

涡激旋转下方柱小幅振荡模态的自由流线- 边界层理论模型*

罗宸晟^{1,2} 牟瑞勇^{2,3} 黄行蓉^{1,2,3} 黄伟希⁴ 方乐^{1,2,3†}

(1.北京航空航天大学 中法工程师学院/国际通用工程学院,北京 100191)

(2.北京航空航天大学 杭州创新研究院,杭州 310023)

(3.北京航空航天大学 航空发动机研究院,北京 102206)

(4.清华大学 航天航空学院,北京 100084)

摘要 针对刚体在流体中涡激旋转的数值结果表明,方柱在低雷诺数涡激旋转中有六种模态.本文针对其中的小幅振荡模态,通过综合无黏绕流情况下的自由流线理论与有黏平板的边界层理论,提出了一种理论模型;通过与浸没边界法所得数值结果进行对比,验证了该理论模型的有效性;并分析了小幅振荡模态的主要驱动力,解释了出现周期性振荡的原因.

关键词 涡激旋转, 方柱, 浸没边界法, 自由流线, 边界层

中图分类号:O324;O351.3

文献标志码:A

Free Streamline-Boundary Layer Model for Small-Amplitude Oscillation Regime of Square Cylinder Under Vortex-Induced Rotation*

Luo Chensheng^{1,2} Mou Ruiyong^{2,3} Huang Xingrong^{1,2,3} Huang Weixi⁴ Fang Le^{1,2,3†}

(1.Ecole Centrale de Pékin / School of General Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

(2.Beihang Hangzhou Innovation Institute Yuhang, Hangzhou 310023, China)

(3.Research Institute of Aero-Engine, Beihang University, Beijing 102206, China)

(4. School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract Numerical studies about the vortex-induced rotation (VIR) show that 6 regimes exist for square cylinder under VIR at small Reynolds numbers. Focusing on the small-amplitude oscillation regime, the paper proposes an analytical model of this regime by considering both the free streamline theory of inviscid flow around body and the boundary layer theory of viscous flow over a flat. The validity of this model is proved by comparing with numerical results using immersed boundary method. This paper also analyses the main driving force of small-amplitude oscillation and explains the reason of periodical oscillation.

Key words vortex-induced rotation, square cylinder, immersed boundary method, free streamline, boundary layer

2023-04-15 收到第 1 稿,2023-06-03 收到修改稿.

* 国家自然科学基金项目(52105083,11772032),航空科学基金(2020Z006051003)资助项目,National Natural Science Foundation of China (52105083, 11772023) and Fundation of Aerospace Science (2020Z006051003).

† 通信作者 E-mail:le.fang@buaa.edu.cn

引言

在工程应用中,流体和固体结构的相互作用是一个普遍但又复杂的问题.其中,涡激振动(vortex-induced vibration, VIV)与涡激旋转(vortex-induced rotation, VIR)十分重要.涡激振动关注固定物体的弹性振动,考虑弹性形变,例如油气管道在深海中的振动,高压电线、桥梁在风中的振动等^[1,2,3].涡激旋转关注刚体在流体中的旋转响应,一般不考虑物体本身的形变.空气中旋转落地的水果或冰雹、流体中自由运动的物体等均可以简化为涡激旋转;陈卓等^[4]的研究还发现,在流场中自由摆动方柱的涡激旋转能强化微流体通道内热量与物质的交换.对涡激旋转的研究能够更加有利于解释如从飞行器中分离的物品、海洋中旋转能量收集装置桨片^[5]等物体的旋转特性,促进对旋转特性的控制.

针对涡激旋转的研究目前主要集中于实验与数值仿真.早期研究中,研究者主要聚焦于刚体涡激旋转表现出的自旋转(autorotation)现象,最早由 Maxwell 和 Niven^[6]展开.Lugt^[7]通过对 Navier-Stokes 方程的数值求解,研究了平板与椭圆柱的自旋转现象,指出自转的主要原因是漩涡脱落与刚体旋转的同步化,因此相关现象也被称为涡激旋转.Skews^[8]通过实验发现,多边形柱的涡激旋转主要发生在边数小于或等于 8 的情况.特别地,对方柱的研究,Zaki^[9]、Ryu 与 Iaccarino^[10]通过数值仿真观察到了在不同雷诺数下方柱运动的模式.Ryu 与 Iaccarino^[10]指出,在小雷诺数($Re = 45 \sim 150$)情况下,方柱的涡激旋转存在六个基本模式:静止模式(initial rest position, $Re = 45$),小幅振荡模式(small-amplitude oscillation regime, $Re = 50, 60, 70$), $\pi/2$ 极限振荡模式($\pi/2$ -limit oscillation regime, $Re = 80, 90$),随机旋转模式(random rotation regime, $Re = 100, 110$), π 极限振荡模式(π -limit oscillation regime, $Re = 120, 130$),自转模式(autorotation regime, $Re = 140, 150$).[注:为了进行区分,本文中涡激振动对应的弹性振动(vibration)翻译为振动,而涡激旋转模式中在平衡位置周围的抖动(oscillation)翻译为振荡.]这些数值仿真结果,为理论分析方柱涡激旋转现象的原因提供了分类依据,也能指导在工业中涡激旋转效应在

能量收集、姿态控制等方面的应用.

基于以上模式分类,少量特殊情况下方柱涡激旋转的理论解释已经提出,但集中于稳定性与驱动力的定性分析.Robertson 等人^[11]针对长方形方柱的涡激旋转,通过刚体运动准定常理论(quasi-steady theory)的方法,提出了旋转稳定性的判断条件.Ryu 与 Iaccarino^[10]早期的研究指出,小幅振荡模式中周期性的振荡主要是由所受力矩与旋转角度之间不同步而驱动的.后来,针对方柱涡激旋转在 $Re = 150$ 下的自转模式,Ryu^[12]通过对于迎风面、逆风面分类研究的方法,计算了定常流场情况下的压强导致的力矩,指出大角度旋转带来的“瞬时”力矩突然换向是维持自转模式旋转的主要原因.同时,在这一模式下,迎流面对力矩的贡献与瞬时总力矩方向相反,阻碍方柱的转动;背流面对力矩的贡献最大且与瞬时力矩同向,促进方柱转动;总力矩方向与旋转方向基本相同.这些研究均只深入到对力矩这一宏观量的定性研究,而没有对力矩来源——流场状态进行解释,难以刻画涡激旋转中的流体力学现象,从机理上解释造成力矩变化的原因.

