

# 多跨下承式拱桥面内全局动力学理论与自由振动研究\*

康厚军<sup>1,2†</sup> 邓力铭<sup>1,2</sup> 丛云跃<sup>1,2</sup>

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004)

(2. 广西大学 工程力学研究中心, 南宁 530004)

**摘要** 为弥补高维工程结构有限元分析对结构参数优化设计等的局限, 本文基于欧拉伯努利梁理论与传递矩阵法, 研究大跨度拱桥面内自由振动问题. 首先, 基于多跨拱桥的刚度分析, 建立系统的全局动力学模型. 其次, 基于传递矩阵法建立系统的全局动力学理论, 最后, 以一座四跨下承式拱桥的平面力学模型, 求解其面内自由振动时的固有频率与振型, 并将所得结果与用同样参数建模的有限元分析结果对比, 证明本文所建理论对求解该类问题的有效性与精确性. 此外, 通过整桥各跨矢跨比、吊杆截面面积、拱肋惯性矩等的多组参数组合分析了该系统面内自振频率的分布规律. 结果表明: 随着拱桥矢高增大, 系统固有频率减小, 因拱桥质量的快速增加, 对整桥面内刚度影响显著; 增大吊杆截面面积可在一定程度内增大拱桥的面内刚度, 导致系统频率在一定范围内增大, 且观察到 Veering 现象.

**关键词** 下承式拱桥, 传递矩阵法, 面内自由振动, 频率, 振型

中图分类号: O327

文献标志码: A

## Study on In-Plane Global Dynamic Theory and Free Vibration of Multi Span Through Arch Bridge\*

Kang Houjun<sup>1,2†</sup> Deng Liming<sup>1,2</sup> Cong Yunyue<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

(2. Scientific Research Center of Engineering Mechanics, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** To make up for the limitations of high-dimensional engineering structure finite element analysis in structural parameter optimization design, this paper studies the in-plane free vibration of long-span arch bridges based on Euler Bernoulli beam theory and transfer matrix method. Firstly, based on the stiffness analysis of multi span arch bridge, the global dynamic model of the system is established. Secondly, the global dynamic theory of the system is established based on the transfer matrix method. Finally, the natural frequency and vibration mode of a four span through arch bridge are solved by using the plane mechanical model, and the results are compared with the finite element analysis results modeled with the same parameters, which proves the effectiveness and accuracy of the theory established in this paper for solving this kind of problems. In addition, by changing the rise span ratio of each span of the whole bridge, the sectional area of suspenders and the moment of inertia of arch ribs, the variation trend of the natural vibration frequency in the plane of the system is analyzed. The results show that with the increase of the rise height of the arch bridge, the natural frequency of the system decreases, and the

rapid increase of the quality of the arch bridge has a significant impact on the stiffness of the whole bridge deck; Increasing the cross-sectional area of the suspender can increase the in-plane stiffness of the arch bridge to a certain extent, resulting in the increase of the system frequency within a certain range, and the veering phenomenon is observed.

**Key words** through arch bridge, transfer matrix method, planar free vibration, frequency, mode shape

## 引言

拱作为一种常见结构形式,因其拥有良好的力学特性和优美的造型,在土木工程、机械工程和航空航天工程等领域中得到了广泛应用.拱桥在建成运营中,除承受自身静载作用外,人群、车辆、风及地震作用等也会使得桥梁产生振动,此时结构实际内力高于结构体系按静力计算得出的内力,即存在动内力,易使构件发生局部变形,严重时威胁桥梁安全.因此对大跨拱桥动力学行为相关研究有十分重大的意义.作为非线性振动研究的重要基础,厘清结构的自由振动特性对研究车桥耦合振动<sup>[1]</sup>、地震作用<sup>[2]</sup>、结构抗风稳定性<sup>[3]</sup>等具体工程设计至关重要.

众多学者<sup>[4-6]</sup>对拱桥动力性能的研究多集中在有限元分析法,但对于大跨桥梁结构,有限元建模过程烦琐,计算成本高,且不利于模型的参数分析.另外,虽然康厚军等<sup>[7-8]</sup>建立了单跨拱桥的相关全局动力学理论,但对于多跨拱桥的相关理论尚未见报道.基于本课题组利用传递矩阵法对于桥梁结构的分析过程中,解维东等<sup>[9]</sup>只对单跨度拱-梁模型进行自由振动的分析.在结构动力学领域,李万春等<sup>[10-11]</sup>、朱国敬等<sup>[12]</sup>的研究表明,传递矩阵法能很好地解决各类拱桥动力学问题,为传递矩阵法在拱桥力学计算方面的应用提供了解决方案.此外,苏潇阳等<sup>[13]</sup>的研究使得传递矩阵法能够拓展到斜拉桥的动力学分析

中,充分证明该理论分析方法应用的广泛性.

