

随机齿侧间隙下行星齿轮系统的修形方法研究*

王靖岳^{1,2†} 乔乐群¹ 郑珺文¹ 王军年²

(1. 沈阳理工大学 汽车与交通学院, 沈阳 110159)

(2. 吉林大学 汽车仿真与控制国家重点实验室, 长春 130025)

摘要 建立一个包含随机齿侧间隙、摩擦、时变啮合刚度等影响齿轮振动因素的行星齿轮系统动力学模型。使用非线性动力学方法对系统进行求解,并分析激励频率对系统的影响。提出修形的主动降噪措施对系统进行改进,重新计算行星齿轮系统的动力学方程。求解并分析激励频率对改进之后系统的影响,并和原始系统得到的结果对比,可以看出修形对于齿轮系统的减振是有效的。

关键词 行星齿轮系统, 非线性动力学, 随机齿侧间隙, 修形

中图分类号:TU311.3;TU333

文献标志码:A

Research on Profile Modification Method of Planetary Gear System Under Random Backlash*

Wang Jingyue^{1,2†} Qiao Lequn¹ Zheng Junwen³ Wang Junnian²

(1. School of Automobile and Transportation, Shenyang Ligong University, Shenyang 110159, China)

(2. State Key Laboratory of Automotive Simulation and Control, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract A dynamic model of planetary gear system including random backlash, friction, time-varying meshing stiffness and other factors affecting gear vibration is established. The nonlinear dynamics method is used to solve the equation, and the influence of excitation frequency on the system is analyzed. The active noise reduction measures of profile modification are proposed, the system is improved, and the dynamic equation of planetary gear system is recalculated. The influence of the excitation frequency on the improved system is solved and analyzed, and compared with the results obtained by the original system, it can be seen that the modification is effective for the vibration reduction of the gear system.

Key words planetary gear system, nonlinear dynamics, random backlash, profile modification

引言

齿轮是机械结构中应用最广泛的一种,其中行星齿轮结构更是有着高载荷、大传动比以及结构体

积小等优点。行星齿轮系统的振动和噪声对传动精度等产生了很大的影响。所以本文提出了使用修形这种主动降噪措施来降低行星齿轮系统的振动和噪声。

2022-05-10 收到第 1 稿,2022-07-24 收到修改稿。

* 辽宁省自然科学基金项目(2020-MS-216);中国博士后科学基金资助项目(2017M610496);汽车仿真与控制国家重点实验室开放基金资助(20191203), Liaoning Natural Science Foundation Project(2020-MS-216), China Postdoctoral Science Foundation Funded Project(2017M610496), Open Fund of State Key Laboratory of Automotive Simulation and Control(20191203)。

† 通信作者 E-mail:abswell@126.com

本文采用非线性动力学分析方法对通过集中质量法建立的行星齿轮系统动力学方程进行求解分析.提出使用修形的主动降噪方法对齿轮系统进行改进.袁哲使用遗传算法对齿轮的修形量和修形角度进行优化设计,比较直线修形和抛物线修形所能达到的最佳减振效果.杜飞以齿轮副最小传动误差和法向载荷峰值最小为目标研究了齿廓修形和鼓状修形,比较修形前后齿轮箱的动态性能变化.雷刚通过经验修形和遗传算法修形建立了齿向和齿廓组合的修形模型,结果发现遗传算法对于修形的效果更佳.本文在以上分析的基础上建立包含随机齿侧间隙、轮齿之间的摩擦和齿轮时变啮合刚度等因素的行星齿轮系统动力学模型,通过分析激励频率对修形前后系统的振动影响,验证修形对系统的减振效果.

1 系统的数学模型

如图1所示建立行星齿轮系统动力学模型,把太阳轮的中心定为系统坐标原点,太阳轮中心和行星轮中心的连线为动坐标的 x 轴,各个行星轮的坐标系 $o_n x_n y_n$ 与系统动坐标 Oxy 是平行的.以逆时针方向为转动正方向. c 、 s 、 r 分别代表齿圈、太阳轮和行星架, n 代表第 n 个行星轮, u 代表各个构件的扭转位移, $k_m(t)$ 、 $k_{sn}(t)$ 分别代表内外啮合的啮合刚度, c_{rn} 、 c_{sn} 分别代表内外啮合的阻尼.

根据牛顿第二定律采用集中质量法建立行星齿轮系统的动力学方程:

$$\begin{cases} \left(\frac{I_c}{r_c^2} + Nm_n \right) \ddot{u}_c - \sum_{n=1}^N F_{rn} \cos(\alpha_{rn}) - \sum_{n=1}^N F_{sn} \cos(\alpha_{sn}) = \frac{T_{out}}{r_c} \\ \frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{n=1}^N F_{sn} - \sum_{n=1}^N f_{sn} \frac{L_{sn}}{r_s} = \frac{T_{in}}{r_s} \\ \frac{I_r}{r_r^2} \ddot{u}_r + \sum_{n=1}^N F_{rn} - \sum_{n=1}^N f_{rn} \frac{L_{rn}}{r_r} = 0 \\ \frac{I_n}{r_n^2} \ddot{u}_n + F_{sn} - f_{sn} \frac{L_{ns}}{r_s} - F_{rn} + f_{rn} \frac{L_{rn}}{r_r} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中, N 为行星轮的数量, r_s 、 r_r 、 r_n 分别代表太阳轮、齿圈和行星轮的基圆半径, r_c 是行星架半径, I_c 、 I_s 、 I_r 、 I_n 分别代表行星架、太阳轮、齿圈和行星轮的转动惯量, α_{rn} 、 α_{sn} 分别是内外啮合的压力角, T_{out} 、 T_{in} 分别是输出和输入转矩.使用石川法来表达系统的时变啮合刚度,展开成傅里叶级数的形式