本研究的主要目的是针对方柱小幅振荡模式,以流场分析为主要方法提出一理论模型,作为通过理论定量解释这一振荡现象的初步尝试.这一模型充分结合钝体绕流中已有的理论模型,考虑方柱带来的“扰流效应”与黏性流体带来的“边界层效应”,结合自由流线理论与边界层理论进行计算.我们将该理论模型称为自由流线-边界层理论模型(Free Streamline-Boundary Layer Model, 缩写为 FSBL Model).

本文的组织结构如下:第一节主要介绍模型的基本假设.第二节对远离方柱、黏性体现不明显的流场依据自由流线模型进行计算.第三节对靠近方柱、充分体现流体黏性作用的流场,依据边界层模型进行计算.第四节结合浸没边界法的仿真数据,进行假设验证、模型计算与结果分析.最后在第五节对研究结果进行总结.

1 模型描述及基本假设

本文研究的方柱绕流为图 1 所示的二维问题.均匀来流速度为 U_∞ ,朝 x 正方向.方柱边长为 L ,中心固定,且初始时刻一面正对来流.方柱旋转后,

取逆时针方向旋转角度为 α 。由于研究只考虑方柱小幅振荡的情况,故始终有 $|\alpha| \ll \pi/4$; 且方柱正对来流区为同一表面,记为 Σ_1 。其余各面沿顺时针方向依次记为 $\Sigma_2 \sim \Sigma_4$ 。为了方便后续的研究,沿 Σ_2 与 Σ_4 各建立一辅助右手坐标系 (x_+, y_+) , (x_-, y_-) 。

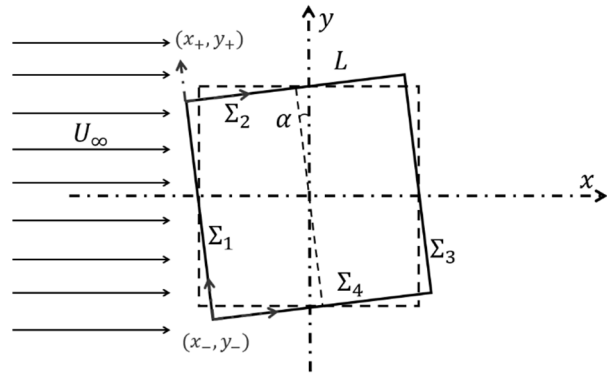


图1 方柱绕流系统示意图

Fig.1 Structure diagram of flow around square cylinder

本文研究中将采用如下假设:

(1) 假设流体为不可压缩流体。

(2) 假设流体的非定常性对于方柱的力矩及一时刻方柱所受力矩时,可以假设流场为定常流场。在此定常假设下,辅助正交坐标系 (x_+, y_+) , (x_-, y_-) 为惯性系。该定常假设的有效性将会在第4小节进行验证与说明。

(3) 方柱的小幅振荡可以近似认为是简谐振动,故其所受力矩 M 近似满足 $M \propto \alpha$, 记该比例系数为 $M_\alpha = -M/\alpha$ 。由此,方柱的转动满足方程:

$$-M_\alpha \alpha = -I (2\pi f)^2 \alpha \quad (1)$$

其中, $I = 1/6 \rho_s L^4$ 为方柱的转动惯量, ρ_s 为固体的密度。由式(1)可得,方柱的振荡频率为 $f = 1/2\pi \sqrt{M_\alpha/I}$ 。该假设的有效性将会根据第4节数值结果进行验证。值得注意的是,简谐振动的假设也与 Ryu^[10] 指出小幅振荡驱动力是所受力矩与旋转角度之间异步性的结论一致。

(4) 假设远离方柱的流场变化主要是由方柱绕流造成的,流体的黏性可以忽略不计。并且,由于正对流体的仅为 Σ_1 面,我们可以认为绕流效应主要是由 Σ_1 面造成的。

(5) 假设方柱绕流区内雷诺数较小,没有因为绕流出现的分离泡,在方柱表面主要表现为边界层效应,该假设称为“边界层假设”。该假设的有效性

将会根据第4节数值结果中 Σ_2, Σ_4 周围流场速度与涡量分布进行验证。

(6) 假设固体 Σ_3 面各点所受压强呈线性变化,黏性力可以忽略不计。该假设的有效性将会在第4节通过数值结果进行验证。需要说明:本文考虑的是 α 很小的运动模态,而 Ryu^[12] 的研究表明,在 α 较大时该假设不再有效。

2 自由流线模型及其理论分析

2.1 自由流线物理模型的基本假设

1869年, Kirchhoff^[13,14] 针对圆柱绕流的计算提出了自由流线的概念。自由流线的假设是钝体绕流的分离区内部为“死水区”,“死水区”内部流体流动基本均匀且可以忽略不计,压力为常数。“死水区”由两个被称为“自由流线”的间断面围成。“自由流线”自与钝体接触起一直沿着钝体表面直至分离点,在分离点与钝体表面相切,满足流函数为0。其中, Kirchhoff^[13,14] 与 Brodetsky^[14,15] 假设自由流线上速度为常数并始终等于来流的速度,针对圆柱绕流计算所得分离角 θ_s 与压差阻力系数 c_{Dp} 同实验所得有较大差异。而 Roshko^[14,16], Eppeler^[14,17], Woods^[14,18] 针对圆柱的研究注意到,假设钝体后方的压力为一合适的负值,并且允许速度沿自由流线进行变化,所得分离角 θ_s 与压差阻力系数 c_{Dp} 更贴近实验所得,能更好模拟出无黏绕流场的压强分布。以 Roshko^[14,16] 的模型为例,对关于来流对称性的钝体(如圆柱),该模型假设自由流线在分离点具有相同的速度 kU_∞ 。分离后,速度沿自由流线先匀变速变化至与来流平行(“分离区”),再减速至无穷远速度 U_∞ (“减速区”)。

自由流线参数方程及速度的求解主要通过物理平面 (z) 、复势平面 (F) 、归一化复速度倒数平面 $[\zeta = U/W = U(dz/dF), U$ 为归一化速度] 与实轴上半空间 $\{t \in \mathbb{C} \mid \Re(t) \geq 0\}$ 的保角变换来进行, $\Re(\cdot)$ 表示取实部。在计算正对来流平板时,在 Roshko 的模型中,分离区在归一化复速度倒数平面 (ζ) 中的轨迹为半圆。

依据第1章的假设,远离方柱的流体黏性可以忽略不计,因此可以认为“自由流线”区域满足无黏的要求。假设“自由流线”与斜板分离后,在改变方

向的同时减速,且在归一化复速度倒数平面(ζ)中的轨迹为一倾斜的椭圆,椭圆两长轴端点为分离点,为了便于后期计算,假设椭圆半短轴长为1.由于归一化参数 U 的引入,这一关于半短轴的假设是不失一般性的.这一假设相对于 Roshko 的假设,其速度变化更加平滑.

