

# 多索—单梁耦合结构的动力学建模及 非线性特性研究\*

王志攀<sup>†</sup>

(中南林业科技大学 土木工程学院,长沙 410004)

**摘要** 大跨度斜拉桥通常采用密索体系,拉索的振动频率非常接近,同时拉索之间也可能存在倍频关系.因此,可能存在索与索之间的相互耦合振动.索是斜拉桥的重要承重构件,对多索—单梁的动力学特性进行研究至关重要.本文考虑到索梁、索塔及塔梁的边界条件和连接点处的连接条件,基于 Hamilton 变分原理,建立了多索—单梁结构的运动微分方程.经过无量纲化处理,根据分离变量法,得到了其降维约化后的运动微分方程.本文取相邻的两根索考虑两种工况模型,对不同工况下的双索—单梁耦合结构的动力学行为进行了参数分析.研究发现,不同于以往资料中的“频率转向”现象,在本文中,两条频率曲线在频率值接近处,并未迅速分离,而是在相对一小段参数范围内继续保持平行且相互靠近,随后再迅速分离.最后,研究了双索—单梁耦合结构的非线性特性,分别对结构进行了两自由度和单自由度离散,研究发现,结构单模态假设在非共振区域能反映结构的非线性特性,但是在共振区域,结构的非线性特性会发生跳跃变化,应用 2 自由度模态理论进行研究更为准确.

**关键词** 索—梁耦合结构, 哈密顿原理, 频率转向, 局部模态

**中图分类号**:O322;TH113

**文献标志码**:A

## Study on Dynamic Characteristics and Nonlinear Characteristics of Multi-Cable Single Beam Coupled Structures\*

Wang Zhiqian<sup>†</sup>

(College of Civil Engineering, Central South University of Forestry and Technology, Changsha 410004, China)

**Abstract** Long span cable-stayed bridges usually use dense cable systems, and the vibration frequencies of cables are very close, and there may be a frequency doubling relationship between cables. Therefore, there may be mutual coupling vibration between cables. Cable is an important load-bearing component of cable-stayed bridges, and it is very important to study the dynamic characteristics of multi cable single beam. In this paper, considering the boundary conditions of cable girder, cable tower and tower girder and the connection conditions at the connection points, based on Hamilton variational principle, the differential equations of motion of multi cable single beam structures are established. After dimensionless treatment, the reduced differential equation of motion is obtained according to the method of separating variables. In this paper, two adjacent cables are taken into account to analyze the dynamic behavior of double cable single beam coupling structure under different working conditions. It is found that, different from the “frequency turn” phenomenon in previous data, in this paper, the two frequency curves do not separate rapidly at the place where the frequency values are close, but continue to keep parallel and close

to each other within a relatively small parameter range, and then separate rapidly. Finally, the nonlinear characteristics of the double cable single beam coupling structure are studied, and the structure is discretized with two degrees of freedom and one degree of freedom respectively. It is found that the single mode assumption of the structure can reflect the nonlinear characteristics of the structure in the non resonant region, but in the resonant region, the nonlinear characteristics of the structure will jump, so it is more accurate to apply the two degree of freedom mode theory to research.