来表示:

$$k(t) = k_m + \sum_{j=1}^{\infty} [k_{j1} \cos(j\omega_e t) + k_{j2} \sin(j\omega_e t)] \quad (2)$$

式中, k_m 是齿轮平均啮合刚度, k_{j1} 、 k_{j2} 是傅里叶级数, ω_e 是齿轮啮合频率,使用曲线拟合工具箱中的8阶傅里叶级数拟合得到系统的时变啮合刚度.

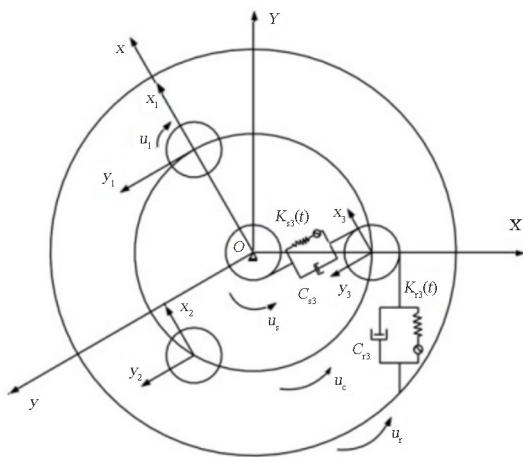


图1 行星齿轮系统
Fig.1 Planetary gear system

轮齿之间的相对距离分别是 b_1 、 b_2 ,变化的区间是 $[0, 2b]$, b 表示齿侧间隙的一半.齿侧间隙的表示式为:

$$f(\delta(t)) = \begin{cases} \delta(t) - b & \delta(t) > b \\ 0 & \delta(t) \leq |b| \\ \delta(t) + b & \delta(t) < -b \end{cases} \quad (3)$$

传递误差表示为随激励频率变化的函数:

$$e(t) = TH \cos(\omega_e t) \quad (4)$$

式中 TH 为传递误差.

根据库伦摩擦定律,轮齿之间的摩擦力与齿轮啮合力成正比:

$$f = \lambda \mu F \quad (5)$$

式中 μ 是摩擦系数, F 是齿轮啮合力, λ 是确定摩擦力方向的系数,根据主动轮力臂与齿轮参数的关系可以确定为:

$$\lambda = \begin{cases} 1 & L_1 - r_1 \tan(\alpha) > 0 \\ 0 & L_1 - r_1 \tan(\alpha) = 0 \\ -1 & L_1 - r_1 \tan(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

式中 r_1 是主动齿轮的基圆半径, α 是压力角, L_1 是主动齿轮摩擦力臂,摩擦力臂随啮合点的变化而变化:

$$\begin{cases} L_{sn}(t) = \sqrt{r_{as}^2 - r_s^2} - \epsilon_{sn} S_{pb} + \omega_s r_s t \\ L_{ns}(t) = \sqrt{r_{an}^2 - r_n^2} - \epsilon_{sn} S_{pb} + \omega_s r_s t \end{cases} \quad (7)$$

式中 r_s, r_{as} 是太阳轮的基圆半径和齿顶圆半径, ϵ_{sn} 是太阳轮和行星轮之间外啮合的重合度, S_{pb} 是基圆半径, ω_s 是太阳轮转速, 内啮合同理可得到。

为了消除齿轮间刚体位移和降维, 使用齿轮之间的相对位移来表达动力学方程:

$$\begin{cases} \delta_{sn} = u_s - u_c \cos(\alpha_{sn}) + u_n + e_{sn} \\ \delta_{rn} = u_r - u_c \cos(\alpha_{rn}) - u_n + e_{rn} \end{cases} \quad (8)$$

齿轮的动态啮合力表达为:

$$\begin{cases} F_{rn} = k_{rn}(t)f(\delta_{rn}(t)) + c_{rn}f(\dot{\delta}_{rn}(t)) \\ F_{sn} = k_{sn}(t)f(\delta_{sn}(t)) + c_{sn}f(\dot{\delta}_{sn}(t)) \end{cases} \quad (9)$$

对方程中的位移和时间进行无量纲化处理, 定义一个位移尺度 b_c 和无量纲时间尺度 τ 对位移、速度、加速度和频率等进行无量纲化处理:

$$\begin{aligned} \tau = \omega t \quad \omega &= \sqrt{k_m \left(\frac{1}{M_s} + \frac{1}{M_n} \right)} \\ M_s &= \frac{I_s}{r_s^2} \quad M_n = \frac{I_n}{r_n^2} \\ \bar{\delta}_{sn} &= \frac{\delta_{sn}}{b_c} \quad \bar{\delta}_{rn} = \frac{\delta_{rn}}{b_c} \quad \Omega = \frac{\omega_c}{\omega} \end{aligned} \quad (10)$$

式中 M_s, M_n 是太阳轮和行星轮的等效质量, $\bar{\delta}_{sn}, \bar{\delta}_{rn}$ 是内外啮合的无量纲相对位移, Ω 是无量纲激励频率. 把处理之后的各个参数以及啮合力、摩擦力等代入式(1)中, 可以得到式(11).