鉴于此,本文基于多跨下承式拱桥平面全局动力学模型,在圆拱与梁的面内自由振动动力学方程求解基础上,结合相应边界条件,推导多跨拱桥全局动力学理论,求解其面内自由振动问题.将重点分析拱桥矢跨比、吊杆截面面积、拱肋惯性矩对整桥系统面内自振频率的影响,得到多跨拱桥相应自振特性,为实际工程提供理论依据.

## 1 力学模型

图1为多跨下承式拱桥的全局动力学模型.本文理论分析模型采用有推力下承式拱桥,整桥系统最左端与最右端拱脚边界条件视为固定端,中部拱脚支座视为固定铰支座.主梁视为连续梁,最左端与最右端边界条件视为铰支,中部各支座视为链杆支座.模型中拱梁在吊杆处耦合.将主梁简化为不考虑轴力的 Euler-Bernoulli 梁;将吊杆间的主拱肋视作圆弧拱;由于吊杆的横向刚度相对于拱、梁的横向刚度,以及吊杆的轴向刚度均小几个量级,将吊杆视作无质量弹簧,仅考虑轴向刚度对整体系统的贡献.另外,结合工程实际的分析和便于研究目标的实现,特引入以下基本假定:(1)忽略阻尼  $c$  的影响;(2)忽略拱与梁的横向转动惯量与剪切变形;(3)拱轴线不可压缩;(4)为使自振特性研究直观化,振型采用放大化处理.

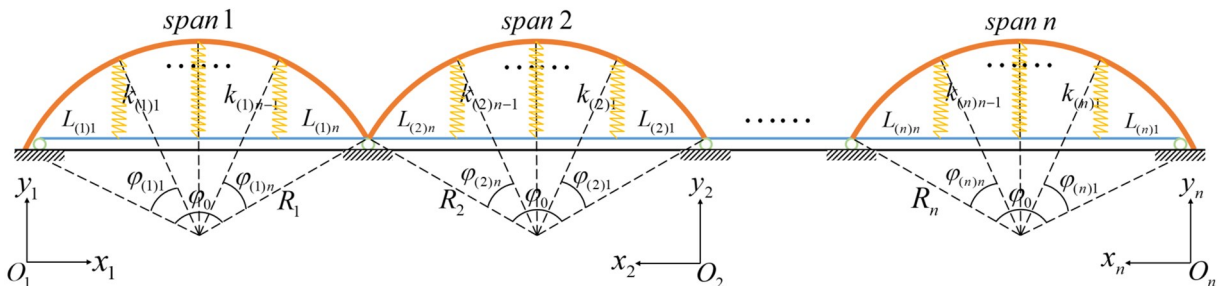


图1 多跨下承式拱桥力学模型

Fig.1 Mechanical model of multi-span through arch bridge

## 2 全局动力学理论

### 2.1 系统子结构振动微分方程

圆弧拱<sup>[9]</sup>与欧拉梁自由振动控制微分方程:

$$\frac{\partial^5 v_a}{\partial \varphi^5} + 2 \frac{\partial^3 v_a}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v_a}{\partial \varphi} + \frac{m_a R^4}{E_a I_a} \frac{\partial^3 v_a}{\partial t^2 \partial \varphi} = 0 \quad (1)$$

$$E_b I_b \frac{\partial^4 v_b}{\partial x^4} + m_b \frac{\partial^2 v_b}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

其中: $m_a$  为拱结构单位长度质量, $R$  为圆拱曲率半径, $E_a$  为拱肋弹性模量, $I_a$  为拱截面惯性矩; $m_b$  为梁结构单位长度质量, $E_b$  为主梁弹性模量, $I_b$  为梁截面惯性矩。