**Key words** cable-stayed beam, hamilton principle, frequency jump, local mode

## 引言

索—梁组合体系的出现使得大跨度桥梁成了现实,最具典型的大跨度桥型即斜拉桥<sup>[1]</sup>.随着桥梁跨度的进一步增大,一系列安全问题引起了工程界与学界的关注.如跨度越大,结构整体刚度相对越小,在强风或地震荷载作用下,会产生较大幅值的振动;对于大跨径的斜拉桥,超长斜拉索在一定条件下甚至会产生始料未及的过大振幅<sup>[2]</sup>.因此,大幅振动成为了桥梁设计中所必须面对和亟待解决的问题<sup>[3,4]</sup>.国内学者针对具体实际工程,利用非线性有限元法,考虑几何非线性和材料非线性的影响,对斜拉桥的静力问题、移动荷载问题、动力学问题和稳定问题进行了大量的研究<sup>[5,6]</sup>.一方面为斜拉桥的设计提供了理论指导,也在一定程度上保证了斜拉桥成桥之后的正常运营.由于桥梁的理论模型过于复杂,因此主要从非线性有限元的角度<sup>[7,8]</sup>进行了初步研究,对斜拉桥的非线性动力学行为研究还少有涉及.现有的关于索—梁组合体系的非线性动力学理论和大幅振动机理也存在着许多不足,最明显的就是基于一根索一根梁构成的索—梁耦合结构不能很好地描述整桥结构的复杂非线性现象,更不能对其进行合理的解释<sup>[9]</sup>.斜拉桥通常为密索体系,包含有多根索,各拉索的振动频率可能很接近,拉索之间也本身可能会存在倍频关系.因此,索与索之间的相互影响应该不能被忽略<sup>[10-12]</sup>.这在现有的研究中已经受到重视<sup>[13]</sup>.目前对斜拉桥的非线性研究主要针对地震作用下的时程响应和极限承载力,这些研究全部基于非线性有限元模型和理论.非线性有限元法本质上归结于求解过程中的线性化,因此不能揭示大跨度斜拉桥响应中的非线性特性和机制<sup>[14]</sup>.另外,由于斜拉桥结构复杂且

为无限自由度体系,研究整桥的非线性动力学特性目前在理论上相当困难.根据斜拉桥的结构特点,斜拉桥可以看作是由多个索—梁耦合结构基本单元组成.因此,研究其耦合结构的非线性动力学行为有助于更好地反映和理解整桥的非线性特性<sup>[15]</sup>.

基于上述分析,本论文考虑多根索及桥梁对整体结构的影响,建立了多索—单梁结构的动力学模型,通过取两根相邻的索为算例,根据特征值法求解了体系的特征值方程并进行了相应的参数分析,随后根据不同自由度的模态假设探讨了双索—单梁耦合结构的非线性动力学特性.

## 1 多索—单梁耦合结构建模理论

### 1.1 多索—单梁耦合结构模型

图 1 给出了多索—单梁体系几何模型.其中,桥塔与桥面通过滚轴支座支承,在桥塔与桥面连接处不能传递弯矩;索和梁在连接点处锚接.梁总长为  $l_0$ ,  $l_i$  为第  $i$  根索的长度,  $\theta_i$  为拉索与桥面的夹角.为方便推导得到多索—单梁体系的运动方程,采用笛卡尔直角坐标系统进行描述,将局部坐标分别置于索和梁的一端,如图 1 所示.不记梁的抗扭刚度和抗剪刚度对结构动力学行为的影响.

### 1.2 多索—单梁耦合结构动力学理论建模

通过分段处理,应用 Hamilton 变分原理可以得到多索—单梁结构体系的运动方程.多索—单梁耦合结构的 Hamilton 变分方程可以表示为:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (1)$$

其中  $T$  和  $U$  为耦合结构的动能和势能;  $\delta W$  表示非保守力和外力所做的虚功,  $\delta$  为变分符号.考虑索自重的影响,索的应变表示为:

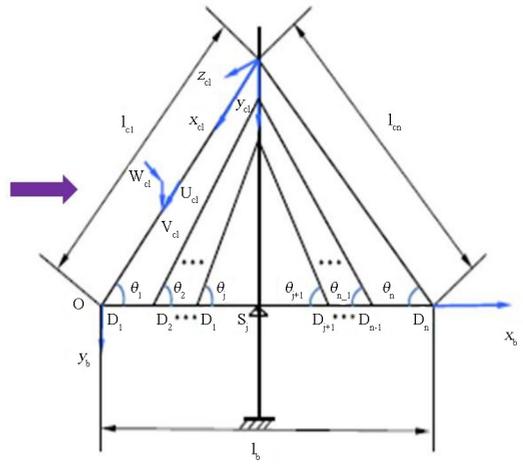
$$\epsilon_c = \epsilon_{c0} + \epsilon_{cd} \quad (2)$$