表 1 齿轮参数

Table 1 Gear parameters

Parameters	Sun	Planet	Ring	Carrier
Teeth number	20	29	79	—
Modulus/mm	2.25			
Base radius/mm	42.29	61.31	167.03	113
Rotational inertia/(kg · mm ²)	146	297	17440	11178
Teeth width/mm	25	28	25	25
mass/kg	0.53	0.35	1.85	4.5
Elasticity modulus/Gpa	206			
Pressure angle/(°)	20			
Addendum coefficient	1			
Bottom clearance	0.25			
Poisson ratio	0.3			

齿轮系统的基本参数如表 1 所示, 基准参数为: $\mu = 0.1, T = 100, \omega = 3000 \sim 5000 \text{r/min}, C = 0.088, b = 50$.

$$\begin{cases} \ddot{\bar{\delta}}_{sn} - \left(\frac{\mu \lambda_{sn} L_{sn}}{M_s r_s \omega^2} - \frac{1}{M_s \omega^2} - \frac{\cos^2(\alpha_{sn})}{M_c \omega^2} \right) \sum_{n=1}^N \bar{k}_{sn} f(\bar{\delta}_{sn}) - \left(\frac{\mu \lambda_{sn} L_{sn}}{M_s r_s \omega} - \frac{1}{M_s \omega} - \frac{\cos^2(\alpha_{sn})}{M_c \omega} \right) \sum_{n=1}^N c_{sn} \dot{\bar{\delta}}_{sn} + \\ \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega} \sum_{n=1}^N c_{rn} \dot{\bar{\delta}}_{rn} - \left(\frac{\mu \lambda_{sn} L_{ns}}{M_n r_n \omega^2} - \frac{1}{M_s \omega^2} \right) \bar{k}_{sn} f(\bar{\delta}_{sn}) - \left(\frac{\mu \lambda_{sn} L_{ns}}{M_n r_n \omega} - \frac{1}{M_n \omega} \right) c_{sn} \dot{\bar{\delta}}_{sn} - \\ \left(\frac{1}{M_s \omega^2} - \frac{\mu \lambda_{rn} L_{nr}}{M_n r_n \omega^2} \right) \bar{k}_{rn} f(\bar{\delta}_{rn}) - \left(\frac{1}{M_n \omega} - \frac{\mu \lambda_{sn} L_{ns}}{M_n r_n \omega} \right) c_{rn} \dot{\bar{\delta}}_{rn} = \frac{T_{in}}{M_s r_s \omega^2 b_c} + \frac{T_{out} \cos(\alpha_{sn})}{M_c r_c \omega^2 b_c} + \ddot{e}_{sn} \\ \ddot{\bar{\delta}}_{rn} - \left(\frac{\mu \lambda_{rn} L_{rn}}{M_r r_r \omega^2} - \frac{1}{M_r \omega^2} - \frac{\cos^2(\alpha_{rn})}{M_c \omega^2} \right) \sum_{n=1}^N \bar{k}_{rn} f(\bar{\delta}_{rn}) - \left(\frac{\mu \lambda_{rn} L_{rn}}{M_r r_r \omega} - \frac{1}{M_r \omega} - \frac{\cos^2(\alpha_{rn})}{M_c \omega} \right) \sum_{n=1}^N c_{rn} \dot{\bar{\delta}}_{rn} + \\ \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega^2} \sum_{n=1}^N \bar{k}_{sn} f(\bar{\delta}_{sn}) + \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega} \sum_{n=1}^N c_{sn} \dot{\bar{\delta}}_{sn} - \left(\frac{1}{M_n \omega^2} - \frac{\mu \lambda_{sn} L_{ns}}{M_n r_n \omega^2} \right) \bar{k}_{sn} f(\bar{\delta}_{sn}) - \\ \left(\frac{1}{M_n \omega} - \frac{\mu \lambda_{sn} L_{ns}}{M_n r_n \omega} \right) c_{sn} \dot{\bar{\delta}}_{sn} - \left(\frac{\mu \lambda_{rn} L_{nr}}{M_n r_n \omega^2} - \frac{1}{M_n \omega^2} \right) \bar{k}_{rn} f(\bar{\delta}_{rn}) - \left(\frac{\mu \lambda_{rn} L_{nr}}{M_n r_n \omega} - \frac{1}{M_n \omega} \right) c_{rn} \dot{\bar{\delta}}_{rn} = \frac{T_{out} \cos(\alpha_{rn})}{M_c r_c \omega^2 b_c} + \ddot{e}_{rn} \end{cases} \quad (11)$$

在同样的条件下, 齿轮的齿侧间隙大体上符合正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 均值 μ 和 σ^2 方差根据齿侧间隙对系统的影响来决定. 取激励频率为 1, 齿侧间隙的范围为 $[0, 1.2]$. 生成齿侧间隙的分岔图和最大李雅普诺夫指数图.

