

# 索—梁耦合结构的分岔反控制研究<sup>\*</sup>

王志攀<sup>†</sup>

(中南林业科技大学 土木工程学院,长沙 410004)

**摘要** 斜拉索是斜拉桥主要的支撑单元,是斜拉桥的重要组成部分.本文研究了控制增益参数  $G$  对索—梁耦合结构的振动控制.利用文献已得到的索—梁耦合结构的面内非线性运动微分方程,根据离散法,对其进行分离变量法处理,进而得到索—梁耦合结构的单自由度和两自由度模态方程.不同于以往的研究,本文假设索(梁)的左支撑点即坐标原点处是可以沿纵向方向自由移动的,则索的动态应变会发生变化,进而改变其模态方程一次项系数,通过这一规律可以在理论上转换得到一套状态控制反馈准则,并根据 Floquet 稳定性理论,将上述方程转换为 Hill 方程形式.然后通过摄动法,得到运动微分方程的稳定解.最后对索—梁耦合结构的单自由度和两自由度系统进行了数值分析计算,通过改变反馈控制增益系数,可以实现系统的反控制.而设计者可以通过这些复杂现象的参数变化范围设计选择合适的参数,尽量使得系统能在工程师所能控制的安全范围内振动.这种控制策略保持了系统的平衡,并且可以应用于在期望位置处具有最优稳定性的退化倍周期分岔.研究表明,无论结构是单自由度还是两自由度系统,反馈控制增益系数的变化能明显有效地改变系统的共振情形下的幅值.通过适当调整控制参数,能在预先指定的参数位置创建原系统的稳定倍周期运动,并能改变倍周期运动的范围.研究发现,控制增益参数  $G$  的常数项和一次项都对索—梁耦合系统的控制起着重要作用,说明假定的状态控制反馈准则在理论上具有一定的参考性.

**关键词** 索—梁耦合结构, 离散法, 反馈控制器, 倍周期分岔

**中图分类号**:O322;TH113

**文献标志码**:A

## Study on Bifurcation Inverse Control of Cable-Stayed Beam<sup>\*</sup>

Wang Zhiqian<sup>†</sup>

(College of Civil Engineering, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)

**Abstract** Cable is the main supporting element of cable-stayed bridge and an important part of cable-stayed bridge. In this paper, the vibration control of cable beam coupling structure with control gain parameter  $G$  is studied. The nonlinear in-plane differential equations of motion of cable beam coupled structures obtained in the literature are used. According to the discrete method, they are treated by the method of separation of variables, and then the single degree of freedom and two degree of freedom modal equations of cable beam coupled structures are obtained. Different from previous studies, this paper assumes that the left support point of the cable (beam), namely the origin of the coordinate, can move freely along the longitudinal direction, and then the dynamic strain of the cable will change, thereby changing the primary coefficient of its modal equation. Through this rule, a set of state control feedback criteria can be obtained in theory, and according to Floquet stability theory, the above equation can be converted into Hill equation form. Then the stable solution of the differential equation of motion is ob-

tained by perturbation method. Finally, numerical analysis and calculation are carried out for the single degree of freedom and two degree of freedom systems of cable beam coupling structure. By changing the feedback control gain coefficient, the inverse control of the system can be achieved. The designer can select appropriate parameters through the parameter variation range design of these complex phenomena, so that the system can vibrate within the safe range controlled by the engineer as far as possible. This control strategy maintains the balance of the system and can be applied to degenerate period doubling bifurcation with optimal stability at the desired position. The research shows that whether the structure is a single degree of freedom system or a two degree of freedom system, the change of the feedback control gain coefficient can effectively change the amplitude of the system in the case of resonance. By properly adjusting the control parameters, a stable period doubling motion of the original system can be created at the preset parameter positions, and the range of period doubling motion can be changed. The conclusion shows that both the constant term and the primary term of the control gain parameter  $G$  play an important role in the control of the system. It shows that the assumed state control feedback criterion is of certain referential value in theory.