因本文研究的多跨拱桥模型为线性系统,方程有简谐形式的解,利用分离变量法将方程的解表示成时间与空间的函数,并将其带入式(1)与式(2)中,可得拱径向位移函数与梁竖向位移函数,结合力的平衡条件与内力、变形物理关系,最终得出拱-梁其余内力与位移函数表达式,分别表示成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ V_a \\ \theta_a \\ M_a \\ Q_a \\ N_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & T_{1,3} & T_{1,4} & T_{1,5} & T_{1,6} \\ T_{2,1} & T_{2,2} & T_{2,3} & T_{2,4} & T_{2,5} & T_{2,6} \\ T_{3,1} & T_{3,2} & T_{3,3} & T_{3,4} & T_{3,5} & T_{3,6} \\ T_{4,1} & T_{4,2} & T_{4,3} & T_{4,4} & T_{4,5} & T_{4,6} \\ T_{5,1} & T_{5,2} & T_{5,3} & T_{5,4} & T_{5,5} & T_{5,6} \\ T_{6,1} & T_{6,2} & T_{6,3} & T_{6,4} & T_{6,5} & T_{6,6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} V_b \\ \theta_b \\ M_b \\ Q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{7,7} & T_{7,8} & T_{7,9} & T_{7,10} \\ T_{8,7} & T_{8,8} & T_{8,9} & T_{8,10} \\ T_{9,7} & T_{9,8} & T_{9,9} & T_{9,10} \\ T_{10,7} & T_{10,8} & T_{10,9} & T_{10,10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中: $U_a$  表示拱的切向位移, $V_a$  表示拱的径向位移, $\theta_a$  表示拱的转角, $M_a$  表示拱的弯矩, $Q_a$  表示拱的剪力, $N_a$  表示拱的轴力, $V_b$  表示梁的竖向位移, $\theta_b$  表示梁的转角, $M_b$  表示梁的弯矩, $Q_b$  表示梁的剪力。 $T_{1,1\sim 6,6}$ <sup>[14]</sup> 及  $T_{7,7\sim 10,10}$  分别代表拱与梁的位移函数、内力函数对应系数  $C_1 \sim C_{10}$  位置前参量。

因拱-梁经由吊杆连接耦合,将式(3)与式(4)写为一个整体矩阵方程:

$$t = TC \quad (5)$$

其中: $t$  为拱-梁段任意截面位置状态向量, $C$  为积

分常数向量, $T$  为拱-梁段整体系数矩阵。

### 2.2 场传递矩阵

式(5)中,对任意拱-梁段最左端截面位置,即拱段所对应圆心角  $\varphi=0$  与梁段所对应长度  $x=0$  时,有:

$$t^{(i-1)R} = T^0 C \quad (6)$$

进而可得相应积分常数向量的表达:

$$C = (T^0)^{-1} t^{(i-1)R} \quad (7)$$

其中: $(T^0)^{-1}$  为拱段圆心角为 0 及梁段长度为 0 时系数矩阵的逆矩阵, $t^{(i-1)R}$  为第  $i$  个拱-梁段初始位置,即第  $i-1$  根吊杆最右端位置拱-梁部状态向量为:

$$t^{(i-1)R} = [U_a^{(i-1)R} \quad V_a^{(i-1)R} \quad \theta_a^{(i-1)R} \quad M_a^{(i-1)R} \quad Q_a^{(i-1)R} \quad N_a^{(i-1)R} \quad V_b^{(i-1)R} \quad \theta_b^{(i-1)R} \quad M_b^{(i-1)R} \quad Q_b^{(i-1)R}]^T$$

将式(7)代入式(5)可得:

$$t^{iL} = T (T^0)^{-1} t^{(i-1)R} \quad (8)$$

令整体系数矩阵  $T$  中的圆心角  $\varphi = \varphi_i$ , 长度  $x = L_i$ , 则对应的有:

$$t^{iL} = U^i t^{(i-1)R} \quad (9)$$

其中: $U^i$  表示第  $i$  个拱-梁段内的节段传递矩阵,表明单个拱-梁段内位移与力的传递关系, $t^{iL}$  为第  $i$  个拱梁段末尾位置,即第  $i$  根吊杆最左端位置拱梁部状态向量为:

$$t^{iL} = [U_a^{iL} \quad V_a^{iL} \quad \theta_a^{iL} \quad M_a^{iL} \quad Q_a^{iL} \quad N_a^{iL} \quad V_b^{iL} \quad \theta_b^{iL} \quad M_b^{iL} \quad Q_b^{iL}]^T$$

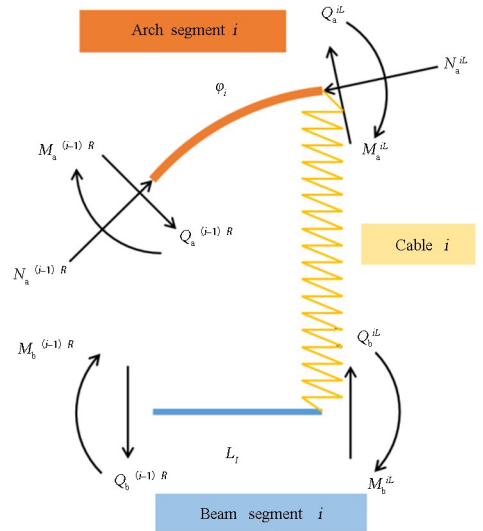


图 2 拱段与梁段传递示意图  
Fig.2 Transfer schematic diagram of arch and beam

上述推导过程基于多跨下承式拱桥其中任意

跨结构单个拱-梁段分析,为便于说明具体传递理论,取位于第  $i-1$  根吊杆与第  $i$  根吊杆之间的第  $i$  个传递段,具体传递方式如图 2 所示.

