际设计中, 斜拉索参数  $m, l, \alpha, h$  往往是已知的, 斜拉索水平分力  $F_0$  与斜拉索起始端  $O$  处竖向分力  $F_A$  不互相独立<sup>[14]</sup>, 其关系满足

$$\operatorname{sh}\left\{-\frac{mgl}{2F_0} + \operatorname{arsh}\frac{mgl \tan \alpha / F_0}{2 \operatorname{sh}(mgl / 2F_0)}\right\} = \frac{F_A}{F_0} \quad (17)$$

## 2 超细长弹性杆的挠性线解

求解式(13)可得到超细长弹性杆的挠性线方程, 本节分三种情况讨论其挠性线解, 即仅考虑弹性拉伸, 仅考虑抗弯刚度和同时考虑弹性拉伸和抗弯刚度耦合影响下的挠性线解。

### 2.1 只考虑弹性拉伸时超细长弹性杆的挠性线方程

当只考虑斜拉索弹性拉伸时, 忽略拉索的抗弯刚度, 即  $EI=0$ , 由式(16)得

$$F_0 \tan \varphi = mg \int_0^s \alpha^{-1} ds - F_A \quad (18)$$

斜拉索微元段几何关系为

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \quad (19)$$

令  $\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh}u$ , 将式(19)代入式(18)后化简, 并对  $x$  求导得

$$F_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{mgEA}{F_0 / [\frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}] + EA} \cdot \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{dx} \quad (20)$$

式中  $A$  为斜拉索的截面积, 令  $\beta = mg/F_0, \eta = F_0/EA$ , 式(18)简化成

$$\frac{d \operatorname{sh}u}{du} \frac{du}{dx} = \beta \cdot \frac{1}{1 + \eta \operatorname{ch}u} \operatorname{ch}u \quad (21)$$

设  $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \operatorname{sh}u_0, \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = \operatorname{sh}u_l$ , 由下端边界条件 ( $x_0=0, y_0=0$ ), 式(20)可以改写为参数方程

$$dx = \left[ \frac{1}{\beta} (1 + \eta \operatorname{ch}u) \right] du \quad (22a)$$

$$x = \frac{1}{\beta} (u + \eta \operatorname{sh}u - u_0 - \eta \operatorname{sh}u_0) \quad (22b)$$

$$dy = \left[ \frac{1}{\beta} (1 + \eta \operatorname{ch}u) \right] \operatorname{sh}u du \quad (22c)$$

$$y = \frac{1}{\beta} \left( \operatorname{ch}u + \frac{\eta \operatorname{ch}^2 u}{2} - \operatorname{ch}u_0 - \frac{\eta}{2} \operatorname{ch}^2 u_0 \right) \quad (22d)$$

再由斜拉索上端边界条件 ( $x_l=l, y_l=h$ ) 得

$$l = \frac{1}{\beta} [u_l - u_0 + \eta (\operatorname{sh}u_l - \operatorname{sh}u_0)] \quad (23a)$$

$$h = \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{ch}u_l - \operatorname{ch}u_0 + \frac{\eta}{2} (\operatorname{ch}^2 u_l - \operatorname{ch}^2 u_0) \right] \quad (23b)$$

由方程组(23)解出  $u_0$  和  $u_l$  后代入方程组(22), 就可以得到用  $u$  来表示斜拉索张力、垂度及索长的函数表达式

$$F_s = F_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} = F_0 \operatorname{ch}u \quad (24a)$$

$$f = y - x \tan \theta \quad (24b)$$

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{1}{\beta} \int_{u_0}^{u_l} \operatorname{ch}u (1 + \eta \operatorname{ch}u) du \quad (24c)$$

式中  $S$  为斜拉索长度, 下同。

### 2.2 只考虑抗弯刚度时超细长弹性杆的挠性线方程

文献[15,16]基于欧拉-伯努利梁模型, 利用摄动法研究了斜拉索在一般竖向荷载作用下的静力学问题, 本小节将基于 Kirchhoff 弹性细杆模型, 利用摄动法求解斜拉索的几何形态及静力参数。