从上述图中可以看出齿侧间隙在 $[0, 0.15]$ 区间里的时候, 系统为 1 周期运动, 所以确定 0.13 作

为随机齿侧间隙的均值. 使最大李雅普诺夫指数小于零的最大方差确定为随机齿侧间隙的方差, 把方差定为 0.01^2 .

2 系统的非线性动力学分析

激励频率是行星齿轮系统的振动输入, 本文分析采取减振降噪措施前后激励频率对系统的影响.

分岔图如图4所示.从图中可以看出在 $[0.01, 0.5]$ 、 $[2.74, 4]$ 区间内,系统为1周期运动. $[2.59, 2.74]$ 区间内,系统为2周期运动.其余区间内系统运动是混沌的.由于随机齿侧间隙的存在,系统在周期运动时存在波动.

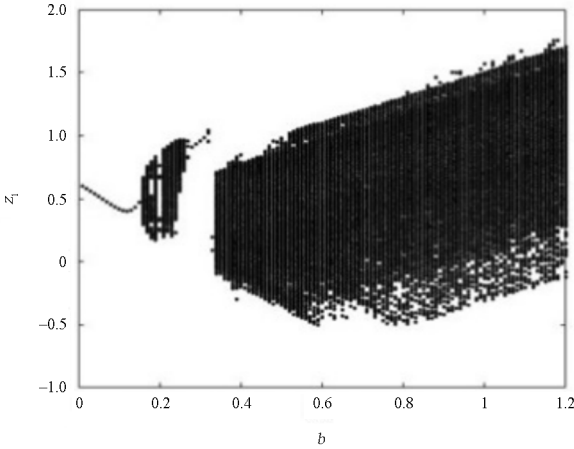


图2 系统关于齿侧间隙 b 的分岔图

Fig.2 Bifurcation diagram of the system with b

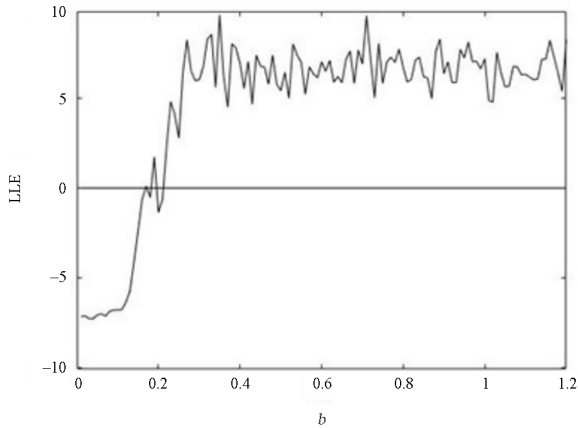


图3 系统关于齿侧间隙 b 的最大李亚普诺夫指数图

Fig.3 LLE diagram of the system with b

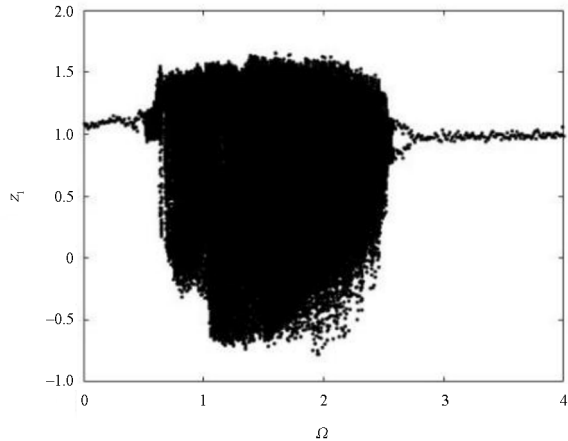


图4 系统随 Ω 变化的分岔图

Fig.4 Bifurcation diagram of the system with Ω

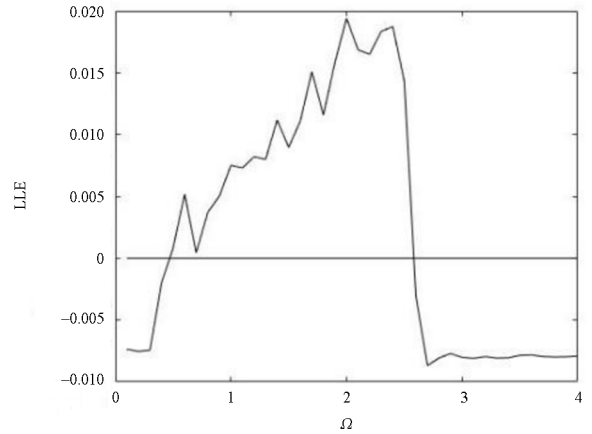


图5 系统随 Ω 变化的 LLE 图

Fig.5 LLE diagram of the system with Ω

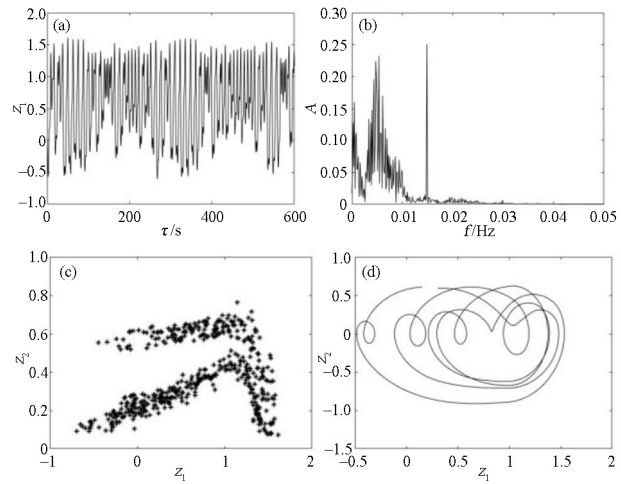


图6 $\Omega=1.5$ 时,系统的混沌运动:(a)时域响应;

