

温度变化对悬索全局动力学特性影响^{*}

吴先强 赵兆冰[†] 郭智锐 陈林聪

(华侨大学 土木工程学院, 厦门 361021)

摘要 索是一类工程中常用的张力结构,其柔度大、阻尼轻,在各类外部荷载作用或端部位移激励下极易发生大幅振动,影响结构安全运营.已有研究表明悬索的振动特性对于温度变化极为敏感,因此本文同时考虑支座运动引起的参数共振以及模态间 1:2 内共振,基于全局分岔理论,系统探究温度变化对悬索全局动力学行为的影响.首先引入张力改变系数,建立考虑整体温度变化影响与受参数激励悬索的面内非线性运动微分方程.采用 Galerkin 法进行离散,利用多尺度法得到该非线性系统直角坐标形式的平均方程,并基于坐标变换,将平均方程简化为规范形,采用能量相位法研究温度变化时悬索多脉冲混沌动力学行为.通过能量差函数的零点条件以及扰动系统下中心点的吸引域范围,分析激励幅值、阻尼系数和调谐参数的取值范围,并计算该四维系统的 Lyapunov 指数.研究结果表明:温度变化会影响系统 Shilnikov 型多脉冲同宿轨道的产生;随着温度变化,多脉冲同宿轨道可能消失,导致系统的混沌运动转变为周期运动;受温度变化影响,动力系统可能展现出截然不同的动力学行为.

关键词 悬索, 温度变化, 全局分岔, 能量相位法, 混沌

中图分类号:O322

文献标志码:A

Influences of Temperature Changes on Global Dynamical Characteristics of Suspended Cables^{*}

Wu Xianqiang Zhao Yaobing[†] Guo Zhirui Chen Lincong

(College of Civil Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

Abstract The suspended cable is a type of commonly used tension structure in engineering structures. It has high flexibility and light damping, and it is prone to large vibrations under various excitations and/or support motions, which endangers the safety of the cable structures. The previous studies have shown that the vibration characteristics of the dynamic system are very sensitive to temperature changes. Therefore, this paper considers both the parametric resonances caused by the support motions and the two-to-one internal resonances, and then it systematically explores the influences of temperature changes on the suspended cable's dynamic behaviors from the perspective of global bifurcations. Firstly, the tension variation coefficient is introduced, and the nonlinear differential equations of the in-plane motion of the suspended cable subjected to parametric excitation in thermal environments is established. The Galerkin method is used for discretization, and the multiple scales method is adopted to obtain the average equation of the nonlinear system in rectangular coordinates. Based on the coordinate transformation, the average equation is simplified into a normal form. The energy phase method is used to explore the multi-

2022-12-25 收到第 1 稿,2023-04-03 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金面上项目(12272139),福建省自然科学基金面上项目(2022J01290),福厦泉国家自主创新示范区协同创新平台项目(3502ZCQXT2022002),National Natural Science Foundation of China(12272139),Natural Science Foundation of Fujian Province (2022J01290),Collaborative Innovation Platform Project of Fuzhou-Xiamen-Quanzhou National Self-Innovation Zone (3502ZCQXT2022002).

[†] 通信作者 E-mail:ybzhao@hqu.edu.cn

pulse chaotic dynamical behavior of the suspended cable when the temperature is changed. Through the zero-point condition of the energy-difference function and the range of attraction of the center point under the disturbance system, the excitation amplitude, damping coefficient and detuning parameters of the system are explored, and the Lyapunov exponents of the four-dimensional system are calculated. Numerical examples show that: temperature changes affect the generation of system's Shilnikov-type multi-pulse orbits. The multi-pulse orbits may disappear considering temperature effects, and it causes the system's chaotic motions transform into periodic motions. The dynamical system may exhibit distinct vibration behaviors in thermal environments.

Key words suspended cable, temperature change, global bifurcation, energy-phase method, chaos

引言

由于索结构线形美观、柔度大、质量轻以及强度高特点,被广泛运用于各类工程中.众所周知,各类索结构极易受到外界环境因素影响^[1],例如在太阳辐射等影响下,温度场会不断变化,从而引起结构热胀冷缩.国内外学者对索结构在温度场中的静、动力特性开展了大量研究^[2-6].此外,受支座位移运动引发的参数共振,将导致拉索展现出复杂的非线性动力学行为^[7,8].倘若进一步考虑温度变化影响,系统的振动特性会产生明显的定性和定量变化,进而影响索结构的安全性和稳定性.