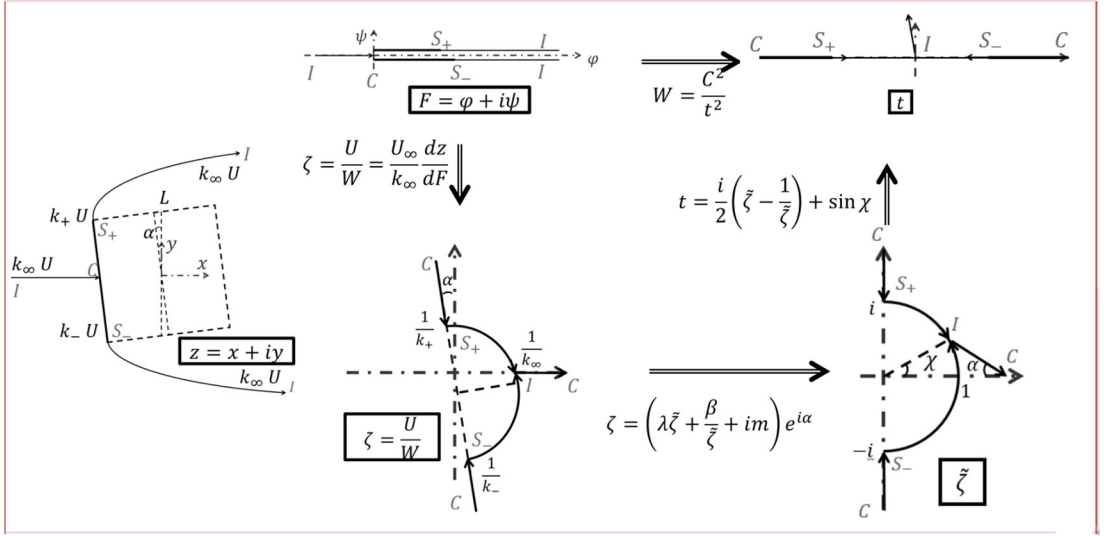


图2 自由流线计算各复平面示意图

Fig.2 Diagram of different complex plans in free streamline calculation

首先对归一化复速度倒数平面(ζ)中轨迹进行详细说明:由于自由流线与障碍物交点处(C)速度为0, C 在 ζ 平面上表现为无穷远.而无穷远处(I)速度为 $U_\infty = k_\infty U$,分离点处(S_+, S_-)速度大小分别为 $k_+ U, k_- U$.因此在 ζ 平面上 I 坐标为 $1/k_\infty$,分离点的坐标分别为 $S_+ = (1/k_+)ie^{i\alpha}$, $S_- = -(1/k_-)ie^{i\alpha}$.由于椭圆半短轴长度及长轴方向已经给定,实际椭圆只有2个自由度.考虑到物理意义,研究取 $k_+/k_\infty, k_-/k_\infty$ 作为自由参数,用于表示两分离点与无穷远处速度的比值.该自由参数可以通过数值仿真数据或实验测得.

各个复平面之间的变换由以下各式给出:

$$\zeta = \frac{U}{W} = \frac{U_\infty}{k_\infty} \frac{dz}{dF} \quad (2)$$

$$\zeta = f(\tilde{\zeta}) = \left(\lambda \tilde{\zeta} + \frac{\beta}{\tilde{\zeta}} + im \right) e^{i\alpha} \quad (3)$$

$$t = \frac{i}{2} \left(\tilde{\zeta} - \frac{1}{\tilde{\zeta}} \right) + \sin\chi \quad (4)$$

$$W = \frac{C^2}{t^2} \quad (5)$$

其中 $k_\infty, \lambda, \beta, m, \chi, C$ 为曲线参数,综合式(4)、

2.2 自由流线轨迹及速度理论模型

自由流线在物理平面(z)、复势平面(F)、归一化复速度倒数平面(ζ)中的轨迹如图2所示,为了方便将其保角变换至实轴上半空间,我们还设置一辅助平面($\tilde{\zeta}$),将椭圆保角变换为圆.

式(5),可以化简得到

$$\tilde{\zeta}_\pm = g_\pm(F) = i \left(\sin\delta \pm \frac{C}{\sqrt{F}} \pm \sqrt{\left(\sin\delta \pm \frac{C}{\sqrt{F}} \right)^2 - 1} \right) \quad (6)$$

式中正、负号分别代表着上方与下方自由流线.综合式(1)、式(2)、式(5),可得物理空间自由流线轨迹与复势的关系:

$$z_\pm(F) = \int_0^F f g_\pm(\tilde{F}) U d\tilde{F} + z_0 \quad (7)$$

式中 z_0 为零势能点在 z 平面中的坐标.复速度与复势的关系:

$$W = \frac{U}{f g_\pm(F)} \quad (8)$$

根据自由流线定义,自由流线应取 $F \in \mathbb{R}^+$.

下面对曲线参数($k_\infty, \lambda, \beta, m, \chi, C$)进行计算.在计算时,首先假设 k_+, k_- 已知,求出其他量,特别是 k_∞ 与 k_+, k_- 的关系,此后可通过二分法,在给定 $k_+/k_\infty, k_-/k_\infty$ 时,确定 k_+, k_-, k_∞ 的值.