### 2.3 点传递矩阵

上文详细推导结构场传递矩阵表达形式,但因整桥模型中拱与梁在吊杆处耦合,通过明确相关传递路径,在整个系统进行完整传递还需各吊杆节点位置处两侧对应力与位移的关系.因此,取第  $i$  根吊杆局部位置节点进行受力分析,如图 3 所示.

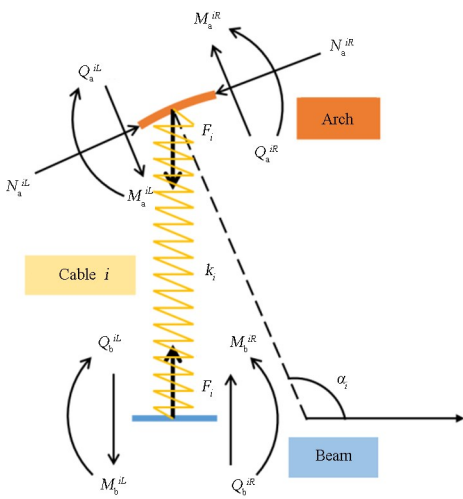


图 3 节点受力分析图

Fig.3 Diagram of node force analysis

列出节点平衡方程,并将其写为矩阵方程形式:

$$\mathbf{t}^{iR} = \mathbf{K}^i \mathbf{t}^{iL} \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{K}^i$  表示第  $i$  根吊杆局部位置处点传递矩阵,表明节点位移和力的传递关系,  $\mathbf{t}^{iR}$  为第  $i$  根吊杆最右端位置拱梁部状态向量:

$$\mathbf{t}^{iR} = [U_a^{iR} \quad V_a^{iR} \quad \theta_a^{iR} \quad M_a^{iR} \quad Q_a^{iR} \quad N_a^{iR} \quad V_b^{iR} \quad \theta_b^{iR} \quad M_b^{iR} \quad Q_b^{iR}]^T$$

### 2.4 传递矩阵法多跨结构理论推导

基于场矩阵与点矩阵公式的推导,联立式(9)与式(10)可得:

$$\mathbf{t}^{iR} = \mathbf{T}^i \mathbf{t}^{(i-1)R} \quad (11)$$

其中:  $\mathbf{T}^i = \mathbf{K}^i \mathbf{U}^i$ ,其代表从第  $i-1$  根吊杆最右端截面位置处传递到第  $i$  根吊杆最右端截面位置处所对应第  $i$  个拱-梁段的单元传递矩阵.

应用传递矩阵相关原理,将首尾相连各拱-梁传递段的单元传递矩阵依次相乘,可得单跨拱桥的

总体传递矩阵:

$$\mathbf{T} = \prod_{i=1}^n \mathbf{T}^i \quad (12)$$

本文基于传递矩阵法对大跨度下承式多跨拱桥进行自由振动求解,基本思想的核心为将整体力学模型跨与跨之间断开并以刚性耦合的形式连结在一起,多跨拱桥就被拆分成多座单跨拱桥,分别求解其整体传递矩阵,将多座单跨下承式拱桥的结果合并在一起得到多跨下承式拱桥的结果,最后通过系统两端的自然边界条件及截开处的耦合边界条件,就可得出总体特征方程,求解该特征方程,即可求得多跨下承式拱桥竖向自由振动的频率与振型.需要指出的是,本文所推导的多跨下承式拱桥全局动力学理论,基于传递矩阵法采用了折纸式传递思想,整桥系统传递方向类似于折纸过程,各跨结构两两结合,相向传递,最终经过叠合,相关力学模型在投影下表现为一座单跨下承式拱桥,使得各单跨拱桥的初始传递位置与末尾传递位置分别重合为一个传递点位.

## 3 算例

### 3.1 拱桥模态分析

以一座跨径为  $100\text{m} + 100\text{m} + 100\text{m} + 100\text{m}$  的四跨下承式拱桥为例,对其面内自由振动问题进行求解.拱桥各项参数如下:圆拱半径  $R = 70\text{m}$ ,各跨拱矢跨比  $f/l = 0.21$ ,拱截面尺寸  $= 1.0\text{m} \times 3.0\text{m}$ ,线密度  $m_a = 23400\text{kg/m}$ ,弹性模量  $E_a = 206\text{GPa}$ ;梁截面尺寸为  $0.8\text{m} \times 2.5\text{m}$ ,线密度  $m_b = 5000\text{kg/m}$ ,弹性模量  $E_b = 34.5\text{GPa}$ ;整桥共有 36 根吊杆,弹性模量  $E_c = 210\text{GPa}$ ,横截面积均为  $A_c = 0.005\text{m}^2$ .