近年来随着全局分岔理论的不完善,诸如混沌之类的复杂非线性动力现象被人们进一步了解和认知.张伟等^[9]全面系统总结了高维非线性系统中多脉冲混沌理论,指出了全局分岔理论在工程应用中的现状和展望.尤其对于悬索这类典型的、同时包含平方和立方非线性的系统,全局分岔理论可以很全面地描述其非线性动力学行为.Zhang和Tang^[10]基于全局摄动方法研究了悬索在参数激励和外界环境激励耦合作用下的全局分岔现象和混沌行为.Chen和Xu^[11]基于能量相位法研究了斜拉索的 Shilnikov 同宿轨道以及混沌动力学行为.Zhang等^[12]借助高维 Melnikov 方法证明了张紧弦在 1:2 内共振情况下存在 Shilnikov 同宿轨道.

除悬索、斜拉索和弦等张力结构外,有学者通过广义 Melnikov 方法和能量相位法研究了板、壳和天线等基本结构的混沌动力学和多脉冲轨道.An和Chen^[13]研究了气动热弹性功能梯度材料(FGM)截锥壳在复杂载荷作用下 1:2 内共振和

主参数共振情况下全局分岔和多脉冲轨道.高美娟等^[14]依据三阶剪切变形层合板理论,研究压电复合材料层合板在 1:2:4 内共振情况下的全局动力学.孙莹等^[15]通过能量相位法研究热应力下环形桁架天线混沌运动.

针对悬索这类典型的工程柔性结构,Zhao等^[5,6]基于局部分岔分析发现:温度变化会引起动力系统参数的微小改变,进而导致其整体非线性振动特性产生明显定性和定量的改变.倘若进一步采用全局分岔分析,可以从能量轨道的角度更好解释以及探究动力系统复杂的运动行为^[9].由此可见:一方面温度变化对支座位移运动引发的参数激励下悬索动力学行为影响有待进一步研究;另一方面基于全局分岔理论描述温度变化对系统动力学行为的影响更鲜有报道.因此本文将局部分岔分析^[6]拓展到全局分岔分析,采用 Galerkin 法和多尺度法并基于规范型理论和能量相位法,系统探究温度变化对悬索全局动力行为尤其是多脉冲轨道的影响,揭示温度变化下动力系统可能出现的大幅振动机理.

1 运动方程及摄动分析

1.1 数学模型

如图 1 所示,悬索水平悬挂于 O 和 B 之间,以 O 为原点,建立直角坐标系 $O-xy$, L 和 b 分别代表悬索的跨度和初始垂度.本文考虑支座位移引发的共振响应,图中 Δ 表示支座位移最大值,水平和垂直方向最大位移分量分别为 Δ_x 和 Δ_y ,支座运动 Δ_A 表示为: $\Delta_A(t) = \Delta \cos \Omega t$,其中 Ω 表示支座运动的频率.

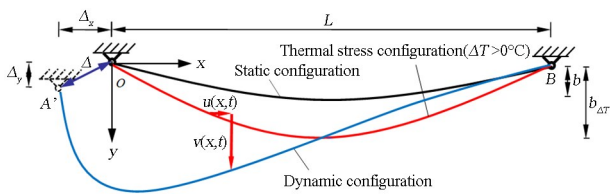


图1 悬索参数激励模型

Fig.1 Parametric excitation model of suspended cables

当环境温度发生整体改变时,基于增量热场理论,悬索将产生热应力构形^[2,3],此时张力改变,垂跨比随之变化,悬索的轴向和竖直方向位移分别用 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 表示。当不考虑温度变化影响时,利用 Hamilton 变分原理,可得悬索面内运动微分方程^[16]:

$$m\ddot{v}_t + c_v\dot{v} - H v'' + \left[EA(y' + v') \left(u' + y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right) \right]' = 0 \quad (1)$$

其中:点表示对 t 求导,撇表示对 x 求导, EA 表示抗拉刚度, H 表示初始水平张力, c_v 表示阻尼系数,悬索的静态构形用抛物线表示: $y = 4bx(L - x)/L^2$ 。

在支座运动引发的参数激励作用下,悬索的总加速度 \ddot{v}_t 由两部分组成:静态位移产生的加速度 \ddot{v}_0 以及动态应变产生的加速度 \ddot{v} 。由于垂度较小,分析时可以假设 \ddot{v}_0 是线性分布,此时 \ddot{v}_0 可表示为: $\ddot{v}_0(x,t) = -(1-x)\Omega^2\Delta_y\cos\Omega t$ 。