参数 $k_\infty, \lambda, \beta, m, \chi$ 的确定依赖于归一化复速度倒数平面(ζ)与圆平面在端点与零点处的对应

关系.为了方便,记 $\frac{1}{k} = \frac{1/k_+ + 1/k_-}{2}$.可得:

$$m = \frac{(1/k_+ - 1/k_-)}{2} \quad (9)$$

$$\lambda = \frac{1 + 1/k}{2} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{1 - 1/k}{2} \quad (11)$$

$$\frac{1}{k} \sin \chi \cos \alpha + m \cos \alpha + \cos \chi \sin \alpha = 0 \quad (12)$$

$$k_\infty = \frac{1}{\cos \chi \cos \alpha - \frac{1}{k} \sin \chi \sin \alpha - m \sin \alpha} \quad (13)$$

其中,式(12)为 χ 满足的方程,其解为式(14)中的一个,正负号的确定根据其是否满足式(12).

$$\chi = \arctan \frac{-\frac{1}{k} \sin \alpha \pm m \sqrt{\sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{k^2} - m^2\right) \cos^2 \alpha}}{\left(\frac{1}{k^2} - m^2\right) \cos \alpha} \quad (14)$$

参数 C 的确定可以依赖二分法,其确定标准应当为使得两分离点间的距离为斜板的长度,其中分离点处复势的确定方式为

$$F_\pm^s(C) = \max_F \Re[z_\pm(F; C) e^{-i\alpha}] = 0 \quad (15)$$

式中 $\Re[\cdot]$ 表示取实部.由于 C 是函数 g 中的参数,进而也是 $z(F)$ 的参数,在这里将其记为 $z(F; C)$. C 的取值应满足:

$$I\{z_+[F_+(C); C] e^{-i\alpha} - z_-[F_-(C); C] e^{-i\alpha}\} = L \quad (16)$$

式中 $I\{\cdot\}$ 表示取虚部.由此,关于自由流线轨迹及其速度的具体求解步骤为:

(1) 根据数值仿真或实验结果测量得到 $k_+/k_\infty, k_-/k_\infty$,进而由式(9)一式(11)、式(13)一式(14)递归确定参数 $k_\infty, \lambda, \beta, m, \chi$.

(2) 结合式(3)、式(6)、式(7)、式(15)、式(16),使用二分法递归确定参数.

(3) 根据式(6)一式(7)确定自由流线轨迹及其速度.为了方便后续推导,令 Σ_1 表面的速度模长为 $W_1^{FS}(x_1, y_1)$.将所求得的上、下自由流线轨迹分别以图1所示辅助坐标系 (x_\pm, y_\pm) 表示.令上下自由流线(“分离区”)在 z_\pm 坐标系中轨迹为 $y_\pm = y_\pm^{FS}(x_\pm)$,速度在 (x_\pm, y_\pm) 坐标系中方向分别为 $u_\pm^{FS}(x_\pm), v_\pm^{FS}(x_\pm)$,记其模长为 $W_\pm^{FS}(x_\pm) =$

$$\sqrt{u_\pm^{FS}(x_\pm)^2 + v_\pm^{FS}(x_\pm)^2}.$$

3 边界层模型及其理论分析

对于靠近 Σ_2, Σ_4 面的流场,由于流体的黏性作用, Σ_2, Σ_4 表面会形成一边界层,可借助边界层理论对该表面流场进行计算.1908年,Blasius^[19]通过数量级分析将Navier-Stokes方程简化,利用自相似原理求得了平板下的流场速度.Falkneb与Skan^[20]则在就楔形劈尖的边界层求解时,通过对远离边界的流场进行Bernoulli假设,求解了存在压强梯度的边界层方程.在本文研究模型中,以自由流线速度为足够远处速度,通过数量级分析将Navier-Stokes方程简化,利用自相似性求得流场速度.

3.1 边界层方程的简化

为了方便表述,本章的研究采用 z_\pm 坐标系,记 $s = \pm$,记速度沿 x_s, y_s 方向的分量分别为 u_s, v_s .

首先分析二维黏性流体的方程,有:

$$\frac{\partial u_s}{\partial x_s} + \frac{\partial v_s}{\partial y_s} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y_s} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_s} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 u_s}{\partial y_s^2} \right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial v_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y_s} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial y_s} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2 v_s}{\partial y_s^2} \right) \quad (19)$$

以上三个方程中, ν 为运动黏度, ρ_f 为流体密度.由于定常假设,时间偏导项 $\partial u_s / \partial t$ 与 $\partial v_s / \partial t$ 为0,在下方分析中略去.下面对以上三个方程进行数量级分析.

假设边界层“足够远”处速度量级为 U, V ,特征板长度为 l ,该坐标的边界层高度为 δ ,且 $\delta \ll l$,那么由式(17),可得:

$$V \sim \frac{U}{l} \delta$$

对于式(18),各项数量级依次为

$$\frac{U^2}{l}; \frac{VU}{\delta} = \frac{U^2}{l}; \frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta x}; \frac{\nu U}{l^2}; \frac{\nu U}{\delta^2}$$

考虑到等式左边数量级为 U^2/l ,等式右边由于 $\delta \ll l, \nu U/l^2$ 可以省略,则

$$\frac{U^2}{l} \sim \frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta x} \sim \frac{\nu U}{\delta^2}$$

可得

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu l}{U}} = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}_l}}$$

在本文模型中,取足够远速度,即为 u_{\pm}^{FS} ,为了方便后面的计算,定义边界层厚度

$$\delta_s(x_s) = \sqrt{\frac{\nu x_s}{u_s^{\text{FS}}}} = \frac{x_s}{\sqrt{\text{Re}_{x_s, s}}}, s = \pm$$

对于式(18),同样进行数量级分析:

$$\frac{UV}{l} = \frac{U^2 \delta}{l^2}; \frac{V^2}{\delta} = \frac{U^2 \delta}{l}; \frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta y}$$

$$\frac{\nu V}{l^2} = \frac{U^2 \delta^3}{l^4}; \frac{\nu V}{\delta^2} = \frac{U^2 \delta}{l^2}$$

可得

$$\frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta y} \sim \frac{U^2 \delta}{l^2}$$

则 $\frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta y} \ll \frac{1}{\rho_f} \frac{\delta p}{\delta x}$,压强在 y 方向的偏导可忽略不计,即

$$\frac{\partial p_s}{\partial y_s} = 0, s = \pm \quad (20)$$

同时,对于边界层的压强 p_s ,有

$$p_s(x_s, y_s) = p_s[x_s, y_s = y_s^{\text{FS}}(x_s)] = p_s^{\text{FS}}(x_s) \quad (21)$$

由于忽略了流场黏性,有 Bernoulli 方程:

$$p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_f U_{\infty}^2 = p_s^{\text{FS}}(x_s) + \frac{1}{2} \rho_f [W_s^{\text{FS}}(x_s)]^2 \quad (22)$$