(b)频谱图;(c)庞加莱截面图;(d)相图

Fig.6 Chaotic motion of system when $\Omega=1.5$:

(a) time course curve; (b) frequencys diagram;

(c) poincaré section; (d) phase diagram

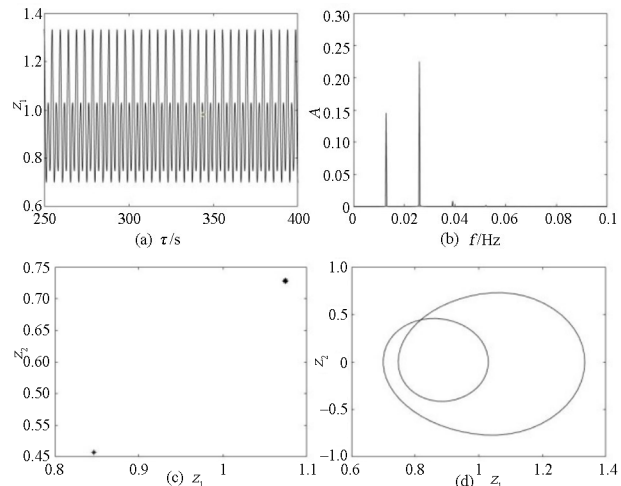


图7 $\Omega=2.62$ 时,系统的2周期运动:(a)时域响应;

(b)频谱图;(c)庞加莱截面图;(d)相图

Fig.7 2 periodic motion of system when $\Omega=2.62$:

(a) time course curve; (b) frequencys diagram;

(c) poincaré section; (d) phase diagram

选取几个典型的无量纲激励频率具体分析系统的运动特性.

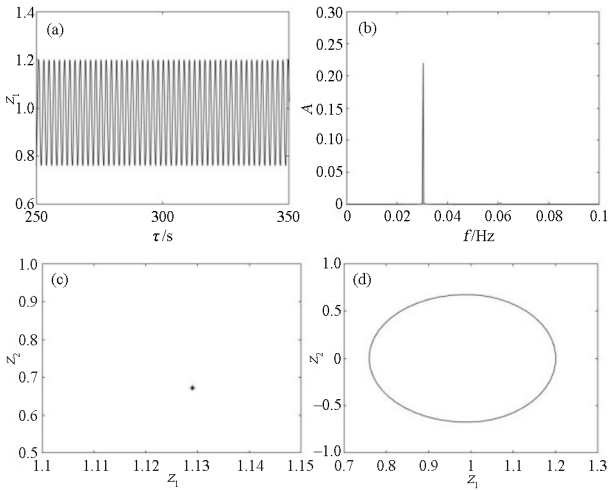


图 8 $\Omega=3.06$ 时,系统的 1 周期运动:(a) 时域响应;
(b) 频谱图;(c) 庞加莱截面图;(d) 相图
Fig.8 1 periodic motion of system when $\Omega=3.06$:
(a) time course curve; (b) frequencys diagram;
(c) poincaré section; (d) phase diagram

3 修形之后对系统的非线性动力学分析

齿轮修形根据不同的修改位置可分为齿廓修形和齿向修形,齿廓修形指对齿廓进行修改以解决齿轮的几何干涉问题,一般是削去齿顶或者齿根的一部分.齿向修形指修改轮齿的齿面.本文选择削去齿顶的齿廓修形方法,如图 9 所示.

齿廓修形的主要参数有修形量、修形长度和修形曲线.

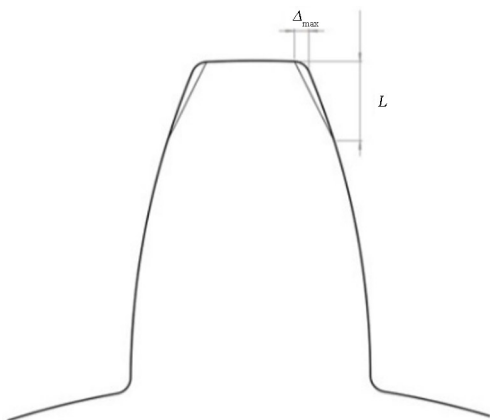


图 9 齿廓修形
Fig.9 Gear tooth profile modification

修形量通过齿轮的受载确定:

$$\begin{cases} \Delta_{\max} = \delta + \delta_t + \delta_m \\ \delta = \frac{F_t}{bC_r} \\ \delta_t = \pi m_n \cos\alpha \Delta_l r 10^3 \end{cases} \quad (12)$$

式中 δ 是齿轮受载导致的弹性变形量, δ_t 是温差

导致的变形量, δ_m 是制造误差, b 为齿宽, C_r 是弹性模量, m_n 为重合度, Δ_l 为温差, α 为压力角, r 为基圆半径. 修形长度是为了确定开始修形的位置, 本文选择长修形, 根据 Alecstokes 推荐公式长修形为 $1.2m_n$, 修形曲线是修形量由零变化到最大修形量的曲线, 本文选择直线修形. 修形主要影响系统的时变啮合刚度和传递误差, 根据修形之后的参数修改系统动力学方程.