当只考虑抗弯刚度影响时, 无弹性拉伸 ( $s=s_0$ ), 则式(16)中  $\alpha=1$ . 定义以下无量纲变量和参数

$$\hat{S} = \frac{s}{L}, \hat{F}_A = \frac{F_A}{mgL}, \epsilon = \frac{EI}{mgL^3}, \beta = \beta L = \frac{mgL}{F_0} \quad (25)$$

对式(16)除以  $F_0$ , 撇号改为对无量纲弧坐标  $\hat{s}$ , 可以得到关于  $\varphi(\hat{s})$  的无量纲公式

$$\epsilon \beta \varphi(\hat{s})'' + (\beta \hat{s} - \beta \hat{F}_A) \cos \varphi - \sin \varphi = 0 \quad (26)$$

对于截面半径为  $r$  的斜拉索来说,  $m = \rho A, A = \pi r^2, I = \pi r^4 / 4, \rho$  斜拉索的密度, 故  $\epsilon \sim r^4 / L^3$ , 由于斜拉索的两端间的距离远大于其半径且半径往往小于 1, 即  $L \gg r, r \leq 1$ , 所以  $\epsilon$  为小量, 可以采用摄动法来求解式(26), 将  $\varphi(\hat{s})$  展开成  $\epsilon$  的幂级数

$$\varphi(\hat{s}) = \varphi_0(\hat{s}) + \epsilon \varphi_1(\hat{s}) + \dots \quad (27)$$

忽略二次以上小量, 将式(27)代入式(26), 仅保留  $\epsilon$  的一次项, 分离变量得

$$\beta \hat{s} \cos \varphi_0 - \beta \hat{F}_A \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 = 0 \quad (28a)$$

$$\beta \varphi_0'' - \beta \hat{s} \varphi_1 \sin \varphi_0 + \beta \hat{F}_A \varphi_1 \sin \varphi_0 - \varphi_1 \cos \varphi_0 = 0 \quad (28b)$$

将式(28a)求解后, 代入式(28b), 可以得到  $\varphi(\hat{s})$  的

一阶近似解

$$\varphi(\dot{s}) = \arctan(\dot{\beta}s - \dot{\beta}F_A) - \frac{2\epsilon(\dot{\beta}s - \dot{\beta}F_A)\dot{\beta}^3}{[1 + (\dot{\beta}s - \dot{\beta}F_A)^2]^{5/2}} \quad (29)$$

其中当  $\epsilon=0$  时, 上式即为斜拉索悬链线构形的描述规律. 将式(29)恢复有量纲形式

$$\varphi(s) = \arctan\left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right) - \frac{2\epsilon\beta^3 L^3 \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)}{\left[1 + \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)^2\right]^{5/2}} \quad (30)$$

定义变量  $T$  为

$$T = \tan\varphi = \frac{dy}{dx} = \tan\varphi_0 + \epsilon\varphi_1 \sec^2\varphi_0 = \beta s - \frac{F_A}{F_0} - \frac{2\epsilon\beta^3 L^3 \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)}{\left[1 + \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)^2\right]^{5/2}} \quad (31)$$

对式(31)求导可以得到

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{ds} \frac{ds}{dx} = \left[\beta + \frac{2L^3\beta^4\epsilon}{\left(1 + \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{6L^3\beta^4\epsilon \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)^2}{\left(1 + \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right)^2\right)^{5/2}}\right] \sqrt{1 + T^2} \quad (32)$$

$$p_1 = \frac{L^3\beta^2 \left\{3\text{Sech}(C + x\beta) - \arctan\left[\tanh\left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}x\beta\right)\right] \sinh[2(C + x\beta)]\right\}}{4\sqrt{\cosh(C + x\beta)^2}} - \frac{L^3\beta^2 \{3\text{Sech}(C) - \arctan[\tanh(0.5C)] \sinh(2C)\}}{4\sqrt{\cosh(C)^2}}$$

由式(37)可以发现, 与传统悬链线解相比, 多了一个小参数项  $\epsilon p_1$ . 拉索任一点的垂度、张力及索长为

$$f = y(x) - x \tan\theta \quad (38a)$$

$$F_3 = (mg - F_A) \sin\varphi + F_0 \cos\varphi \quad (38b)$$

$$S = \int_0^l \sqrt{1 + T^2} dx \quad (38c)$$

定义  $b_{EI}$  为抗弯刚度对斜拉索几何构形的影响因子.

$$b_{EI} = \epsilon p_1 / \left[ \frac{\cosh(x\beta + C)}{\beta} - \frac{\cosh(C)}{\beta} \right] \quad (39)$$

通过影响因子  $b_{EI}$  的变化可以分析斜拉索抗弯刚度对其几何构形的影响.