综合式(18)和式(22),有

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y_s} = W_s^{\text{FS}}(x_s) \frac{dW_s^{\text{FS}}(x_s)}{dx_s} + \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y_s^2} \quad (23)$$

记

$$A_s(x_s) = \frac{W_s^{\text{FS}}(x_s)}{[u_s^{\text{FS}}(x_s)]^2/x_s} \frac{dW_s^{\text{FS}}(x_s)}{dx_s}$$

$$B_s(x_s) = \frac{x_s}{u_s^{\text{FS}}(x_s)} \frac{du_s^{\text{FS}}(x_s)}{dx_s}$$

在数值计算中, A_s, B_s 参数中微分的计算可以通过差分实现.式(23)可简化为:

$$u_s \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y_s} =$$

$$A_s(x_s) \frac{[u_s^{\text{FS}}(x_s)]^2}{x_s} + \nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial y_s^2} \quad (24)$$

同时有边界条件:

$$u_s(x_s, y_s = 0) = 0 \quad (25)$$

$$v_s(x_s, y_s = 0) = 0 \quad (26)$$

$$u_s[x_s, y_s = y_s^{\text{FS}}(x_s)] = u_s^{\text{FS}}(x_s) \quad (27)$$

3.2 根据自相似性化简边界层方程

考虑边界层的流函数,有

$$u_s = \frac{\partial \psi_s}{\partial y_s}, v_s = -\frac{\partial \psi_s}{\partial x_s}$$

则式(24)可写为

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial y_s} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial x_s \partial y_s} - \frac{\partial \psi_s}{\partial x_s} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial y_s \partial y_s} = A_s(x_s) \frac{[u_s^{\text{FS}}(x_s)]^2}{x_s} + \nu \frac{\partial^3 \psi_s}{\partial y_s^3} \quad (28)$$

边界条件式(25)–式(27)可化简为

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial y_s}(x_s, y_s = 0) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial x_s}(x_s, y_s = 0) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \psi_s}{\partial y_s}[x_s, y_s = y_s^{\text{FS}}(x_s)] = u_s^{\text{FS}}(x_s) \quad (31)$$

不失一般性地假设 $\psi_s(x_s = 0, y_s = 0) = 0$,那么由式(30)可得

$$\psi_s(x_s, y_s = 0) = 0$$

对于实际速度,我们尝试求解在 x_s 方向上具有形式自相似性的速度,即存在函数 Φ_s 使:

$$\frac{u_s(x_s, y_s)}{u_s^{\text{FS}}(x_s)} = \Phi_s\left(\frac{y_s}{\delta_s(x_s)}\right) \quad (32)$$

对式(31)在 y_s 方向积分,可以得到:

$$\psi_s(x_s, y_s) = f_s\left(\frac{y_s}{\delta_s(x_s)}\right) \delta_s(x_s) u_s^{\text{FS}}(x_s)$$

式中, $f_s'(\eta_s) = \Phi_s(\eta_s)$, 记 $\eta_s = \frac{y_s}{\delta_s(x_s)}$.将式(32)

代入式(28),可得

$$f_s'''(\eta_s) + \frac{1}{2}[1 + B_s(x_s)]f_s(\eta_s)f_s''(\eta_s) + A_s(\eta_s) - B_s(x_s)f_s'(\eta_s)f_s''(\eta_s) = 0 \quad (33)$$

同时由式(25)–式(27)可得边界条件:

$$f_s(0) = f_s'(0) = 0, f_s'\left[\frac{y_s^{\text{FS}}(x_s)}{\delta_s(x_s)}\right] = 1 \quad (34)$$

计算中需要在每一个位置 x_s 对式(33)、式(34)求解.求解时可以采用试射法,基本思路是

假设 $f''_s(0) = a$ 为一给定数,数值求解方程并计算 $f'_s \left[\frac{y_s^{FS}(x_s)}{\delta_s(x_s)} \right]$, 通过递归使 $f'_s \left[\frac{y_s^{FS}(x_s)}{\delta_s(x_s)} \right]$ 为 1.

3.3 力矩的计算及基本假设

求得边界层速度分布后,可根据定常假设计算方柱所受力矩 M .该力矩由压力力矩 M_p 与黏性力矩 M_μ 组成.

在压力力矩 M_p 的计算中,首先分析 Σ_2 与 Σ_4 面所受力矩,其基本思路是由边界层公式进行计算.由式(21)、式(22)得:

$$p_n(x_s, y_s = 0) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_f U_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho_f [W_s^{FS}(x_s)]^2 \quad (35)$$

其中, $n=2,4$ 并且分别对应 $s=+, -$.实际计算中取 p_∞ .对于 Σ_1 面,由于自由流线流过方柱表面,所以

$$p_1(x_1, y_1) = p_\infty + \frac{1}{2} \rho_f U_\infty^2 - \frac{1}{2} \rho [W_1^{FS}(x_1, y_1)]^2 \quad (36)$$

对于 Σ_3 面,可以对其表面压强作线性拟合.有力矩

$$M_{p,n} = \mathcal{R} \left(\int p_n z d\bar{z} \right) \quad (37)$$

对于黏性力矩的求解,只考虑 Σ_2 与 Σ_4 面,有:

$$\tau_{w,n} = \mu \left(\frac{\partial u_s}{\partial y_s} \right)_{y_s=0} = u_s^{FS}(x_s) \sqrt{\frac{\mu u_s^{FS}(x_s) \rho_f}{x_s}} f''_s(0) \quad (38)$$

式中 μ 为黏度,积分可得力矩,有

$$M_{\mu,n} = -s \int \tau_{w,n} \frac{L}{2} dx_s \quad (39)$$

式(38)、式(39)中, $n=2,4$ 分别与 $s=+, -$ 相对应.

4 数值算例

本章展示在针对小幅振荡的自由流线-边界层理论模型与数值计算的结果对比.

4.1 数值分析方法

研究采用浸没边界法对均匀来流中方形柱体涡激旋转的动力学问题进行数值模拟,分别对流体和

刚性固体的控制方程进行数值求解.在控制方程中,浸没边界法使用附加力项来表示流体和固体之间的相互作用.数值计算方法详情参见文献[21,22].