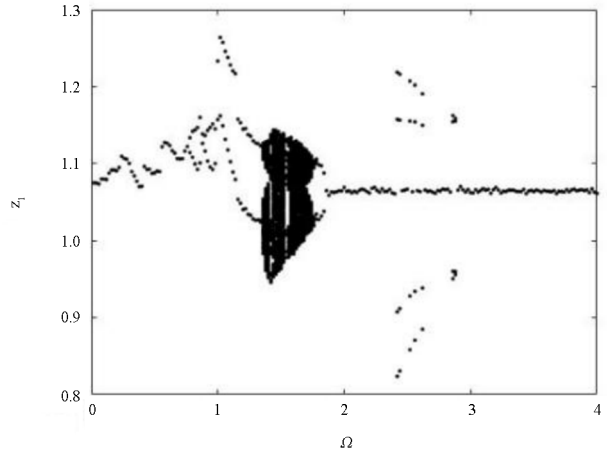


图 10 齿轮修形后系统随 Ω 变化的分岔图
Fig.10 Bifurcation diagram of the system with Ω after modify

以无量纲激励频率 Ω 为分岔参数, 得到的分岔图如图 10 所示. 和修形之前相比, 可以明显的看到, 混沌区减少, 周期运动区间增加.

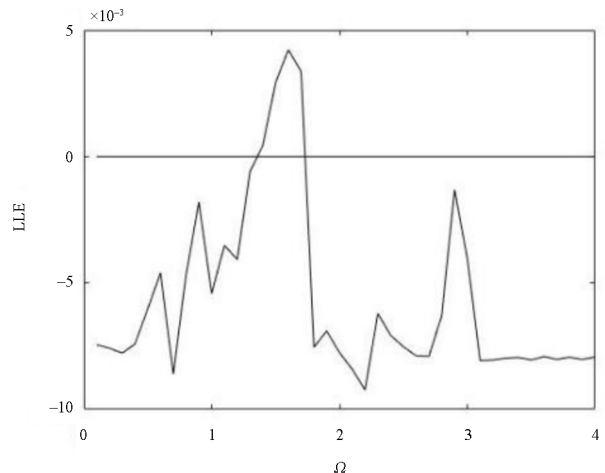


图 11 齿轮修形后系统随 Ω 变化的 LLE 图
Fig.11 LLE diagram of the system with Ω after modify

从图 11 中可以看出修形之后最大李雅普诺夫指数小于零的区域远远大于修形之前, 并且其最大值相比也有很大的减小.

选取几个典型的激励频率, 比较相同运动时,

系统的振动特性.

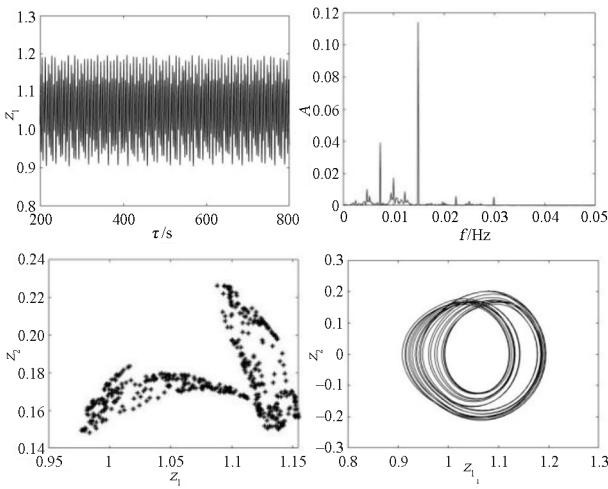


图 12 $\Omega = 1.5$ 时,系统的混沌运动:(a)时域响应;
(b)频谱图;(c)庞加莱截面图;(d)相图
Fig.12 Chaotic motion of system when $\Omega = 1.5$;
(a) Time course curve; (b) Frequencys diagram;
(c) Poincaré section; (d) Phase diagram

当激励频率为 1.5 时,系统运动表现为混沌运动,和修形之前的混沌运动相比,庞加莱截面图中点所占的区域数值减小,频谱图中幅值以及背景噪声相比之前有明显的减少.时域响应图中的振动位移范围以及幅值都有减小,并且振动有规律性.相图中相线所围成的面积也有减小.

和同样是 2 周期运动时相比较,频谱图中可以看出修形之后系统不论是主频还是分频处的幅值都要小于之前.时域响应中的振动位移范围和相图中相线所围成的面积也要小于修形之前.