### 2.3 考虑弹性拉伸和抗弯刚度耦合时超细长弹性杆的近似挠性线方程

在实际工程中为方便计算斜拉索弹性拉伸的

利用公式(32), 忽略小量  $\epsilon(\dots)$ , 可以得到弧坐标  $s$  和直角坐标  $x$  之间的关系式

$$T = \left(\beta s - \frac{F_A}{F_0}\right) = sh(\beta x + C) \quad (33)$$

其中  $C$  可以下端点边界条件可知

$$C = \text{arcsch}\left[\frac{\beta l \tan\theta}{2\text{sh}(0.5\beta l)}\right] - \frac{\beta l}{2} \quad (34)$$

将式(33)代入式(32)得

$$\frac{dT}{\sqrt{1 + T^2}} = \left[\beta - \frac{2L^3\beta^4\epsilon}{\cosh(\beta x + C)^3} + \frac{6L^3\beta^4\epsilon \sinh(\beta x + C)^2}{\cosh(\beta x + C)^5}\right] dx \quad (35)$$

积分得

$$T = \frac{dy}{dx} = \sinh[\beta x + C + \epsilon(\dots)] = \sinh(\beta x + C) + \cosh(\beta x + C) \left[-\frac{2L^3\beta^4\epsilon}{\cosh(\beta x + C)^3} + \frac{6L^3\beta^4\epsilon \sinh(\beta x + C)^2}{\cosh(\beta x + C)^5}\right] \quad (36)$$

由  $y(0)=0$  为初始条件积分得斜拉索的挠性线

$$y(x) = \left[\frac{\cosh(x\beta + C)}{\beta} - \frac{\cosh(C)}{\beta}\right] + \epsilon p_1 \quad (37)$$

其中:

影响, 可以利用等效弹性模量, 将实际弹性模量为  $E$ 、垂度为  $f$  的斜拉索等效成弹性模量为  $E_{eq}$  的线性直杆, 在斜拉索弹性伸长计算公式中计入垂度的影响. 可以采用式(40)来计算等效弹性模量<sup>[17]</sup>, 进而计算斜拉索的拉伸比.

$$E_{eq} = E / \left\{ 1 + \frac{EA(\cos\theta)^2}{48a_1^2} [-2(T_0 - a_0) + \frac{(T_0 - a_0)^2}{\sqrt{(T_0 - a_0)^2 - 4a_1a_2}} + \sqrt{(T_0 - a_0)^2 - 4a_1a_2}] \right\} \quad (40)$$

式中:

$$a_0 = \frac{mgl}{2} \tan\theta, \quad a_1 = \frac{mgl}{\cos\theta}$$

$$a_2 = \frac{mgl}{12\cos\theta} + \frac{mgl \cos\theta}{24}, \quad T_0 = a_0 + \frac{a_1}{\beta l} + a_2\beta l$$

则斜拉索的拉伸比  $\alpha$  可以表示为

$$\alpha = \frac{F_0}{E_{eq}A \cos\theta} + 1 \quad (41)$$

将式(41)代入式(16),如同 2.2 部分,运用摄动法求解,可以解得斜拉索的挠性线

$$p_2 = \frac{L^3 \beta^2 \left\{ 3 \operatorname{Sech}[C - x\beta(-1 + \gamma)] - \arctan \left[ \tanh \left[ \frac{1}{2} (C - x\beta(-1 + \gamma)) \right] \right] \cdot \sinh[2(C - x\beta(-1 + \gamma))] \right\}}{4(1 - \gamma) \sqrt{\cosh[C + x\beta(1 - \gamma)]^2}} - \frac{L^3 \beta^2 \{ 3 \operatorname{Sech}(C) - \arctan \cdot [\tanh(0.5C)] \sinh(2C) \}}{4(1 - \gamma) \sqrt{\cosh(C)^2}}$$