在流体运动上,研究计算域长为 $32L$, 宽为 $16L$, 且设置计算域边界速度均为 U_∞ 沿 x 正方向.计算时,流体连续性方程与 Navier-Stokes 方程均需进行无量纲化,其对应特征量如表 1 所示,无量纲化后所得 Navier-Stokes 方程如式(40)所示.式中,雷诺数 $Re = \rho_f U_\infty L / \mu$, F_{ib} 表示浸没边界法所施加的力.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u + F_{ib} \quad (40)$$

在下文进行的所有计算中,本文第 2、3 章所列流场方程与所有流场物理量也均采用表 1 特征量进行无量纲化.为简化,所有无量纲化之后的物理量均采用原记号标记.

所得连续方程与 Navier-Stokes 方程可以由欧拉网格形式进行划分,依据 Peskin^[23] 所提出的方法,将流体速度和力源项定义在网格节点上,将流体压强定义在网格中心.时间离散采用全隐式时间推进法,空间离散采用 Crank-Nicholson 格式来离散对流项和扩散项.

表 1 流体控制方程中各物理量无量纲化时对应的特征量
Table 1 Characteristic quantity of the nondimensionalization in fluid equations

Quantity	Characteristic scale
x, y	L
u	U_∞
t	L/U_∞
p	$\rho_f U_\infty^2$
F_{ib}	$\rho_f U_\infty^2 / L$

对于固体部分,浸没边界法只关注固体边界,即浸没边界的位移与速度.力矩、角加速度、角速度和角度的关系同样进行无量纲化,其中转动惯量特征量为 $\rho_s L^4$, 时间特征量为 L/U_∞ , 角度特征量为 1.在下文进行的刚体运动计算中,本文第 2、3 节所列流场方程与所有流场物理量也均采用这些特征量进行无量纲化.为了简化,所有无量纲化之后的物理量均采用原记号标记.离散方法上,固体被视作刚体,采用显式欧拉法离散刚体的角度、角速度、角加速度之间的关系式.

根据浸没边界法,式(38)中流体与固体的相互作用力可以表示为:

$$F(s, t) = \alpha \int_0^t (U_{ib}(s, t') - \tilde{U}(s, t')) dt' - \beta (U_{ib}(s, t) - \tilde{U}(s, t)) \quad (41)$$

式中, α, β 为常系数, $U_{ib}(s, t)$ 是由界面附近流体速度插值得到的浸没边界处的流体速度, $\tilde{U}(s, t)$ 为浸没边界的运动速度. 其中, 浸没边界处的流体速度可以由界面附近流场速度插值得到:

$$U_{ib}(s, t) = \int_{x \in V} u(x, t) \delta[X(s, t) - x] dx \quad (42)$$

式中, V 表示边界附近流体所占的区域, $u(x, t)$ 表示流体速度, $X(s, t)$ 表示固体边界节点的位置, x 表示流体欧拉网格的位置坐标, δ 是 Dirac Delta 函数.

根据以上方法,针对不同 ρ_s/ρ_f 与 Re 进行了研究. 我们发现,在雷诺数 $Re=70$ 与密度比 $\rho_s/\rho_f=8$ 时存在明显且稳定的小幅振荡情况. 下面的章节中,我们将以该情况为例对理论模型进行验证.

4.2 假设有效性检验

浸没边界法所得 $t=0 \sim 600$ 时间区间内 $M-t$ 与 $\alpha-t$ 曲线如图 3 所示.

下面首先分析各假设的有效性. 对于定常假设,我们对边界层进行数量级分析,式(18)中,令 δU 为 U 变化量. 公式的数量级为 $(\delta U)^2/t$, 而时间偏导项 $\partial u_s/\partial t$ 数量级为 $f\delta U$, 由数值仿真数据可得, $f \sim 0.1 \ll 2U/L = 2 \sim \delta U/l$, 故可以将非常项忽略不计,定常假设成立.

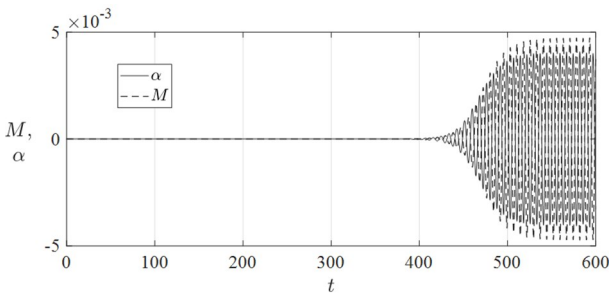


图 3 $Re=70$ 与 $\rho_s/\rho_f=8$ 下数值计算力矩 M 与旋转角度 α (无量纲)
Fig.3 CFD result of moment M and rotation angle α (nondimensionalized) under the condition of $Re=70$ and $\rho_s/\rho_f=8$

对于简谐振动假设,下面考察小幅振荡期间力矩 M 与旋转角度 α 的线性. $t=550 \sim 600$ 时间窗口内的 $M-\alpha$ 散点图如图 4 所示. 对 M 与 α 数据进行线性回归可得 $R^2=1.0000$, 其线性极强,简谐振动假

设成立.

由于定常假设,可以取任意时刻的方柱旋转角度 α , 将流场视为定常进行计算. 下文以 $t=600$ 为例研究流场情况.

首先验证方柱表面流场情况,分析方柱绕流区是否存在局部分离泡. 图 5 展示了方柱绕流区流线与涡量大小 $|\omega|$ 分布情况. 由图 5 可见,绕流区内流线主要呈现为层流特征,涡量主要集中于方柱拐角处,没有明显独立小涡出现. 图 6 展示了 Σ_2 与 Σ_4 表面邻域的速度剖面图. 由图 6 可见,两表面的速度分布呈现明显的边界层特征,没有局部涡的形成,边界层假设成立.