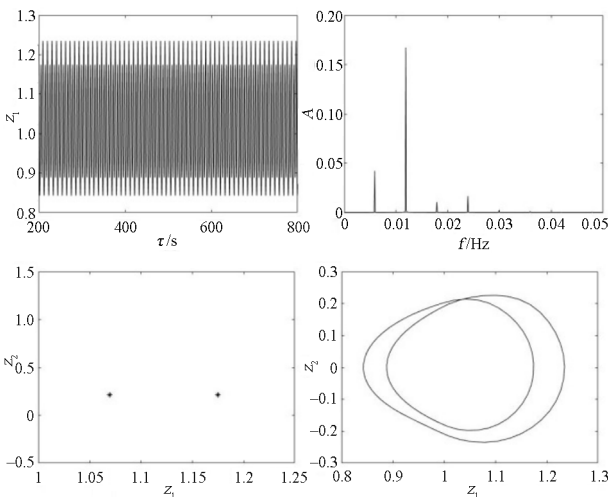


图 13 $\Omega = 1.2$ 时,系统的 2 周期运动:(a)时域响应;
(b)频谱图;(c)庞加莱截面图;(d)相图
Fig.13 2 periodic motion of system when $\Omega = 1.2$;
(a) poincaré section (b) frequencys diagram;
(c) time course curve; (d) phase diagram

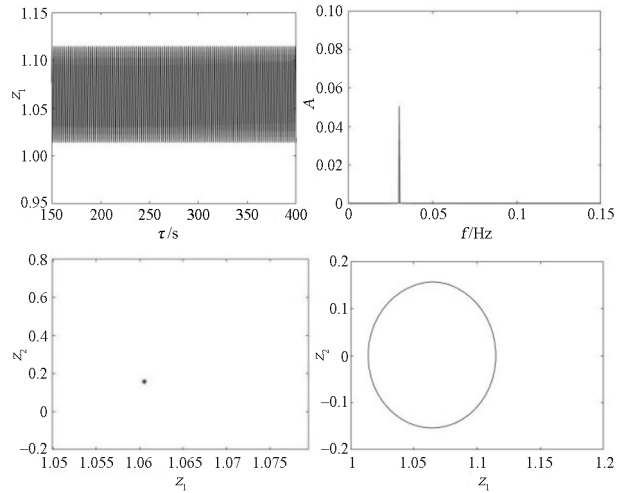


图 14 $\Omega = 3.06$ 时,系统的 1 周期运动:(a)时域响应;
(b)频谱图;(c)庞加莱截面图;(d)相图
Fig.14 1 periodic motion of system when $\Omega = 3.06$;
(a) time course curve; (b) frequencys diagram;
(c) poincaré section; (d) phase diagram

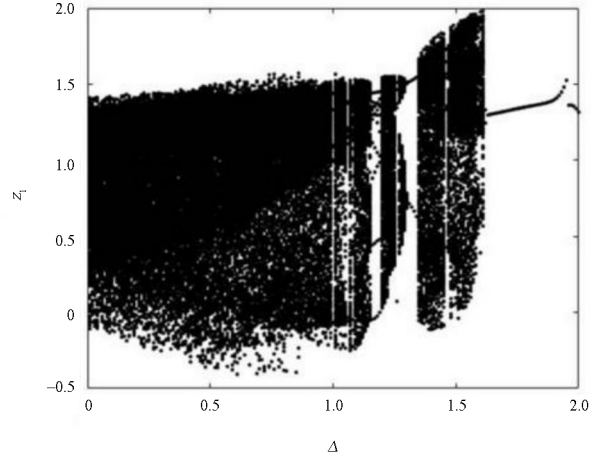


图 15 系统随 Δ 变化的分岔图
Fig.15 Bifurcation diagram of the system with Δ

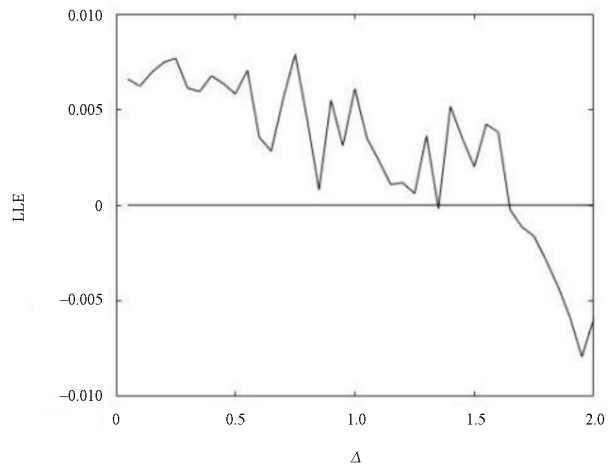


图 16 系统随 Δ 变化的 LLE 图
Fig.16 LLE diagram of the system with Δ

比较相同激励频率下系统的表现,也能体现修形对齿轮系统振动的抑制作用.不论是频谱图中的

振幅、时域响应中的振动位移范围还是相线所围成的面积都要小于修形之前。

以修形量为分析参数得到相应的分岔图和LLE图。从图15中可以看出随着修形量的增大,系统在 $[1.31, 1.34]$ 区间短暂地进入一段2周期运动时期,然后在1.63处由混沌运动变为周期运动。从图16中也能看到这一点。