为验证本文理论方法正确性,采用有限元软件建立上述尺寸参数与材料特性的下承式拱桥有限元平面模型,拱和梁采用 Beam 3 单元进行模拟,吊杆采用 Link 1 单元进行模拟,总共划分为 828 个单元.

表 1 列出传递矩阵法与有限元法计算得出的前 10 阶自振频率,从理论结果与有限元结果比较分析可得,本文理论计算自振频率与有限元建模计算自振频率间误差较小,因传递矩阵法是基于拱轴不可压缩假设,振动时拱轴方向不发生伸缩变形,其抗压刚度可视为无穷大,而有限元建模分析考虑

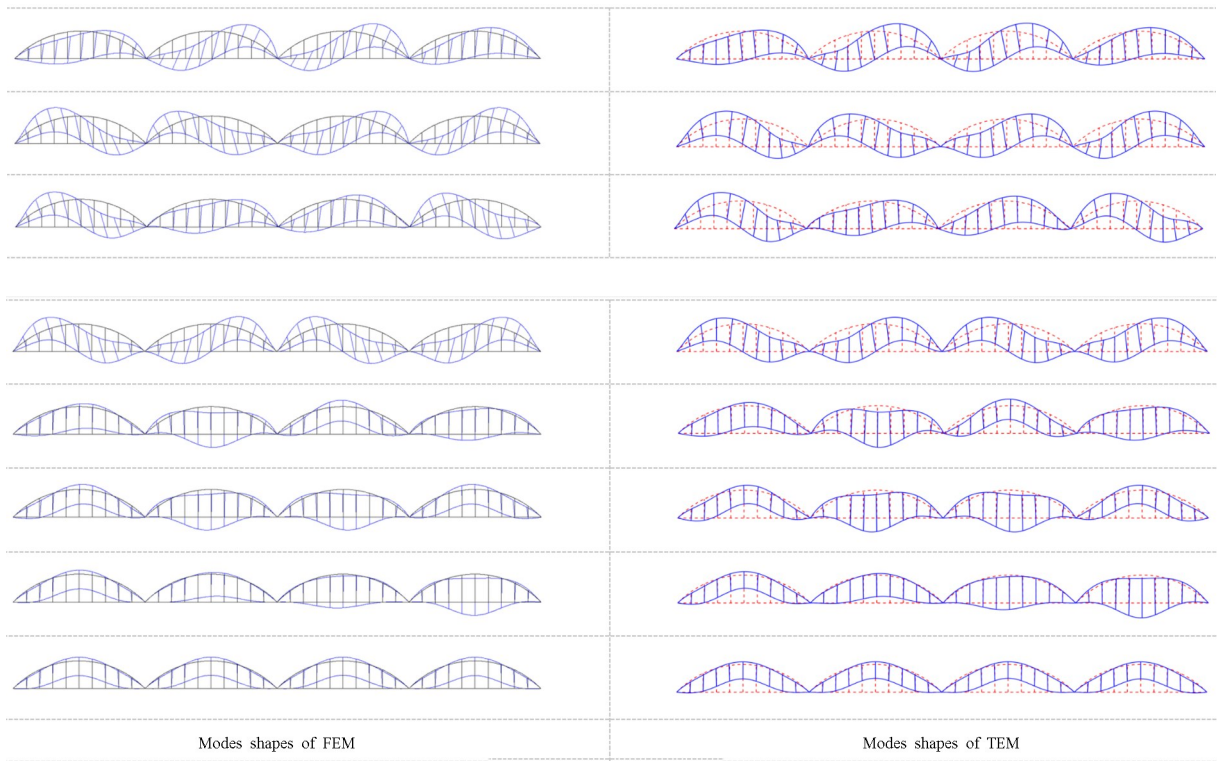


图4 利用传递矩阵法理论和 ANSYS 得到的四跨下承式拱桥前 8 阶振型

Fig.4 The first eight mode shapes of four span through arch bridge obtained by transfer matrix method theory and ANSYS

表 1 四跨下承式拱桥前 10 阶频率

Table 1 The first 10 frequencies of the four-span through arch bridge

振型序号	FEM 计算频率 (Hz)	TMM 计算频率 (Hz)	相对误差 (%)
1	2.0676	2.2223	6.96
2	2.4508	2.6161	6.32
3	2.8649	3.0376	5.69
4	3.0923	3.2742	5.56
5	4.2943	4.5218	5.03
6	4.5417	4.8145	5.67
7	4.7080	5.0070	5.97
8	4.7627	5.0669	6.00
9	5.6757	5.6944	0.33
10	5.8310	5.8393	0.14