$$\gamma = \frac{F_0/E_{eq}A}{F_0/E_{eq}A + \cos\theta}, C \text{ 与 2.2 部分相同.}$$

由 2.2 部分可知,当式(42)中小参数项  $\epsilon p_2 = 0$  时,式(42)既变为仅考虑弹性拉伸时的近似表达式,如下所示

$$b_s = \frac{\frac{\cosh[x\beta(1 - \gamma) + C]}{\beta(1 - \gamma)} - \frac{\cosh(C)}{\beta(1 - \gamma)} - \frac{\cosh(x\beta + C)}{\beta} + \frac{\cosh(C)}{\beta}}{\frac{\cosh(x\beta + C)}{\beta} - \frac{\cosh(C)}{\beta}} \quad (44)$$

通过影响因子  $b_s$  的变化来分析斜拉索弹性拉伸对其几何构形的影响.

### 3 算例

选取主跨为 1092m 沪通铁路大桥最长拉索 S36、最短拉索 S1 和文献[18]中实验室拉索 A 为例,分别采用本文所给的计算公式和传统悬链线计算公式进行计算,分别计算了斜拉索两端张力、索长、跨中垂度、最大垂度以及其所处位置,并且根据式(39)和(44),还可以得到  $b_{EI} - l$  和  $b_s - F_0$  关系曲线.

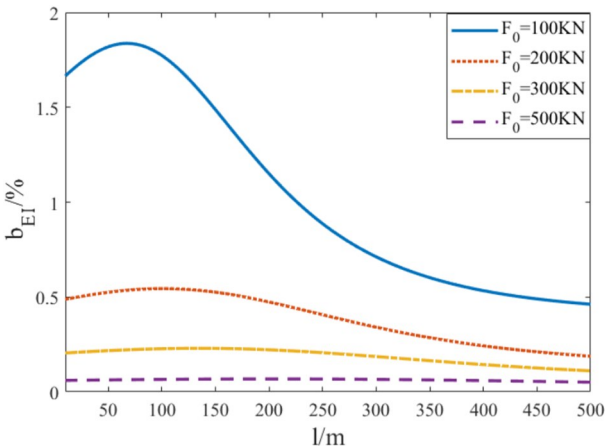


图 3  $b_{EI} - l$  关系曲线  
Fig.3 Relationship curve of  $b_{EI} - l$

$$y(x) = \frac{\cosh[x\beta(1 - \gamma) + C]}{\beta(1 - \gamma)} - \frac{\cosh(C)}{\beta(1 - \gamma)} + \epsilon p_2 \quad (42)$$

$$y(x) = \frac{\cosh[x\beta(1 - \gamma) + C]}{\beta(1 - \gamma)} - \frac{\cosh(C)}{\beta(1 - \gamma)} \quad (43)$$

定义  $b_s$  为弹性拉伸对斜拉索几何构形的影响因子.

拉索的各项参数如表 1 所示,在计算时借助 MATLAB 进行计算,其静力计算结果如表 2 所示.以 S36 斜拉索参数为例,令  $x = l/2$ ,得到  $b_{EI} - l$  和  $b_s - F_0$  关系曲线,如图 3、图 4 所示.

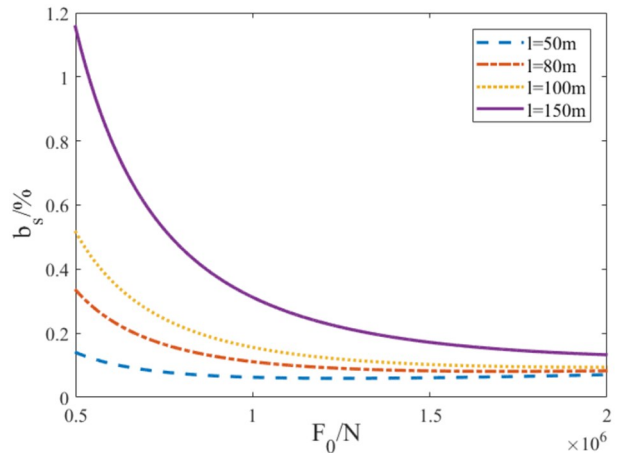


图 4  $b_s - F_0$  关系曲线  
Fig.4 Relationship curve of  $b_s - F_0$

从由表 2 的数据可以看出,本文公式和传统悬链线和抛物线公式计算结果非常相近,从而验证了本文公式的正确性.