选择1.7作为最大修形量分析齿侧间隙对系统的影响,得到关于齿侧间隙的分岔图和LLE图,如图17所示。

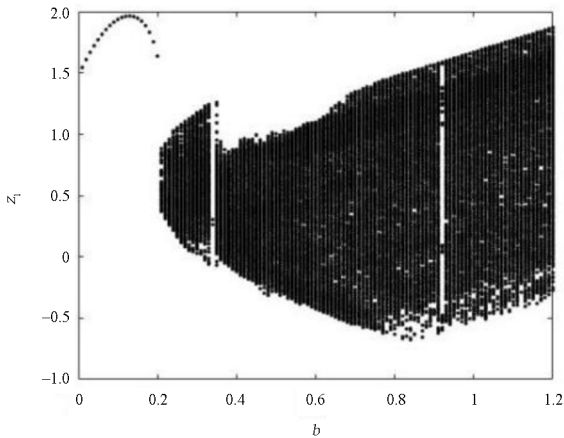


图17 系统随侧隙 b 变化的分岔图

Fig.17 Bifurcation diagram of the system with b

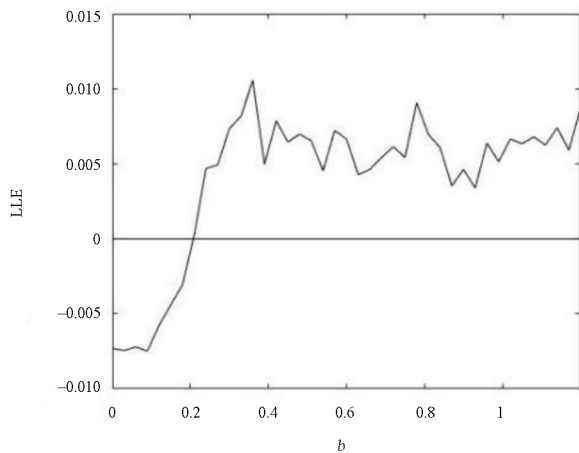


图18 系统随侧隙 b 变化的LLE图

Fig.18 LLE diagram of the system with b

对比之前修形量下齿侧间隙对系统的影响,从上述增大了修形量再对齿侧间隙进行分析可以看出,不同修形量下齿侧间隙对系统的影响不大,都在0.2附近进入混沌运动阶段。

4 结论

通过构建包括时变啮合刚度、摩擦、传递误差

和齿侧间隙的行星齿轮系统模型,使用非线性分析方法分析修形之后行星齿轮系统的运动特性,在分岔图中可以看出相比于修形之前系统处于混沌运动的区间有明显的减小。而在具体分析时,不论是混沌运动还是周期运动,在庞加莱截面图、频谱图、时域响应图和相图中的振动数据都有减小。

参考文献

- [1] 雷刚,王虎银,刘子谦,等.变速器齿轮微观修形对振动响应的影响研究[J].重庆理工大学学报(自然科学),2022,36(3):86-94.
LEI G, WANG H Y, LIU Z Q, et al. Study on the influence of micro modification of transmission gear on vibration response [J] Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science) 2022, 36(3): 86-94. (in Chinese)
- [2] 王靖岳,刘宁,王浩天.干摩擦对行星齿轮传动系统分岔特性的影响分析[J].科学技术与工程,2020,20(22):8964-8969.
WANG J Y, LIU N, WANG H T. Influence of dry friction on bifurcation characteristics of planetary gear transmission system [J] Science Technology and Engineering, 2020, 20(22): 8964-8969. (in Chinese)
- [3] 王靖岳,刘宁,王浩天.基于最大Lyapunov指数的行星齿轮传动系统混沌特性分析[J].动力学与控制学报,2021,19(1):29-36.
WANG J Y, LIU N, WANG H T. Chaos analysis of planetary gear transmission system based on largest lyapunov exponent [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(1): 29-36. (in Chinese)
- [4] 万志国,窦益华,张明泉,等.齿轮系统动力学模型内部激励参数的优化设置研究[J].机械设计与制造,2021,1(3):101-105.
WAN Z G, DOU Y H, ZHANG M Q, et al. The research on optimization settings of internal excitation parameters of gear system dynamic model [J]. Machinery Design Manufacture, 2021, 1(3): 101-105. (in Chinese)
- [5] 张文,谢建华,李高磊,等.单自由度齿轮系统的混沌控制[J].动力学与控制学报,2021,19(4):1-7.
ZHANG W, XIE J H, LI G L, et al. Chaos control of a single degree of freedom gear system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 1-7. (in Chinese)

- [6] 袁哲. 齿轮振动可靠性与修形减振策略研究 [D]. 沈阳: 东北大学, 2010.
YUAN Z. Research on gear vibration reliability and shape modification damping strategy [D]. Shenyang: Northeastern University, 2010. (in Chinese)
- [7] WANG J, LIM T C, LI M. Dynamics of a hypoid gear pair considering the effects of time-varying mesh parameters and backlash nonlinearity [J]. Journal of Sound Vibration, 2007, 308(1-2): 302-329.
- [8] 陆同兴, 张季谦. 非线性物理概论 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.
LU T X, ZHANG J Q. Introduction to nonlinear physics [M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 2010. (in Chinese)
- [9] 韩国胜. 基于非线性动力学响应的行星齿轮修形研究 [D]. 广州: 华南理工大学, 2021.
HAN G S. A study on tooth profile modification of planetary gears based on nonlinear dynamic response [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2021. (in Chinese)
- [10] 王文龙, 王士军, 王鑫兴, 等. 基于刚柔耦合的行星齿轮减速器减振降噪研究 [J]. 现代制造工程, 2022, 1(2): 79-85.
WANG W L, WANG S J, WANG X X, et al. Research on vibration and noise reduction of planetary gear reducer based on rigid-flexible coupling [J]. Modern Manufacturing Engineering, 2022, 1(2): 79-85. (in Chinese)