注:相对误差 =  $[(\text{TMM 计算频率} - \text{FEM 计算频率}) / (\text{TMM 计算频率})] \times 100\%$

拱轴变形影响,进而传递矩阵法计算频率会相应偏大,且最大误差仅为第 1 阶频率的 6.96%,对比吻合良好,充分证实本文多跨下承式拱桥全局动力学理论与基于传递矩阵的求解方法的有效性.其中,传递矩阵法计算速度明显快于有限元计算速度,鉴于该理论方法具有计算方便快速的优点,在各类多

跨拱桥的方案设计阶段可进行大量参数对比选择.图 4 列举本文理论和方法与有限元建模得出的前 8 阶振型图,各子图左部为有限元计算结果,右部为理论计算结果,两者对比吻合良好,进一步证明本文理论正确性.同时,本文算例中拱结构抗弯刚度大于梁结构抗弯刚度,随着模态阶数升高,第 7 阶振型与第 8 阶振型以主梁振动为主,此时拱振动幅度小于梁,因此拱桥面内自由振动特性受拱梁相对刚度影响较大,为避免主拱肋或主梁振幅过大,实际工程设计时需将拱梁刚度比控制在一个合理的范围内.

### 3.2 参数分析

图 5 给出整桥模型频率随矢跨比变化的影响曲线.模型保持桥梁跨度不变,改变拱半径及矢高.考虑矢跨比变化范围,实际取 0.01 到 0.5 的变化区间.根据图中频率变化趋势可得,该四跨下承式拱桥前 8 阶自振频率随矢跨比增加而逐步减小,且高阶模态对矢跨比变化更敏感.因随拱桥半径减小将导致拱圈弧度变陡,可在一定程度上增大主拱圈面内刚度,但同时施工时会使用更多建材,加大整桥

质量,且矢高增大将导致吊杆长度增加,降低各根吊杆轴向刚度,从而减小对拱梁的支撑作用.依据系统固有频率计算公式,此等情况下等效刚度增大程度小于乃至远小于等效质量增大程度,加之吊杆线刚度减小直接导致系统面内刚度减小,最终整桥面内自振频率因此减小.考虑受力情况,需保证整桥系统有足够的面内刚度与稳定性,建议在拱桥设计阶段根据实际情况选择最为合适的矢跨比,使得桥梁动力特性达到较好的状态.

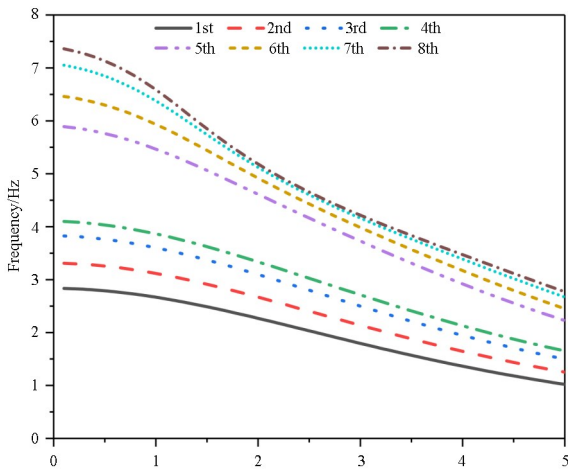


图5 矢跨比对模型前8阶频率的影响

Fig.5 Influence of rise span ratio on the first eight frequencies of the model

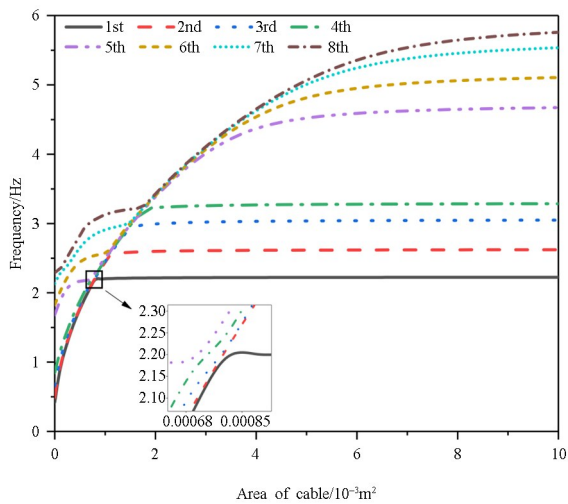


图6 吊杆截面面积对模型前8阶频率的影响

Fig.6 Influence of cable area on the first eight frequencies of the model

图6给出整桥模型频率随吊杆截面面积变化的影响曲线.由图可见,随着整桥模型中各根吊杆截面面积增大,前8阶自振频率呈增长趋势.当吊杆截面面积较小时,增大其截面面积会使得频率值快速增大,但增大到一定程度时,继续增大吊杆截