**Key words** cable-stayed beam, discrete method, feedback controller, period doubling bifurcation

## 引言

斜拉索具有刚度小、阻尼小、质量小的特点,即使在微小的外激励作用下也极易发生大幅值振动,随着斜拉桥技术的迅猛发展,其跨径日益增长,斜拉索的长度也持续增大,使其更易产生大幅值的参数共振,而半主动控制是目前应用于斜拉索参数振动的热门控制方式,因此对其振动响应的控制研究已成为相关领域研究人员关注的热点问题.另外,由于索-梁耦合模型在动力学行为上的某些特殊性,使得非线性耦合项在其力学性能中起着重要作用<sup>[1]</sup>.基于上述原因,一些平时关注较少的非线性现象也应得到研究者的重视<sup>[2]</sup>.值得注意的是,根据以往的研究,当远离共振时,索-梁耦合结构并不是绝对安全的<sup>[2,3]</sup>,因此,弹性柔性结构依旧要引起研究者的重点关注,复杂的非线性现象也可能发生在远离共振的区域<sup>[4,5]</sup>.如果研究人员重视这些以往并没有关注的动力学现象,设计者可以通过这些复杂现象的参数变化范围设计选择合适的参数,尽量使系统在工程师所能控制的安全范围内振动<sup>[6,7]</sup>.

分岔控制是指设计一个控制器来抑制或减少给定非线性系统的某些现有的分岔动力学现象,从而获得一些理想的动力学行为<sup>[8,9]</sup>.与直接控制相反,分岔反控制是指通过适当的参数控制,在具有首选特性的期望位置创建特定分岔<sup>[10]</sup>.在不改变原

有系统周期解的情况下,研究者将在原微分系统中应用反馈控制方法来推导原差分系统的控制增益,并在实际实施过程中实现系统的反控制<sup>[11,12]</sup>.这种控制策略不仅保持了系统的平衡结构,并且可以应用于在期望位置处具有最优稳定性的退化倍周期分岔<sup>[13,14]</sup>.研究表明,通过适当地调整控制参数,能在预先指定的参数位置处,创建研究者需要的原系统的稳定倍周期运动<sup>[15]</sup>.

与已有文献研究不同,本文假定索(梁)的左支撑点(即坐标原点)安装于滑轨上,是可以沿纵向方向自由移动.索(梁)的左支撑点的自由移动会导致索-梁连接点处连接条件发生变化,改变索的动应变的常数项.根据分离变量法可以知道,索的动应变里的常数项与模态函数一次项  $q$  前面系数有关联.作者尝试将索(梁)的左支撑点沿纵向方向的自由移动,在理论上转换为一套状态控制反馈准则,进而对结构进行振动控制.本文在分岔反控制方面的工作是基于以下观察结果,即在某些应用中,向很小的分支引入新的分支可能是有利的系统输出,而系统的分岔特性可以通过各种反馈控制方法进行修正.因此使用反馈控制方法的好处是,开环系统的所有平衡点都得到了保留.

## 1 索-梁耦合结构分岔反控制研究

### 1.1 索-梁耦合结构模型

本文以斜拉索与 Bernoulli-Euler 梁组成的耦

合系统作为简化的研究模型,根据模型可以做出如下假设:

(1)不计索的抗弯刚度及抗剪刚度;(2)近似认为索的重力垂度曲线是抛物线;(3)索的轴向应变足够小;(4)索的变形本构关系服从虎克定律且各点受力均匀;(5)索只承受拉力作用.图1为索-梁组合结构模型,图中实线表示索-梁组合结构的动态构型.斜拉索与梁在一端铰接,坐标原点位于索(梁)的左支撑点.

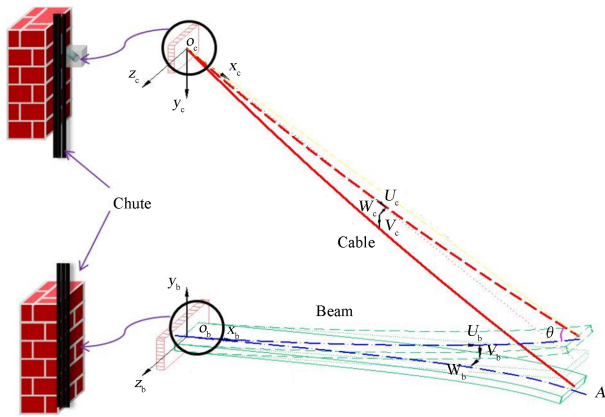


图1 静态构型下索-梁结构模型

Fig.1 The cable-stayed beam structure model under static and dynamic configuration

## 1.2 索-梁耦合结构分岔反控制

索和梁的运动微分方程可以由 Hamilton 变分原理推导得到,具体公式推导见文献[2].通过 Galerkin 离散,可以将索-梁结构面内位移表示成状态空间函数形式.假设位移函数可以表示为:

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^n q_m(t) \gamma_m(x) \quad (1)$$

其中对于第  $m$  阶模态,  $\gamma_m = (\varphi_c(x), \varphi_b(x))^T$ , 可以得到一系列常微分方程,则结构第  $m$  阶面内运动微分方程为如下形式:

$$\ddot{q}_m - \mu \dot{q}_m + q_m + C_2 q_m^2 + C_3 q_m^3 = P \cos(ct) \quad (2)$$

其中,  $C_2$ 、 $C_3$  表达式见文献[2, 10].假定索(梁)的左支撑点即坐标原点处安装于滑槽上(相当于可动铰支座),可以沿纵向方向自由移动,索(梁)的左支撑点如图1放大处理所示.因此假设索(梁)的左支撑点在  $t$  时刻的纵向位移为  $z(t)$ .

索(梁)的左支撑点的自由移动,导致索-梁连接点处的连接条件发生了改变,影响了索的动应变

表达式,即索的动应变的常数项发生了改变,而索的动应变里的常数项恰好体现在索的运动方程频率项中,根据分离变量法,在将其运动微分方程转换为状态变量方程时,索的动应变里的常数项体现在模态函数一次项  $q$  前面系数中.我们将转化后其引起的模态函数一次项前面的系数变化定义为  $G$ ,即能完全反映索(梁)的左支撑点沿纵向方向自由移动对结构振动的影响.因此状态控制反馈准则可以假设为如下形式:

$$Y = Gq \quad (3)$$

其中  $G$  为反馈增益系数,为便于后续数值分析,将增益系数进行多项式展开,假设  $G = \alpha_{vl} + \alpha_{vq}x$ .索-梁耦合结构的面内运动方程可以写为如下形式:

$$\ddot{q} - \mu \dot{q} + (1+G)q + C_2 q^2 + C_3 q^3 = P \cos(ct + \varphi) \quad (4)$$

根据上述假设,由于索(梁)的左支撑点可以沿纵向方向自由移动,则模态函数可以改写为:

$$q(t) = a \cos(\omega t) + z(t) \quad (5)$$

将方程(5)代入公式(4),且忽略高阶小量,可以得到如下方程:

$$\ddot{z} - \mu \dot{z} + z \left[ \frac{3C_3 a^2 + 2}{2}(1+G) + \frac{3C_3 a^2}{2} \cos 2\omega t \right] = 0 \quad (6)$$

根据 Floquet 稳定性理论,方程(6)可以转换为 Hill 方程形式:

$$\ddot{x} + p(t)x = 0 \quad (7)$$

其中

$$p(t) = \frac{1}{4} \left[ (6C_3 a^2 + 4)(1+G) - (\mu + G)^2 + 6C_3 a^2 \cos 2\omega t \right]$$

将  $T = \omega t$  代入公式(7),方程可以写为 Mathieu 方程形式:

$$\ddot{x} + (\delta' + 2o \cos 2\omega t)x = 0 \quad (8)$$

其中

$$\delta' = \frac{(6C_3 a^2 + 4) - (\mu + G)^2}{4\omega^2}, \quad o = \frac{3C_3 a^2}{4\omega^2}$$

根据多尺度法,可以将方程中的参数  $\delta'$ 、 $o$  进行摄动展开,展开式如下:

$$x(t, o) = x_0(t) + o x_1(t) + o^2 x_2(t) + \dots \\ \delta' = \delta_0 + o \delta_1 + o^2 \delta_2 + \dots \quad (9)$$

将上述展开式代入公式(8),并令等式两边系数相等,可以得到如下系列等式:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + \delta_0 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \delta_0 x_1 &= -\delta_1 x_0 - 2x_0 \cos 2t \\ \ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 &= -\delta_2 x_0 - 2x_2 \cos 2t - \delta_1 x_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (10)$$

令  $\delta_0 = n^2, (n=1, 2, \dots)$ , 上述第一个方程的周期解为:

$$x_0 = a \cos nt + b \sin nt \quad (11)$$

假设  $\delta_0 = 1$ , 并将上述方程代入方程, 方程组的第二项可以通过计算得到, 即:  $x_1 = (1/8)b \sin 3t$ . 将上述解代入摄动方程(10), 则摄动方程可以改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 &= -a(\delta_2 + \frac{1}{8}) \cos t + \\ &\frac{1}{8} a \cos 3t - \frac{1}{8} a \cos 5t \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \delta_0 x_2 &= -b(\delta_2 + \frac{1}{8}) \cos t - \\ &\frac{1}{8} a \cos 3t - \frac{1}{8} a \cos 5t \end{aligned} \quad (13)$$