通过表 2 的数据对比,还可以得到以下结论:

(1)斜拉索最大垂度位置和跨中几乎重叠,静力分析时,跨中垂度可以作为最大垂度使用,当精度

表1 斜拉索基本参数  
Table 1 Parameters of stay cables

拉索编号	$F_0/\text{kN}$	$m/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1})$	$L/\text{m}$	$h/\text{m}$	$l/\text{m}$	$A/\text{m}^2$	$E/\text{GPa}$
S36	8572.27	145.0	594.35	265	532	0.017357	205
S1	8638.6	131.5	156.70	89	128.97	0.015740	205
A	0.303	1.01	11.3	3.63	10.7	0.0001374	195

表2 斜拉索静力计算结果  
Table 2 Calculation results of stay cable statics

拉索	计算方法	$F_{30}/\text{kN}$	$F_{301}/\text{kN}$	$f_{\max}/l$	$f_{1/2}/l$	$S/\text{m}$	$x_{\max}/l$
S36	悬链线型	9397.31	9973.80	1/81.1646	1/81.1911	594.502	
	弹性变形	9397.76	9973.26	1/81.0364	1/81.0386	594.501	
	式 37	9397.27	9973.85	1/81.2547	1/81.2822	594.502	0.499
	式 45	9397.52	9973.37	1/81.0422	1/81.0438	594.501	
S1	悬链线型	10438.95	10553.64	1/339.8304	1/342.0659	156.700	
	弹性变形	10439.13	10553.45	1/337.4289	1/340.6220	156.699	
	式 37	10438.89	10553.72	1/340.8315	1/343.9649	156.700	0.499
	式 45	10439.01	10553.57	1/338.5321	1/341.8651	156.700	
A	悬链线型	0.3200	0.3222	1/21.2956	1/21.5373	11.300	
	弹性变形	0.3211	0.3234	1/20.1054	1/20.3215	11.301	
	式 37	0.3192	0.3215	1/21.3985	1/21.6422	11.300	0.499
	式 45	0.3205	0.3229	1/20.2254	1/20.4544	11.300	

要求不高时,可忽略斜拉索弹性拉伸和抗弯刚度对其几何形态的影响。

(2)斜拉索的内张力沿索长变化,其中在斜拉索塔端最大,在斜拉索梁端最小。

(3)相较于抗弯刚度,斜拉索弹性拉伸变形对其几何构形的影响更大,对比图3、图4也可以得到这一结论。

由图3、图4可知在给定斜拉索参数情况下,斜拉索抗弯刚度对其几何构形的影响在斜拉索长度较短或张力较小时较大,随着索长的增加抗弯刚度的影响会先短暂的增大再减小,并且当索长达到一定值时,抗弯刚度的影响几乎不再随斜索长的增长而变化,抗弯刚度对斜拉索几何构形的影响也会随着索力的增加而减小,当 $F_0$ 达到500kN时,抗弯刚度的影响将会小于0.1%。

斜拉索弹性拉伸对其几何构形的影响随索长的增大而增大,随着索力的增加而减小,而且当 $l$ 大于150m时,弹性拉伸的影响会超过0.1%。因此,在斜拉索的研究中,当斜拉索索长较长时,弹性拉伸对其几何构型的影响应当考虑在内,当索力较小

或索长较短时,例如观光平台的斜拉索,抗弯刚度对其几何形态的影响应当考虑在内。

## 4 结论

本文基于超细长弹性杆模型,考虑斜拉索弹性拉伸和抗弯刚度因素,建立了斜拉索在自重下的超细长弹性杆平衡方程,并分别讨论了以下三种情况下斜拉索挠性线方程,当仅考虑斜拉索弹性拉伸影响时,求得其挠性线方程与已有结论一致;当仅考虑抗弯刚度影响时,求得其挠性线方程与不考虑抗弯刚度时的结论相比多了一项一阶修正项;当同时考虑斜拉索弹性拉伸和抗弯刚度耦合影响时,利用等效弹性模量近似求解出其挠性线方程,并讨论了挠性线方程的解。