结构的运动微分方程表示如下,其推导用到的边界

条件、连接条件详见文献[2].对于第  $i$  根索:



(a)



(b)

图 1 多索一单梁体系模型图

Fig.1 The multi-cable single beam structure model

$$m_{ci} \frac{\partial^2 u_{ci}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_c} [(H_i + E_c A_c \epsilon_{ci}(x, t)) \frac{d\epsilon_{ci}}{dx_c}] - m_{ci} g (\sin\theta_i \delta_{x,y} - \cos\theta_i \delta_{x,x}) = f_{ci}(x_c, t), \quad 0 < x_{ci} < l_{ci} \quad (3)$$

对于梁:

$$m_b \frac{\partial^2 u_{bb}}{\partial t^2} - E_b I_k \frac{\partial^4 u_{bb}}{\partial x_b^4} - \frac{\partial}{\partial x_b} [(-P_i - E_b A_b \epsilon_b(x, t)) \frac{d\epsilon_b}{dx_b}] = f_{bi}(x_b, t), \quad D_i^+ < x_b < D_{i+1}^-, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (4)$$

其中  $f(x_{b(c)}, t)$  为作用在索、梁上的外力,  $f_{b(c)}(x_{b(c)}, t) = (0, F_{b(c)}(x_{b(c)}, t), G_{b(c)}(x_{b(c)}, t))^T$ ,  $P$  为作用在梁上的轴力.其中各变量和参数的定义详见文献[2].

通过无量纲化,可以得到无量纲形式的第  $i$  根索和梁的面内运动方程,其对应系数见文献[2]:

$$v_{ci,t} + c_{c0} v_{ci,t} - \omega_{ci}^2 v_{ci,x_c x_c} - \alpha_i (y_{ci,x_c x_c} + v_{ci,x_c x_c}) [v_b(s_i, t) \sin\theta_i \cos\theta_i + \int_0^1 (y_{ci,x_c} v_{c,x_c} + \frac{v_{ci,x_c}^2 + \omega_{ci,x_c}^2}{2}) dx_c] = f_{ci}, \quad 0 < x_{ci} < 1 \quad (5)$$

$$v_{bi,t} + c_{b0} v_{bi,t} + N_i v_{bi,x_b x_b} + \beta v_{bi,x_b x_b x_b x_b} - \Gamma v_{bi,x_b x_b} \int_0^1 (\frac{v_{bi,x_b}^2 + \omega_{bi,x_b}^2}{2}) dx_b + \Upsilon v_{bi,x_b x_b} [v_b(s_i, t) \sin\theta_i \cos\theta_i + \int_0^1 (y_{ci,x_c} v_{ci,x_c} + \frac{v_{ci,x_c}^2 + \omega_{ci,x_c}^2}{2}) dx_c] = f_{bi},$$

$$s_i^+ < x_b < s_{i+1}^- \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6)$$

其中  $\omega_c = \sqrt{\frac{H}{\omega_0^2 m_c l_c^2}}$ .

如果忽略所有的非线性项、阻尼项和外载荷,则整体结构系统第  $i$  根索和梁的运动方程可以表示为:

$$v_{ci,t} - \frac{H_i}{\omega_0^2 m_c l_{ci}} v_{ci,x_c x_c} - \alpha_i y_{ci,x_c x_c} v_b(s_i, t) \sin\theta_i \cos\theta_i - \alpha_i y_{ci,x_c x_c} \int_0^1 y_{ci,x_c} v_{c,x_c} dx_c = 0, \quad 0 < x_{ci} < 1 \quad (7)$$

$$v_{bi,t} + N_i v_{bi,x_b x_b} + \beta v_{bi,x_b x_b x_b x_b} = 0, \quad s_i^+ < x_b < s_{i+1}^-, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (8)$$