面积,频率值基本不会再发生改变.因随着吊杆截面面积增大,导致对拱梁约束作用提高,整桥面内刚度增大,各阶频率值增大.但当吊杆截面面积较大时,整体系统刚度仅由拱梁共同决定.因此通过增大吊杆截面面积提高拱桥刚度是有限的.此外,图中还存在频率相互靠近随后又相互分离的现象,即 Veering 现象.如图6所示第1阶与第5阶模态、第2阶与第6阶模态、第3阶与第7阶模态、第4阶与第8阶模态之间会存在快速交换及能量传递现象,容易引发共振现象造成结构破坏,在工程设计时应避免这些参数区间.

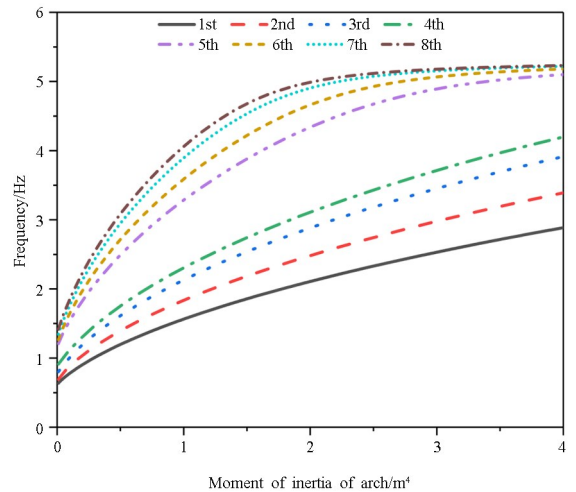


图7 拱肋惯性矩对模型前8阶频率的影响

Fig.7 Influence of arch moment of inertia on the first eight frequencies of the model

图7给出整桥模型频率随拱截面惯性矩变化的影响曲线.从图中可看出前8阶频率随拱截面惯性矩的增大逐步增大.当拱截面惯性矩较小时,增大拱截面惯性矩能使频率快速增大,进而增加整桥面内刚度.因此可通过增大拱截面高度,或在截面面积不变的情况下采取更合理的截面形式,如在众多钢管混凝土拱桥工程中可将拱做成哑铃形截面.但当增大到一定程度时,继续增大拱惯性矩,第4到第8阶频率的增幅逐渐放缓,趋近于一条水平直线,此时只有第1到第4阶频率会继续保持增大,高阶模态对拱截面变化参数不敏感.实际因拱肋刚度已增大到一定程度,相比主梁其可视为刚体,振型以梁的竖向弯曲振动为主.因此在工程中,拱肋截面的设计必须考虑各方面因素.

## 4 结论

基于多跨下承式拱桥力学模型的特点,在折纸

式传递方式基础上,推导多跨拱桥的全局动力学理论,以一座四跨下承式拱桥为例,求解其频率与振型,并对整桥动力特性进行参数分析,相关结论如下:

(1)在圆拱与梁的自振微分方程求解基础上,本文引入一种半解析法——传递矩阵法求解多跨拱桥的面内自由振动问题,并与有限元软件所得结果进行对比,相对误差的绝对值可控制在7%以内,充分证明传递矩阵解的正确性与可行性。

(2)拱梁刚度比的取值会显著影响高阶模态的振动形状,为避免主拱肋或主梁振幅过大,工程中需对拱梁构件材料与截面形式进行合理设计。

(3)随着矢跨比的增大,拱圈弧度变陡,在施工过程中会使用更多建材,一定程度上加大整桥质量,而此时整桥面内刚度处于增势不明显乃至呈减小的态势,结合一般自振频率计算公式可知,频率值会逐步减小,工程中应选取合适的矢高与拱桥半径进行施工。

(4)随着拱桥吊杆截面面积的增大,会增大吊杆对拱肋与主梁的约束作用,进而增大系统面内刚度;但是各阶频率间极易发生 Veering 现象,工程设计时应避免相应频率不稳定区间导致的内共振现象产生。

(5)随着拱肋惯性矩的增大,使得拱部可抵抗更大的变形,进而在一定程度上提高整桥面内刚度。工程中一般采取提高拱截面高度或根据实际情况采取更加合理的截面形式等方法提高拱肋惯性矩。