将以上三种情形下所得结果应用于实例,对比了抗弯刚度和弹性拉伸对斜拉索几何构形的影响,发现抗弯刚度对斜拉索几何构形的影响,会随着斜拉索张力和索长的增加而减小;弹性拉伸对斜拉索几何构形的影响随其索长的减小和索力的增加而减小;相较于抗弯刚度,弹性拉伸对斜拉索几何构

形的影响更大。

本文基于超细长弹性杆模型讨论了斜拉索的静态平衡问题,而其动态行为亦是重要问题<sup>[3,4,19,20]</sup>。我们将在将来工作中利用超细长弹性杆模型研究斜拉索的非线性振动问题。而基于 Kirchhoff 动力比拟的超细长弹性杆动力学具有时间和弧长双自变量<sup>[6-9,12]</sup>,也必将为其振动研究带来新的问题。

## 参考文献

- [1] 刘延柱. 悬垂弹性细杆的几何形态 [J]. 力学季刊, 2011,32(3):295—299.  
LIU Y Z. Geometrical shape of a hanging thin elastic rod [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2011,32(3):295—299. (in Chinese)
- [2] 刘延柱, 薛纭. 关于弹性梁的数学模型 [J]. 力学与实践, 2011,33(01):74—78.  
LIU Y Z, XUE Y. On the mathematical model of elastic beam [J]. Mechanics in Engineering, 2011,33(01):74—78. (in Chinese)
- [3] 赵跃宇, 王连华, 陈得良, 等. 斜拉索面内振动和面外摆振的耦合分析 [J]. 土木工程学报, 2003,36(4):65—69.  
ZHAO Y Y, WANG L H, CHEN D L, et.al. Coupled analysis of out-of-plane oscillation and in-plane vibration for stay cable [J]. China Civil Engineering Journal, 2003,36(4):65—69. (in Chinese)
- [4] 康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展 [J]. 力学学报, 2016,48(3):519—535.  
KANG H J, GUO T D, ZHAO Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016,48(3):519—535. (in Chinese)
- [5] 刘建林. 细长杆弹性线模型的发展历史 [J]. 自然杂志, 2013,35(5):372—377.  
LIU J L. The history of elastic model on the slender rod [J]. Chinese Journal of Nature, 2013,35(5):372—377. (in Chinese)
- [6] 刘延柱. 弹性细杆的非线性力学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006: 1—17.  
LIU Y Z. Nonlinear mechanics of thin elastic rod [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006:1—17. (in Chinese)
- [7] GORIELY A. The mathematics and mechanics of biological growth [M]. New York: Springer, 2017.
- [8] 薛纭, 刘延柱, 陈立群. Kirchhoff 弹性杆动力学建模的分析力学方法 [J]. 物理学报, 2006,55(8):3845—3851.  
XUE Y, LIU Y Z, CHEN L Q. Methods of analytical mechanics for dynamics of the Kirchhoff elastic rod [J]. Acta Physica Sinica, 2006,55(8):3845—3851. (in Chinese)
- [9] 薛纭, 翁德玮, 陈立群. 精确 Cosserat 弹性杆动力学的分析力学方法 [J]. 物理学报, 2013,62(4):320—326.  
XUE Y, WENG D W, CHEN L Q. Methods of analytical mechanics for exact Cosserat elastic rod dynamics [J]. Acta Physica Sinica, 2013,62(4):320—326. (in Chinese)
- [10] GOYAL S, PERKINS N C, LEE C L. Nonlinear dynamics and loop formation in Kirchhoff rods with implications to the mechanics of DNA and cables [J]. Journal of Computational Physics, 2005,209(1):371—389.
- [11] 王炜, 张琪昌, 靳刚. 非对称截面 Kirchhoff 弹性细杆模型简化方法研究 [J]. 物理学报, 2012,61(6):352—357.  
WANG W, ZHANG Q C, JIN G. The analytical reduction of the Kirchhoff thin elastic rod model with asymmetric cross section [J]. Acta Physica Sinica, 2012,61(6):352—357. (in Chinese)
- [12] 王鹏, 薛纭, 楼智美. 黏性流体中超细长弹性杆的动力学不稳定性 [J]. 物理学报, 2017,66(9):248—255.  
WANG P, XUE Y, LOU Z M. Dynamic instability of super-long elastic rod in viscous fluid [J]. Acta Physica Sinica, 2017,66(9):248—255. (in Chinese)
- [13] ZHANG Y T, ZHANG S, WANG P. Growth induced buckling of morphoelastic rod in viscous medium [J]. Chinese Physics B, 2020,29(5):415—421.
- [14] 任淑琰, 顾明. 斜拉桥拉索静力构形分析 [J]. 同济大学学报(自然科学版), 2005,33(5):595—599.  
REN S Y, GU M. Static analysis of cables' configuration in cable-stayed bridges [J]. Journal of Tongji University(Natural Science Edition), 2005,33(5):595—599. (in Chinese)
- [15] LUONGO A, ZULLI D. Statics of shallow inclined elastic cables under general vertical loads: A perturbation approach [J]. Mathematics, 2018,6(2):63—72.