应用分离变量法对变量进行分离,并对整体结构特征值方程进行求解.对于面内情况,假设位移可以表示成:  $v = \{\varphi_{ci}(x_{ci}), \varphi_b(x_b)\}^T e^{i\omega t}$ , 其中  $\omega_i^{in} = \omega_{ci}$  是索-梁结构的面内第  $i$  阶固有频率;  $\varphi_{b,ci}(x_{b,ci})$  为每一分段组合结构中索、梁的模态函数;  $T$  表示转置;且  $i = \sqrt{-1}$ .经过数学变换,面内运动式(7)和式(8),改写为:

$$\varphi_{ci,x_c x_c}(x_{ci}) + q_i^2 (\omega_i^{in})^2 \varphi_{ci}(x_{ci}) - \alpha y_{ci,x_c x_c} (\varphi_{bi}(s_i) \sin\theta_i \cos\theta_i + \int_0^1 y_{ci,x_c} \varphi_{ci,x_c} dx_{ci}) = 0, \quad 0 < x_{ci} < 1 \quad (9)$$

$$\varphi_{b,x_b x_b x_b x_b}(x_b) + N_i \varphi_{b,x_b x_b}(x_b) - \frac{(\omega_i^{in})^2}{\beta} \varphi_b(x_b) = 0,$$

$$s_i^+ < x_b < s_{i+1}^-, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (10)$$

$$\text{其中 } q_i = \sqrt{\frac{H_i}{\omega_0^2 m_{ci} l_{ci}}}$$

## 2 双索-单梁耦合结构数值分析

### 2.1 单梁-多索耦合结构边界条件及连接条件

为计算方便,本文只取两根相邻的索作为算例进行研究.考虑两根索  $c_i$  (其中  $i = 1, 2$ ) 分别位于桥塔两侧对称(工况 1)及桥塔一侧(工况 2)两种工况,不管哪种工况,其索塔连接的边界条件为:

$$U_c(x_{ci}, t) |_{x_{ci}=0} = V_c(x_{ci}, t) |_{x_{ci}=0} = 0 \quad (11)$$

对于工况 2(两根索位于桥塔同一侧),其索梁连接条件如下,即第二根索( $i = 2$ )与梁的连接:

位移协调条件:

$$U_{ci}(l_{ci}, t) \sin \theta_i + V_{ci}(l_{ci}, t) \cos \theta_i = 0 \quad (12)$$

$$-U_{ci}(l_{ci}, t) \cos \theta_i + V_{ci}(l_{ci}, t) \sin \theta_i = V_b(D_i, t) \quad (13)$$

$$V_{bi}(x_b, t) |_{x_b=D_i^-} = V_{bi}(x_b, t) |_{x_b=D_i^+} \quad (14)$$

$$V_{bi,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^-} = V_{bi,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^+} \quad (15)$$

弯矩平衡条件:

$$E_b I_{byy} V_{bi,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^-} = E_b I_{byy} V_{bi,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^+} \quad (16)$$

力平衡条件:

$$(E_c A_c \varepsilon_{ci}(x_c, t)) [\sin \theta_i + \cos \theta_i \left( \frac{V_{bi}(D_i)}{l_{ci}} - V_{bi,xb}(D_i) \right)] - E_b I_{byy} V_{bi,xb,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^-} + E_b I_{byy} V_{bi,xb,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=D_i^+} = 0 \quad (17)$$

而桥塔与桥面通过滚轴支座支承,为方便进行理论计算,忽略梁的抗扭刚度和抗剪刚度.在桥塔和梁结合处( $S_j$ )应满足如下条件:

$$V_{bj}(x_b, t) |_{x_b=S_j^-} = V_{bj}(x_b, t) |_{x_b=S_j^+} = 0 \\ V_{bj,xb}(x_b, t) |_{x_b=S_j^-} = V_{bj,xb}(x_b, t) |_{x_b=S_j^+} \\ V_{bj,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=S_j^-} = V_{bj,xb,xb}(x_b, t) |_{x_b=S_j^+} \quad (18)$$