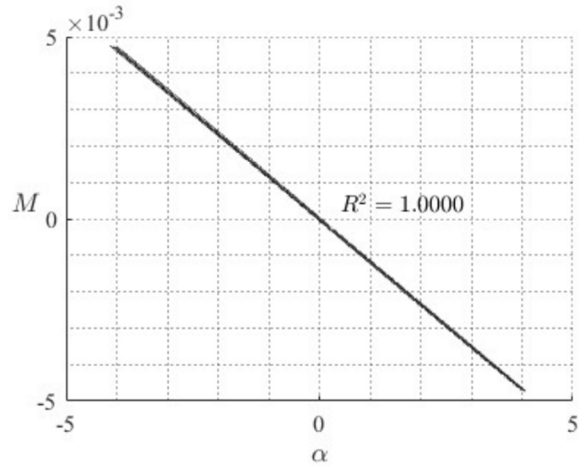


图 4 $Re=70$ 与 $\rho_s/\rho_f=8$ 下数值仿真 $M-\alpha$ 图(无量纲)
Fig.4 CFD result of $M-\alpha$ plot (nondimensionalized) during $t=550 \sim 600$ under $Re=70$ and $\rho_s/\rho_f=8$

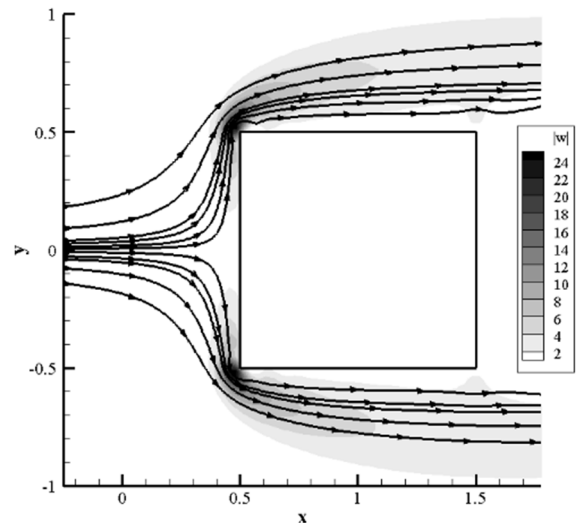


图 5 方柱周围流线与涡量绝对值分布图
Fig.5 The streamline and vorticity value plot around square cylinder

对于 Σ_3 面的线性压强假设, 将浸没边界法所得压强结果以压差系数 $c_p = (p - p_\infty) / \frac{1}{2} \rho U_\infty^2$ 表示. 取 $t = 600$ 时刻, 各个面的 c_p 随该面距离坐标变化如图 7 所示, 由图 7 可以看出, 除端点处外, Σ_3 面的 c_p 曲线较其他面 c_p 变化具有较强的线性, 且端点处变化较其他曲线变化可以忽略不计, 故线性假设基本成立.

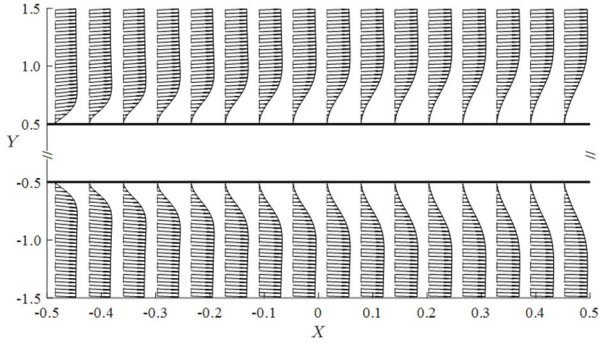


图 6 Σ_2 与 Σ_4 表面周围速度剖面图
Fig.6 Velocity profile plot around surface Σ_2 and Σ_4

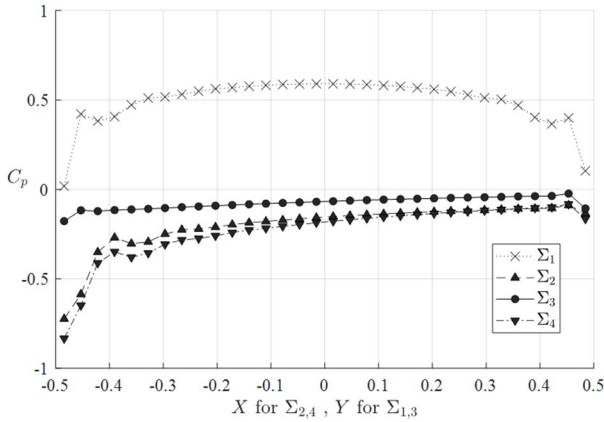


图 7 $t = 600$ 时各面数值仿真 c_p - X 或 c_p - Y 变化曲线
Fig.7 CFD result of c_p - X or c_p - Y plot of each surface at $t = 600$

4.3 模型与数值结果对比

对于自由流线-边界层模型, 根据第 2、3 章的方程编制 MATLAB 程序进行计算. 由浸没边界法得到 $t = 600$ 时刻数值仿真数据, $\alpha = -0.00329215$, 由上、下方角落邻域内压强计算得 $k_+ / k_\infty = 1.346886$, $k_- / k_\infty = 1.387032$. 带入 MATLAB 程序中, 所得力矩结果如表 2 所示. 由浸没边界法得到该时刻力矩为 $M = 0.003921$, $M_a = 1.1910$. 在 $t = 550 \sim 600$ 区段振荡频率为 $f = 0.1332$.

可以看出, 两方法所得 M_a 与 f 基本相当. 从表 2 可以得出, 维持方柱小幅度振荡的力主要来源于 Σ_1 面的压强力矩及 Σ_2 与 Σ_4 面的压强力矩差,

即迎流面 (Σ_1) 压强的分布不均匀与上下面 (Σ_2 与 Σ_4) 因转动与自由流线速度差异导致的压强不对称性. 值得注意的是, 与自转模态不同, 小幅振荡模态下迎流面 (Σ_1) 的力矩贡献与瞬时力矩方向相同, 并且为主要组成功矩之一; 而背流面 (Σ_3) 对于力矩的贡献与瞬时力矩方向相反, 并且可以忽略不计. 这也使得此时的力矩 M 主要表现为恢复力矩, 其方向与 α 方向相反, 方柱呈现振荡形态.

表 2 自由流线-边界层模型力矩计算结果(无量纲)
Table 2 Moment results (nondimensionalized) of FSBL Model

Surface	M_p	M_μ	Sum
Σ_1	0.0024	Not Evaluated	--
Σ_2	-0.0120	-0.0324	--
Σ_3	-0.0009	Ignored	--
Σ_4	0.0140	0.0328	--
Total	0.003541	0.000345	0.003886
M_a	1.0755	0.1048	1.1803
I	--	--	0.1497

下面比较模型所得的压强结果与浸没边界法所得 Σ_2 与 Σ_4 面的压强结果, 以分析可能的误差原因. 结果以上方所定义压差系数 c_p 表示.