- [16] LUONGO A, ZULLI D. Static perturbation analysis of inclined shallow elastic cables under general 3D-loads [J]. *Curved and Layered Structures*, 2018, 5(1): 250–259.
- [17] 赵海霞, 张文明, 蒋晓放, 等. 基于悬链线的斜拉索垂度效应等效弹性模量计算方法 [J]. *中外公路*, 2020, 40(2): 62–66.  
ZHAO H X, ZHANG W M, JIANG X F, et al. Calculation method of equivalent elastic modulus of cable sag effect based on catenary [J]. *Journal of China & Foreign Highway*, 2020, 40(2): 62–66. (in Chinese)
- [18] 李世兵. 斜拉索非线性静动力理论模型及实验 [D]. 大连理工大学, 2011.  
LI S B. The study on static and dynamic nonlinear
- theoretical model and test of cable [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2011. (in Chinese)
- [19] LACARBONARA W, PAOLONE A, VESTRONI F. Non-linear modal properties of non-shallow cables [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42(3): 542–554.
- [20] 苏潇阳, 康厚军, 丛云跃. 混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 26–32.  
SU X Y, KANG H J, CONG Y Y. Dynamic theory for evaluation on vertical bending stiffness of multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 26–32. (in Chinese)

#### 附录:

以空间中的固定点  $O$  为原点, 建立固定坐标系  $(O-xyz)$ , 对长度为  $L$  的细长弹性杆进行讨论, 沿杆的中心线建立弧坐标  $s$ ,  $P$  为弹性杆中心线上的任意一点, 以  $P$  为原点建立 Frenet 坐标系  $(P-NBT)$ , 其中  $N$ 、 $B$  和  $T$  为中心线的法线轴、副法线轴和切线轴,  $\mathbf{F}$  为任意矢量.

设点  $P$  的弧坐标  $s$  有无限小位移  $\Delta s$  时, 刚截面产生无限小转动位移矢量  $\Delta\Phi$ , 令  $\Delta\Phi$  与  $\Delta s$  相除, 将  $\Delta s \rightarrow 0$  时的极限记作弹性杆的弯扭度  $\omega$

$$\omega = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta s}$$

当矢量  $\mathbf{F}$  固结于刚截面时, 刚截面的作无限小转动位移  $\Delta\Phi$  引起矢量  $\mathbf{F}$  的无限小位移  $\Delta\mathbf{F}$ , 由刚

体无限小转动

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta\Phi \times \mathbf{F}$$

将上式与  $\Delta s$  相除, 令  $\Delta s \rightarrow 0$ , 导出

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \omega \times \mathbf{F}$$

当矢量  $\mathbf{F}$  不固结于刚截面时, 刚截面作无限小转动的同时, 矢量  $\mathbf{F}$  相对截面也发生运动, 此时, 矢量  $\mathbf{F}$  相对弧坐标  $s$  的变化率的一般公式为

$$\frac{d\mathbf{F}}{ds} = \frac{\bar{d}\mathbf{F}}{ds} + \omega \times \mathbf{F}$$

其中波浪号表示矢量  $\mathbf{F}$  对 Frenet 坐标系  $(P-NBT)$  的局部导数.