对于双索-单梁耦合结构,其面内运动微分方程式(7)和式(8),改写为:

$$\varphi_{ci,xcxc}(x_{ci}) + q_i^2 (\omega_i^{\text{in}})^2 \varphi_{ci}(x_{ci}) - \alpha y_{ci,xcxc}(\varphi_{bi}(s_i) \sin \theta_i \cos \theta_i +$$

$$\int_0^1 y_{ci,xc} \varphi_{ci,xc} dx_{ci}) = 0, 0 < x_{ci} < 1 \quad (19)$$

$$\varphi_{b,xb,xb,xb}(x_b) + N_i \varphi_{b,xb,xb}(x_b) - \frac{(\omega_i^{\text{in}})^2}{\beta} \varphi_b(x_b) = 0, s_i^+ < x_b < s_{i+1}^- i = 1, 2 \quad (20)$$

对于工况 1(两根索位于桥塔两侧对称),则上述公式中  $i = 1$  (工况 1 和工况 2 不同之处在于连接条件的不同).其中刚度比  $K = E_b I_{byy} / E_c A_c l_b^2$ .

### 2.2 双索-单梁耦合结构数值分析

根据上述运动微分方程以及边界条件和连接条件,利用所得矩阵方程行列式为零,可以得到双索-单梁的模态控制函数前面的系数,结构的特征值方程可见文献[2].本小节将结合模态函数研究结构参数,即索和梁的刚度比  $K$  对体系整体固有频率的影响.为方便进行数值分析,假设每根索满足如下条件,即  $E_{ci} A_{ci} = E_c A_c$ ; 对于梁的每一分段,满足  $E_{bi} A_{bi} = E_b A_b$ .结构参数数值为索的横截面积  $A_c = 6.273 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,外端索的单位长度质量  $m_c = 51.8 \text{ kg/m}$ ,杨氏模量  $E_c = 195 \text{ GPa}$ ,梁的结构参数为  $E_b = 34.5 \text{ GPa}$ ,单位长度质量  $m_b = 4.4 \times 10^4 \text{ kg/m}$ ,面内外惯性矩分别为  $I_{byy} = 9.8 \text{ m}^4$  和  $I_{bzz} = 10.0 \text{ m}^4$ .

如上所述有两种工况,即工况 1 为两根索在塔的同-边;对于工况 2,为两根索分别在塔的两边,且满足条件  $\theta_1 = \theta_2$ .图 2 为不同工况下,索和梁的刚度比  $K$  对耦合结构面内固有频率的影响,从索的模态函数(见作者文献[2])可以得知,由于特征值方程的特殊性,其解存在如下两种情况.第一种情况为特征值方程表现为结构的局部模态,此时特征值方程化简为  $\sin q_i \omega^{\text{in}} / 2 = 0$ ,由此可知参数刚度比  $K$  对耦合结构的固有频率没有影响.换句话说,可以认为耦合结构的固有频率互不干涉,即相对独立.不会受到梁及其他索参数的影响,对应着图形 2 中的直线线段.这就很好地解释了结构中局部模态的由来.第二种情况,即整体模态情形,参数刚度比  $K$  对耦合结构的固有频率影响十分显著.如图 2(a) 和图 2(b) 所示,在工况 1 和工况 2 情况下,参数  $K$  对结构频率的影响是有明显区别的.对于这两种工况,在特征值方程为第二种情况下,其频率变化对参数  $K$  的变化表现十分敏感.