令  $\delta_2 = -1/8$ , 则其相应的边界可以改写为:  $\delta' = 1 - o - \frac{1}{8}o^2 + O(o^3)$

$$\delta' = 1 + o - \frac{1}{8}o^2 + O(o^3) \quad (14)$$

而上述边界条件对应的位移解为:

$$x_1 = a(\cos t + \frac{1}{8}o \cos 3t) + O(o^2) \quad (15)$$

$$x_2 = a(\sin t + \frac{1}{8}o \sin 3t) + O(o^2) \quad (16)$$

$o$  的高阶小量可以忽略, 将公式(15)、(16)代入摄动方程, 可以得到系统的第一次倍周期分岔的范围:

$$\sqrt{\omega_1^0} < \omega < \sqrt{\omega_2^0} \quad (17)$$

其中

$$\omega_1^0 = \frac{(\mu + G)^2 [4 - (\mu + G)^2]}{8(\mu + G)^2} + R$$

$$R = \frac{\sqrt{(\mu + G)^4 + 48(\mu + G)^2 P^2 \sin^2 \varphi}}{8(\mu + G)^2}$$

$$\omega_2^0 = \frac{(\mu + G)^2 [4 - (\mu + G)^2]}{8(\mu + G)^2} + T$$

$$T = \frac{\sqrt{(\mu + G)^4 [4 - (\mu + G)^2] + 144(\mu + G)^2 P^2 \sin^2 \varphi}}{8(\mu + G)^2} \quad (18)$$

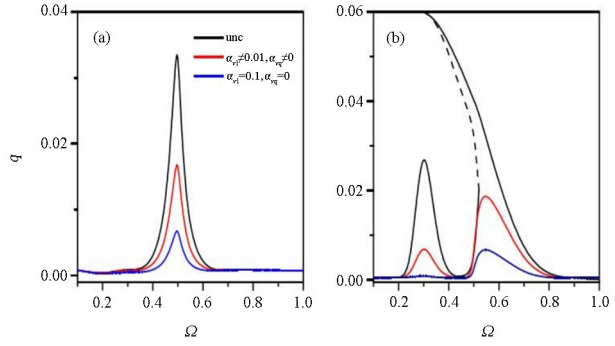


图 2 索-梁耦合结构在反馈控制器作用下的共振控制  
Fig.2 Resonance control of cable-stayed beam under feedback controller

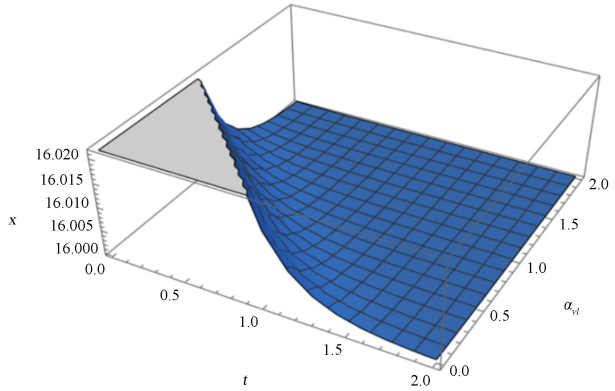


图 3 索-梁耦合结构在反馈控制器作用下的位移曲线  
 $t \in (1.2), \alpha_{vl} \in (0, 2), \alpha_{vq} = 0$

Fig.3 Displacement curves of cable-stayed beam under the action of feedback controller,  $t \in (1.2), \alpha_{vl} \in (0, 2), \alpha_{vq} = 0$

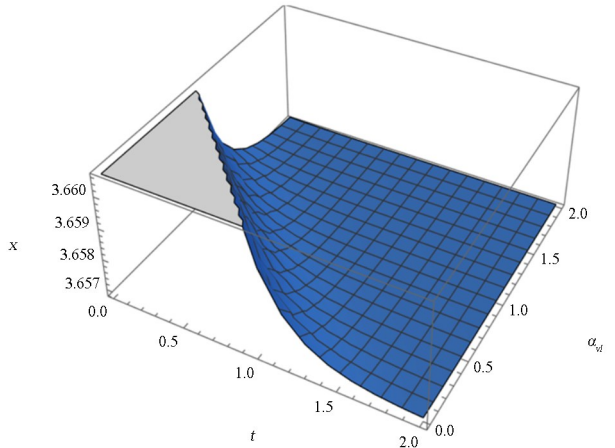


图 4 索-梁耦合结构在反馈控制器作用下的位移曲线  
 $t \in (1.2), \alpha_{vl} \in (0, 2), \alpha_{vq} = 10$ .