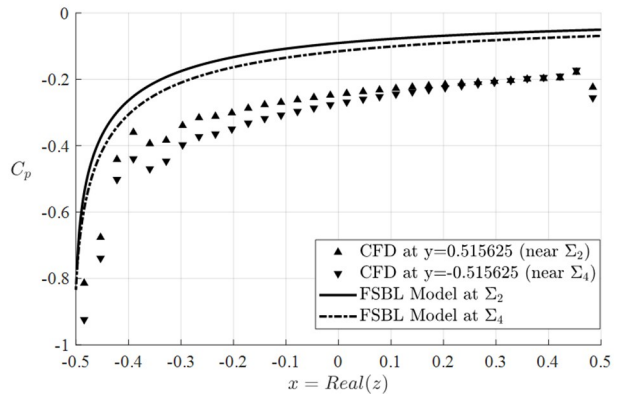


图 8 数值仿真与自由流线-边界层模型所得压差系数 c_p
Fig.8 Pressure coefficient by CFD calculation and by FSBL Model

由图 8 可见, 计算所得压差系数总体偏大, 趋势与数值仿真结果基本相仿. 其原因一方面是浸没边界法所得压强, 并非边界处压强, 而为靠近边界点的压强, 此处无法进行完全比较. 另一方面, 所取 k_+ / k_∞ 与 k_- / k_∞ 将会极大影响 c_p 计算精度, 而浸没边界法所得数据可能存在偏差. 同时, 定常假设导致压强中缺乏非定常变化项以及对迎流面黏性力矩无法测算, 使得压强计算存在系统性偏差.

5 结论

本文综合钝体绕流的自由流线与边界层理论,提出了流固耦合中方柱体涡激旋转小幅振荡模态下的自由流线-边界层理论解释模型,并且通过浸没边界法进行数值仿真,对比验证了该理论的有效性.研究总结如下:

(1)从数值仿真结果可以得出,方柱在小幅振荡模态中可以近似为简谐振动,并且由自由流线-边界层理论推算所得力矩和频率与数值仿真基本吻合.

(2)从力矩来源上讲,方柱涡激振荡维持力矩主要来源于迎流面压强的分布的不均匀以及上下两面压强分布的不对称性.

(3)小幅振荡模态与自转模态下压强的分布不同,所导致模态的主要驱动力来源也不同,这也是这一模态下表现为振荡的主要原因.

尽管在压强的计算上,由于忽略了非定常性与迎流面与背流面表面黏性,自由流线-边界层理论相较于数值仿真存在一定的差异,但是本研究将研究点聚焦于靠近方柱周围流场的局部化描述,给涡激旋转与部分流固耦合问题的理论解释提出了一个新思路.

参考文献

- [1] 武晓东,张煜航,葛斐,等. 涡激振动行波动力学特征的数值模拟 [J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(3):265-271.
WU X D, ZHANG Y H, GE F, et al. Numerical simulation of traveling-wave dynamic features of vortex-induced vibration [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(3):265-271.(in Chinese)
- [2] 隋国策,段梦兰,武晓东. 细长圆柱体涡激振动行波动力学特征的实验研究 [J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(6):546-552.
SUI G C, DUAN M L, WU X D. Experimental study on the dynamic features of traveling wave of vortex-induced vibration of a long slender cylinder [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(6):546-552.(in Chinese)
- [3] MONDAL J, CHATTERJEE S. Mitigating vortex-induced vibration by acceleration feedback control [J]. International Journal of Dynamics and Control, 2020, 8(2):570-580.
- [4] 陈卓,潘振海,吴慧英. 自由摆动方柱强化微流体通道内传热传质 [J]. 化工进展, 2019, 38(9):3979-3987.
CHEN Z, PAN Z H, WU H Y. Heat and mass transfer enhancement in a microchannel with freely rotating cylinder [J]. Chemical Industry and Engineering Progress, 2019, 38(9):3979-3987.(in Chinese)
- [5] WANG H K, YAN Y H, CHEN C M, et al. Numerical investigation on vortex-induced rotations of a triangular cylinder using an immersed boundary method [J]. China Ocean Engineering, 2019, 33(6):723-733.
- [6] MAXWELL J C, NIVEN W D. The scientific papers of james clerk maxwell [M]. England: Cambridge University Press, 2011:115-118.
- [7] LUGT H G. Autorotation of an elliptic cylinder about an axis perpendicular to the flow [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1980, 99:817-840.
- [8] SKEWS B W. Autorotation of many-sided bodies in an airstream [J]. Nature 1991, 352:512-513.
- [9] ZAKI T G M S, GADELHAK M. Numerical and experimental investigation of flow past a freely rotatable square cylinder [J]. Journal of Fluids and Structures, 1994, 8(6):555-582.
- [10] RYU S, IACCARINO G. Vortex-induced rotations of a rigid square cylinder at low Reynolds numbers [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 813:482-507.
- [11] ROBERTSON I, LI L, SHERWIN S J, et al. A numerical study of rotational and transverse galloping rectangular bodies [J]. Journal of Fluids and Structures, 2003, 17(5):681-699.
- [12] RYU S. Quadrant analysis on vortex-induced autorotation of a rigid square cylinder [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(6):2629-2635.
- [13] KIRCHHOFF G. On the theory of free jets of fluid (in German) [J]. Mathematik, 1869, 70(10):289-298.
- [14] ZDRAVKOVICH M M. Flow around circular cylinders volume 1: Fundamentals [M]. England: Oxford University Press, 1997:205-232.
- [15] BRODETSKY S, BRYAN G H. Discontinuous fluid motion past circular and elliptic cylinders [J]. Proceedings of the Royal Society, 1923, 102(718):542-

- 553.
- [16] ROSHKO A. A new hodograph for free-streamline theory [J]. Technical Report Archive & Image Library, 1954.
- [17] EPPLER R. Contribution to theory and application to discontinuous flows (in German) [J]. Journal Rational Mechanics Analysis, 1954,3(10): 591—644.
- [18] WOODS L C. The theory of subsonic plane flows [M]. New York: Cambridge University Press, 1961: 10.
- [19] BLASIUS H. Boundary layers in liquids with low friction (in German) [J]. Zeitschrift Angewandte Mathematik Physik, 1908, 56: 1—37.
- [20] FALKNEB B SC, SKAN S W. LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1931,12(80): 865—896.
- [21] HUANG W X, SHIN S J, SUNG H J. Simulation of flexible filaments in a uniform flow by the immersed boundary method [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 226(2): 2206—2228.
- [22] HUANG W X, SUNG H J. Three-dimensional simulation of a flapping flag in a uniform flow [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2010, 653: 301—336.
- [23] PESKIN C S. The immersed boundary method [J]. Acta Numerica, 2003,11:479—517.