工况 1 中,耦合结构的固有频率受参数  $K$  的

影响明显,随着刚度比增大而增大,同时从图形可以很明显地看出,在刚度比  $K=0.0045, K=0.0078$  附近发生了“频率转向”现象.另外,如图 2(a)所示,在参数范围  $K=0.001 \sim 0.004$  区间可以看到第七阶和第八阶固有频率曲线相互十分接近且近似平行.在此范围内,第七阶和第八阶频率曲线在数值

上近似满足特征值方程的特殊形式,即第一种情况,且第七阶频率曲线在此范围内数值大小接近  $4\pi$ ,此时有可能发生“模态局部化”现象.值得注意的是,当在  $K=0.0045$  附近时,出现了不同于以往研究的“频率转向”现象,即三条频率曲线数值接近,经过一小段区间后随后迅速相互远离.

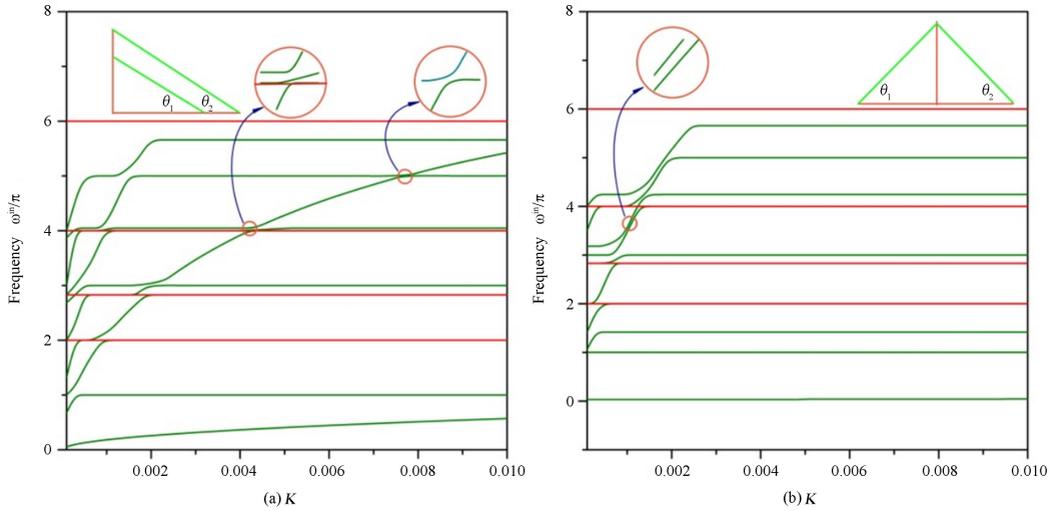


图 2 索梁刚度比  $K$  对面内频率的影响  
Fig.2 Influence of Cable Beam Stiffness Ratio  $K$  on Internal Frequency

工况 2 的频率变化如图 2(b)所示,对于工程常见的低阶频率,即第一阶和第二阶频率,结构频率曲线在很大一段范围内趋于直线且不受参数  $K$  变化影响.在参数初始的很小一段范围内,其频率值随参数变化剧烈.值得注意的是,当  $K=0.001 \sim 0.002$ ,此时第七阶和第八阶固有频率和以往的“频率转向”现象不同,即两条曲线近乎平行地接近了很大一段范围后才迅速分离,即发生“转向”.而在此处,相邻的三根频率曲线频率值十分接近.因此,索与索,索与梁之间的连接条件对耦合结构固有频率的影响是明显的.另外,我们还注意到,工况 2 的第一阶频率,其频率曲线在整段参数  $K$  范围内不受其变化影响,这和工况 1 是不同的.

### 2.3 双索—单梁耦合结构非线性动力学特性分析

接下来将基于多尺度法研究不同自由度离散下双索—单梁耦合结构的非线性动力学特性.同样地,通过 Galerkin 离散,可以将索—梁结构面内位移表示成状态空间函数形式,将前一小节的位移表示形式  $v = \{\varphi_{ci}(x_{ci}), \varphi_b(x_b)\}^T e^{i\omega_{in}t}$  改写为状态空间函数形式,则位移函数可以表示为:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(t) \Upsilon_m(x),$$

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(t) \Upsilon_m(x), \quad (21)$$

其中  $\Upsilon_m(x) = (\varphi_c(x), \varphi_b(x))^T$ .将上述形式代入双索—单梁结构运动方程,可以得到一系列常微分方程,限于本文篇幅,具体过程可见文献[2].下面通过图 3 和图 4 给出典型的非线性特性.