(6)本文在多跨拱桥传递矩阵法应用中所得技术方法还可用于拱桥横向面外振动的分析。

(7)因本文在进行建模分析时引入了一系列假设,例如吊杆等效为无质量弹簧,实际工程中,整体系统的振动会包括吊杆的弯曲,在后续工作中应着重对此进行深入研究。

综上所述,本文给出求解多跨拱桥面内固有频率与振型的一种新颖方法,通过刚度与面内自振频率相挂钩的特性,为工程的损伤评估与健康检测提供新的处理思路。

## 参考文献

- [1] 贺焯博,郭增伟,徐华.车桥耦合振动下中承式拱桥吊杆汽车冲击效应[J].噪声与振动控制,2022,42(1):206-213.
- [2] HE X B, GUO Z W, XU H. Vehicle impact effect of suspender of half through arch bridge under vehicle bridge coupling vibration [J]. Noise and Vibration Control, 2022, 42(1): 206-213. (in Chinese)
- [3] 李小珍,杨得海,雷康宁,等.大跨度连续梁拱桥多点多维地震响应分析[J].西南交通大学学报,2021,56(2):221-228.
- [4] LI X Z, YANG D H, LEI K N, et al. Multi-point and multi-dimensional seismic response analysis of long-span continuous beam arch bridge [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2021, 56(2): 221-228. (in Chinese)
- [5] 李松放.大跨度钢管混凝土拱桥吊装施工稳定性分析及抗风研究[D].柳州:广西科技大学,2019.
- [6] LI S A. Stability analysis and wind resistance research of long-span concrete-filled steel tubular arch bridge during hoisting construction [D]. Liuzhou: Guangxi University of Science and Technology, 2019. (in Chinese)
- [7] 韩洪举,张基进.大跨度钢筋混凝土拱桥施工阶段动力特性分析[J].中外公路,2020,40(5):165-167.
- [8] HAN H J, ZHANG J J. Analysis of dynamic characteristics of long-span reinforced concrete arch bridge during construction [J]. Journal of China and Foreign Highway, 2020, 40(5): 165-167. (in Chinese)
- [9] 谢裕平.桥面系连接刚度对中承式钢管混凝土拱桥动力特性和稳定性的影响[J].公路,2019,64(5):106-108.
- [10] XIE Y P. Influence of bridge deck connection stiffness on dynamic characteristics and stability of half through concrete filled steel tubular arch bridge [J]. Journal of Highway, 2019, 64(5): 106-108. (in Chinese)
- [11] 计静,林钰博,姜良芹,等.双跨钢管高强混凝土拱桥模态分析与对比[J].低温建筑技术,2021,43(12):83-87.
- [12] JI J, LIN Y B, JIANG L Q, et al. Modal analysis and comparison of double span steel tube high strength concrete arch bridge [J]. Journal of Low Temperature Architecture Technology, 2021, 43(12): 83-87. (in Chinese)
- [13] KANG H J, ZHAO Y Y, Zhu H P. Out-of-plane free vibration analysis of a cable-arch structure [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, (332): 907-

- 921.
- [8] ZHAO Y Y, KANG H J. In-plane free vibration analysis of cable-arch structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008 (312): 363–379.
- [9] 解维东. 拱桥和斜拉梁动力学建模理论暨面内自由振动研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2016.
- XIE W D. Dynamic modeling theory of arch bridge and cable stayed beam and study on free vibration in plane [D]. Changsha: Hunan University, 2016. (in Chinese)
- [10] 滕兆春, 李万春. 变曲率平面拱的自由振动分析[J]. *兰州理工大学学报*, 2017, 43(2): 167–172.
- TENG Z C, LI W C. Free vibration analysis of plane arch with variable curvature [J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2017, 43(2): 167–172. (in Chinese)
- [11] 李万春, 滕兆春. 变曲率 FGM 拱的面内自由振动分析[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(9): 201–208.
- LI W C, TENG Z C. In-plane free vibration analysis of FGM arch with variable curvature [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(9): 201–208. (in Chinese)
- [12] 康厚军, 朱国敬, 苏潇阳. 拱桥悬臂施工过程中面内特征值的传递矩阵法 [J]. *计算力学学报*, 2022, 39(2): 198–208.
- KANG H J, ZHU G J, SU X Y. Transfer matrix method of in-plane eigenvalues in cantilever construction of arch bridge [J]. *Journal of Computational Mechanics*, 2022, 39(2): 198–208. (in Chinese)
- [13] 苏潇阳, 康厚军, 丛云跃. 混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(4): 26–32.
- SU X Y, KANG H J, CONG Y Y. Dynamic theory of vertical bending stiffness evaluation of hybrid multi tower cable stayed bridge [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(4): 26–32. (in Chinese)
- [14] 向天宇, 郑建军. 变截面圆拱的自由振动 [J]. *振动与冲击*, 2000(2): 61–65, 97.
- XIANG T Y, ZHENG J J. Free vibration of circular arch with variable section [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2000(2): 61–65, 97. (in Chinese)