Fig.4 Displacement curves of cable-stayed beam under the action of feedback controller,  $t \in (1.2), \alpha_{vl} \in (0, 2), \alpha_{vq} = 10$ .

结构参数数值: 索的横截面积  $A_c = 6.273 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ , 外端索的单位长度质量  $m_c = 51.8 \text{ kg/m}$ , 杨氏模量  $E_c = 195 \text{ GPa}$ , 梁的结构参数如下: 杨氏模量  $E_b = 34.5 \text{ GPa}$ , 单位长度质量  $m_b = 4.4 \times 10^4 \text{ kg/m}$ , 面内、外惯性矩分别为  $I_{byy} = 9.8 \text{ m}^4$  和  $I_{bzz} = 10.0 \text{ m}^4$ . 图 2



为索—梁耦合结构在反馈控制器作用下的共振控制,根据图形发现,无论结构是单自由度还是两自由度,反馈控制增益系数的变化能明显有效改变系统共振情形下的幅值。

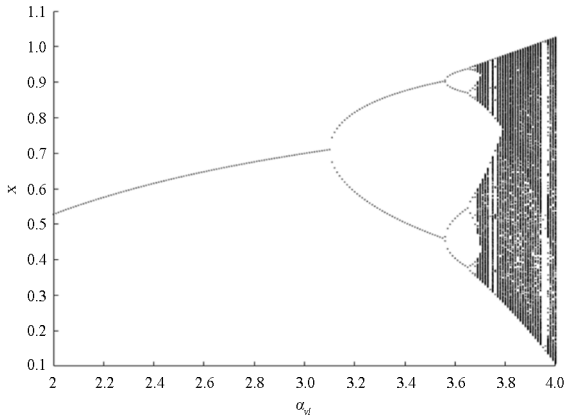


图5 索—梁耦合结构在反馈控制器作用下的倍周期分岔曲线,  $\alpha_{vl} \in (2, 4), \alpha_{vq} = 0$

Fig.5 Period doubling bifurcation curves of cable-stayed beam under feedback controller,  $\alpha_{vl} \in (2, 4), \alpha_{vq} = 0$

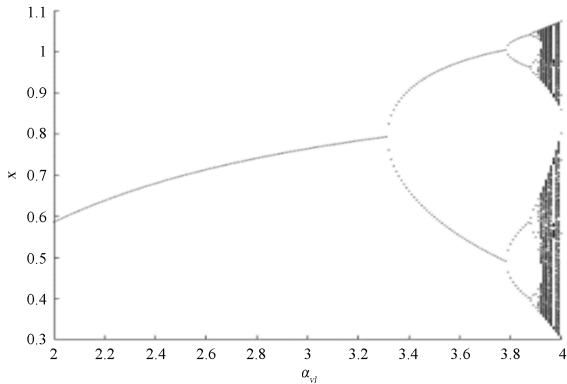


图6 索—梁耦合结构在反馈控制器作用下的倍周期分岔曲线,  $\alpha_{vl} \in (2, 4), \alpha_{vq} = 1$

Fig.6 Period doubling bifurcation curves of cable-stayed beam under feedback controller,  $\alpha_{vl} \in (2, 4), \alpha_{vq} = 1$

图3、图4为索—梁耦合结构在三维参数范围的反馈控制器作用下的位移曲线。纵坐标为结构模态振幅,图形的另外两个参数变量为 $t$ ,且参数变量的变化范围保持一定,由于结构模态方程在已有文献中已做无量纲化处理,当增益系数 $G$ 的常数项范围保持不变,而其一次项的控制增益系数分别取不同数值时,从图形可以明显看出振幅曲线幅值得到了较好控制,因此增益系数 $G$ 的一次项系数对振幅的控制有重要作用。