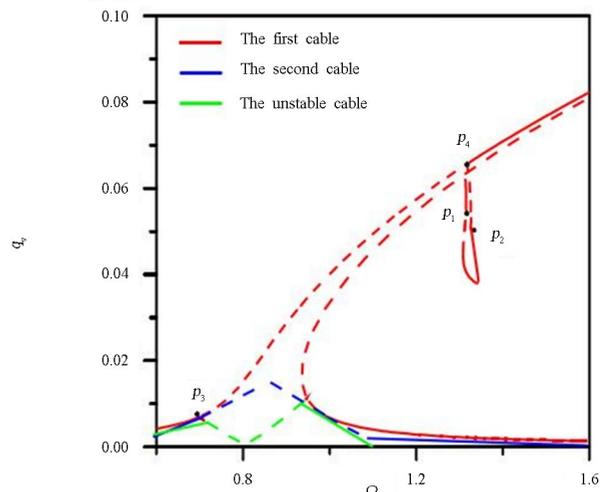


图 3 工况 1 情况下面内两根索的共振影响  
Fig.3 Resonance effect of two cables under condition 1

对于工况 1,结合图 1 所示结构,利用方程式 (19),根据多尺度法可得到结构的二自由度的调谐方程,这里我们主要探讨其在共振处的第一个峰值点.图 3 显示了通过直接应用于 2-dof 模态方程的延拓法获得的频率响应曲线,纵坐标为模态振幅.对于特征值方程的第一种情况,当第一根索发生了共振,第二根索受到的影响可以忽略.对于第一根索,在这个狭窄的不稳定区域中,第一个解分支通过  $P1$  和  $P2$  中的静态分岔失去稳定性,产生了周期耦合运动,振幅如图 3 所示,与强迫频率有关.

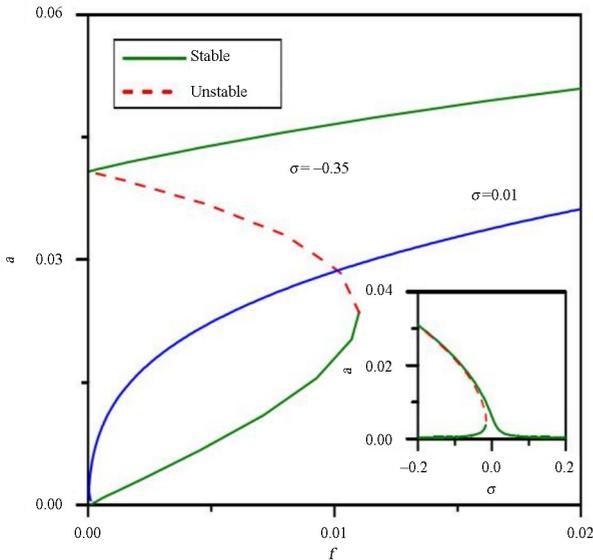


图 4 双索单梁结构的单自由度幅频响应曲线

Fig.4 The single degree of freedom amplitude frequency response curve of double cable single beam structure

图 4 为双索—单梁耦合结构的单自由度幅频响应曲线.我们发现单模态离散在很大程度上还是能较准确地反映结构模态的非线性特性,即结构模态的软弹簧特性能够得到较好的体现.不过与图 3 不同,图 3 为双索单梁耦合结构的 2 自由度幅频响应曲线,2:1 内共振的发生,会导致结构模态的非线性特性发生跳跃变化而使得模态变为硬弹簧特性.即 2-dofs 系统能表现出结构的这种非线性跳跃特性,而对于图 4 所示的单自由度系统,在共振区域则不能体现结构的硬弹簧特性.因此,单模态假设能很好地反映结构的非线性性质,即整个参数范围内结构模态表现出软弹簧特性,但只限于非共振区域,在共振区域,应用多自由度系统来表现结构的非线性特性更为准确.

### 3 结论

本文利用扩展的哈密顿原理,导出了多索—单梁耦合结构的面内非线性运动微分方程.根据分离变量法,得到了索—梁耦合结构的多自由度运动微分方程.结果表明:不同于以往研究资料中的“频率转向”现象(当两条频率曲线在频率值十分接近时,会迅速分离),即三条频率曲线数值接近,经过一小段区间后迅速相互远离.两种工况下,参数的变化会对耦合结构产生不同的影响,频率带宽范围受结构工况的不同而变化较明显.另外,单模态假设能很好地反映结构的非线性性质,即整个参数范围内结构模态表现出软弹簧特性,但只限于非共振区域,在共振区域,应用多自由度系统来研究结构的非线性特性更为合适.

### 参考文献

- [1] 康厚军,郭铁丁,赵跃宇.大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J].力学学报,2016,48(3): 519—535.  
KANG H J, GUO T D, ZHAO Y Y. Review on non-linear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 519—535. (in Chinese)
- [2] 王志攀.索梁组合体系的振动研究[D].长沙:湖南大学,2014.  
WANG Z Q. The vibration research of the cable-stayed beam systems [D]. Changsha: Hunan University, 2014. (in Chinese)
- [3] MAO X Y, DING H, CHEN L Q. Forced vibration of axially moving beam with internal resonance in the supercritical regime [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 131: 81—94.
- [4] 郎君,申永军,杨绍普.半主动控制接地式动力吸振器参数优化及性能比较[J].动力学与控制学报,2019,17(2):168—177.  
LANG J, SHEN Y J, YANG S P. Parameter optimization and performance comparison of semi-active ground-hook control dvas [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(2): 168—177. (in Chinese)
- [5] 汪正兴,任文敏,陈开利.斜拉索杆杆质量减振器的减振分析[J].工程力学,2007(11):153—157.  
WANG Z X, REN W M, CHEN K L. Analysis of vi-

- bration reduction of cable-stayed lever mass damper [J]. *Engineering Mechanics*, 2007(11):153–157. (in Chinese)
- [6] WANG W X, HUA X G, WANG X Y, et al. Mechanical behavior of magnetorheological dampers after long-term operation in a cable vibration controls system [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2019, 26: e2280.
- [7] PENG J, XIANG M J, WANG L H, et al. Nonlinear primary resonance in vibration control of cable-stayed beam with time delay feedback [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 137: 106488.
- [8] DING H, ZHU M H, CHEN L Q. Nonlinear vibration isolation of a viscoelastic beam [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(2):325–349.
- [9] 李炆, 谭霞, 丁虎, 等. 两端带有弹簧支撑的轴向运动梁振动分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2019(4):45–50.
- LI Y, TAN X, DING H, et al. Nonlinear transverse vibration of an axially moving beam with vertical spring boundary [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2019(4): 45–50. (in Chinese)
- [10] WANG Z, YI Z, LUO Y. Energy-based formulation for nonlinear normal modes in cable-stayed beam [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 264: 176–186.
- [11] DING H, LI Y, CHEN L Q. Nonlinear vibration of a beam with a symmetric elastic supports [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95(3):2543–2554.
- [12] ZHANG X, XU J, JI J. Modelling and tuning for a time-delayed vibration absorber with friction [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 424: 137–157.
- [13] ZHAO X. Forced vibration analysis of Timoshenko double beam system under compressive axial load by means of Green's functions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 464:115001.
- [14] LI M W. Analytical study on the dynamic response of a beam with axial force subjected to generalized support excitations [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 338: 199–216.
- [15] SUN L M, HONG D X, CHEN L. Cables interconnected with tuned inerter damper for vibration mitigation [J]. *Engineering Structures*, 2017, 151(15): 57–67.