图5、图6为索—梁耦合结构在不同参数范围的反馈控制器作用下的倍周期分岔曲线,增益控制

参数 $G$ 的一次项系数不变时,通过调节增益参数常数项的范围,可以较明显地改变第一次倍周期分岔的范围。

因此,根据图3~图6,可以得出结论:控制增益参数 $G$ 的常数项和一次项都对系统的控制起着重要作用。

## 2 结论

本文利用文献已得到的索—梁耦合结构的内非线性运动微分方程,根据离散法对其进行分离变量法处理,进而得到索—梁耦合结构的单自由度和两自由度模态方程。假设索(梁)的左支撑点即坐标原点处可以沿纵向方向自由移动,导致索的动态应变公式中的常数项发生了变化,进而改变了其模态方程的一次项系数,根据这一规律,在理论上转换得到了一套状态控制反馈准则,并能实现系统的反控制。这种控制策略保持了系统的平衡结构,并且可以应用于在期望位置处具有最优稳定性的退化倍周期分岔。研究表明,通过适当调整控制参数,能在预先指定的参数位置创建原系统的稳定倍周期运动,并且无论结构是单自由度系统还是两自由度系统,反馈控制增益参数常数项和一次项的变化能明显有效地改变系统在共振情形下的幅值。

## 参考文献

- [1] 康厚军,郭铁丁,赵跃宇.大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J].力学学报,2016,48(3): 519-535.  
KANG H J, Guo T D, Zhao Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 519-535. (in Chinese)
- [2] 王志攀.索梁组合体系的振动研究[D].长沙:湖南大学,2001.  
WANG Z Q. The vibration research of the cable-stayed beam systems [D]. Changsha: Hunan University, 2014. (in Chinese)
- [3] 陶鸿飞,崔升.压电智能结构的主动控制及压电执行器布局优化[J].动力学与控制学报,2019,17(3): 234-243.  
TAO H F, CUI S. Active control of piezoelectric structures and optimal placement of piezoelectric ac-

- tuators [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(3):234-243.(in Chinese)
- [4] 郎君,申永军,杨绍普.半主动控制接地式动力吸振器参数优化及性能比较 [J]. *动力学与控制学报*, 2019, 17(2):168-177.
- LANG J, SHEN Y J, YANG S P. Parameter optimization and performance comparison of semi-active ground-hook control dvas [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(2):168-177.(in Chinese)
- [5] 汪正兴,任文敏,陈开利.斜拉索杠杆质量减振器的减振分析 [J]. *工程力学*, 2007(11):153-157.
- WANG Z X, REN W M, CHEN K L. Analysis of vibration reduction of cable-stayed lever mass damper [J]. *Engineering Mechanics*, 2007(11):153-157.(in Chinese)
- [6] WANG W X, HUA X G, WANG X Y, et al. Mechanical behavior of magnetorheological dampers after long-term operation in a cable vibration controls system [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26:e2280.
- [7] PENG J, XIANG M J, WANG L H, et al. Nonlinear primary resonance in vibration control of cable-stayed beam with time delay feedback [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 137:106488.
- [8] 彭剑,李禄欣,胡霞,等.时滞影响下受控斜拉索的参数振动稳定性 [J]. *应用数学和力学*, 2017, 38(2):181-188.
- PENG J, LI L X, HU X, et al. Parametric vibration stability of controlled stay cables with time delays [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 38(2):181-188.(in Chinese)
- [9] 李扬,谭霞,丁虎,等.两端带有弹簧支撑的轴向运动梁振动分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2019(4):45-50.
- LI Y, TAN X, DING H, et al. Nonlinear transverse vibration of an axially moving beam with vertical spring boundary [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019(4):45-50.(in Chinese)
- [10] WANG Z Q, YI Z, LUO Y. Energy-based formulation for nonlinear normal modes in cable-stayed beam [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 264:176-186.
- [11] 莫帅.汽车荷载作用下弹性支承梁桥的动力响应分析 [D].广州:暨南大学, 2014.
- MO S. Dynamic response of elastic support bridge due to moving vehicles [D]. Guangzhou: Jinan University, 2014.(in Chinese)
- [12] ZHANG X, XU J, JI J. Modelling and tuning for a time-delayed vibration absorber with friction [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 424:137-157.
- [13] DING H, JI J C, CHEN L Q. Nonlinear vibration isolation for fluid-conveying pipes using quasi-zero stiffness characteristics [J]. *Mechanical System and Signal Processing*, 2019, 121:675-688.
- [14] TAN X, DING H, SUN J Q, et al. Primary and super-harmonic resonances of Timoshenko pipes conveying high speed fluid [J]. *Ocean Engineering*, 2020, 203:107258.
- [15] SUN L M, HONG D X, CHEN L. Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation [J]. *Engineering Structures*, 2017, 151(15):57-67.