为描述简便,引入以下无量纲参数:

$$\begin{aligned} (\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) &= (x, u, v)/L, c_v = 2m\omega\zeta_v \\ \bar{t} &= (t/L)\sqrt{H/m}, \bar{\omega} = \omega L\sqrt{m/H} \\ \alpha &= EA/H, \mu = \xi_v\bar{\omega} \end{aligned} \quad (2)$$

其中: ω 表示固有频率, α 表示静态拉伸系数, ζ_v 示悬索垂向阻尼比。为表示简便,忽略上画线,可得支座运动激励下悬索面内运动方程:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + 2\mu\dot{v} - v'' - \alpha(y'' + v'') \times \\ \left[-\Delta_x\cos\Omega t + \int_0^1 \left(y'v' + \frac{1}{2}v'^2 \right) dx \right] = \\ (1-x)\Omega^2\Delta_y\cos\Omega t \end{aligned} \quad (3)$$

已有研究表明^[5]:温度变化会改变拉索张力以及垂跨比,其影响可通过引入张力改变系数 χ^2 来表示。因此在无量纲方程的基础上,可得考虑温度变化时悬索受参数激励的运动微分方程为^[5,6]:

$$\begin{aligned} \ddot{v} + 2\mu\dot{v} - \chi^2 v'' - \\ \alpha \left[-\Delta_x\cos\Omega t + \int_0^1 \left(\frac{y'v'}{\chi^2} + \frac{1}{2}v'^2 \right) dx \right] \times \\ \left(\frac{y''}{\chi^2} + v'' \right) = (1-x)\Omega^2\Delta_y\cos\Omega t \end{aligned} \quad (4)$$

采用 Galerkin 法对方程进行离散:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^N q_n(t)\varphi_n(x) \quad (5)$$

其中:考虑温度影响下的模态函数 $\varphi_n(x)$ 参考文献^[5]。

本文考虑仅发生内共振的两个模态,令 $N=2$,将方程(5)代入方程(4)中,方程两边同时分别乘模态函数 $\varphi_n(x)$,并从 0 到 1 积分,可得两自由度的运动微分方程组:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1 + \Lambda_{11}q_1^2 + \Lambda_{13}q_2^2 + \\ \Gamma_{11}q_1^3 + \Gamma_{12}q_1q_2^2 = P_1\cos\Omega t + K_1\cos\Omega tq_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 + \Lambda_{22}q_1q_2 + \\ \Gamma_{21}q_1^2q_2 + \Gamma_{22}q_2^3 = P_2\cos\Omega t + K_2\cos\Omega tq_2 \end{aligned} \quad (7)$$

其中:相关系数如附录所示。

1.2 摄动分析

采用多尺度法对方程(6)、(7)进行求解,引入摄动参数 ϵ 以及三个时间尺度: $T_0 = \epsilon^1 t$, $T_1 = \epsilon^2 t$, $T_2 = \epsilon^3 t$,将参数激励项和阻尼项摄动到二阶: $K_n = \epsilon^2 K_n$, $P_n = \epsilon^2 P_n$, $\mu_{1,2} = \epsilon^2 \mu_{1,2}$ 。外激励和固有频率间关系通过引入调谐参数 σ_1 和 σ_2 来表示: $\Omega = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_1$, $\Omega = \omega_2 + \epsilon\sigma_2$ 。

方程的解可以假设为 $q_i(t, \epsilon) = \sum_{j=1}^3 \epsilon^j q_{i,j}$,将 $q_i(t, \epsilon)$ 带入式(6)、(7)中,并令两边 ϵ^i 的系数相等。令 $q_i(t, \epsilon)$ 两边摄动参数系数相等,求解可得 $q_{n,1}$ 的表达式: $q_{n,1} = A_n(T_1, T_2)e^{i\omega_n T_0} + \bar{A}_n(T_1, T_2)e^{-i\omega_n T_0}$ ($n=1,2$),其中 A 和 \bar{A} 为一对共轭复数。将 $q_{n,1}$ 带入 $q_i(t, \epsilon)$ 中进行求解,通过消除长期项,可以得到方程(6)、(7)的平均方程:

$$\begin{aligned} -2D_2 A_1 i\omega_1 - 2\mu_1 i\omega_1 A_1 - 3\Gamma_{11} A_1^2 \bar{A}_1 + \\ K_1 \bar{A}_1 e^{i\sigma_1 T_2} / 2 - 2\Gamma_{12} A_1 A_2 \bar{A}_2 + \\ \frac{10\Lambda_{11}^2 A_1 A_1 \bar{A}_1}{3\omega_1^2} + \frac{4\Lambda_{11}\Lambda_{13} A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \\ \frac{2\Lambda_{13}\Lambda_{22} A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 + 2\omega_1\omega_2} - \frac{2\Lambda_{13}\Lambda_{22} A_1 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& P_2 e^{i\sigma_2 T_2} / 2 - 2\mu_2 i \omega_2 A_2 - 2D_2 A_2 i \omega_2 - \\
& 2\Gamma_{21} A_1 \bar{A}_1 A_2 - 3\Gamma_{22} A_2^2 \bar{A}_2 - \\
& \frac{\Lambda_{13} \Lambda_{22} A_2 A_2 \bar{A}_2}{4\omega_2^2 - \omega_1^2} + \frac{2\Lambda_{11} \Lambda_{22} A_1 A_2 \bar{A}_1}{\omega_1^2} + \\
& \frac{2\Lambda_{13} \Lambda_{22} A_2 A_2 \bar{A}_2}{\omega_1^2} - \frac{\Lambda_{22}^2 A_1 \bar{A}_1 A_2}{\omega_1^2 + 2\omega_1 \omega_2} - \\
& \frac{\Lambda_{22}^2 A_1 \bar{A}_1 A_2}{\omega_1^2 - 2\omega_1 \omega_2} = 0 \quad (9)
\end{aligned}$$

引入直角坐标: $A_m(t) = [p_m(t) - i q_m(t)] e^{i\beta_m} / 2$, 带入方程(8)、(9)中, 分离虚部和实部, 得直角坐标形式下的平均方程:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -\mu_1 p_1 + (k - \sigma_1/2) q_1 - \\
& \gamma_1 q_1 (p_1^2 + q_1^2) - \gamma_2 q_1 (p_2^2 + q_2^2) \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= -\mu_1 q_1 + (k + \sigma_1/2) p_1 + \\
& \gamma_1 p_1 (p_1^2 + q_1^2) + \gamma_2 p_1 (p_2^2 + q_2^2) \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{p}_2 &= -\mu_2 p_2 - \sigma_2 q_2 - \\
& \gamma_3 q_2 (p_1^2 + q_1^2) - \gamma_4 q_2 (p_2^2 + q_2^2) \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2 &= -\mu_2 q_2 + \sigma_2 p_2 + \gamma_3 p_2 (p_1^2 + q_1^2) + \\
& \gamma_4 p_2 (p_2^2 + q_2^2) - f \quad (13)
\end{aligned}$$

其中: $f = -P_2/2\omega_2$, $k = K_1/4\omega_1$, 其余系数如附录所示.

方程(10)~(13)确定了参数激励下悬索面内振动的相位和振幅, 因此通过该方程组研究悬索在温度场中多脉冲混沌动力学行为. 为了得到归一化方程, 需对平均方程(10)~(13)进行化简, 使用 Maple 程序进行计算^[17], 引入 $\mu_i = \varepsilon\mu_i$ ($i=1,2$), $f = \varepsilon f$ 以及线性变换: $p_1 = (1 - k + \sigma_1/2)u$, $p_2 = \sqrt{2I} \cos\varphi$, $q_1 = \mu_1 u + v$, $q_2 = \sqrt{2I} \sin\varphi$.

方程(10)~(13)可表示为可积的 Hamilton 系统:

$$\dot{u} = v = \partial H_0 / \partial v + \varepsilon \partial H_1 / \partial v \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\dot{v} &= u(2I\gamma_2 - \bar{\mu}_1) + \gamma_1 u^3 - 2\varepsilon\mu_1 v \\
&= -\partial H_0 / \partial u - \varepsilon(\partial H_1 / \partial u + 2\mu_1 v) \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{I} &= -2\varepsilon\mu_2 I - \varepsilon f \sqrt{2I} \sin\varphi \\
&= \frac{\partial H_0}{\partial \varphi} + \varepsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} - 2\mu_2 I \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \sigma_2 + \gamma_3 u^2 + \gamma_4 2I - \frac{\varepsilon f \cos\varphi}{\sqrt{2I}} = \\
& -\frac{\partial H_0}{\partial I} - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I} \quad (17)
\end{aligned}$$

其中: $\bar{\mu}_1 = \mu_1^2 + (k + \sigma_1/2)(k + \sigma_1/2 - 1)$.

因此系统(14)~(17)的哈密顿函数表示为:

$$\begin{aligned}
H_0 &= v^2/2 - I(\gamma_2 + \gamma_3) u^2 + u^2 \bar{\mu}_1/2 - \\
& \gamma_1 u^4/4 - \sigma_2 I - I^2 \gamma_4 \quad (18)
\end{aligned}$$

$$H_1 = f \sqrt{2I} \cos\varphi \quad (19)$$

2 无扰动系统动力学

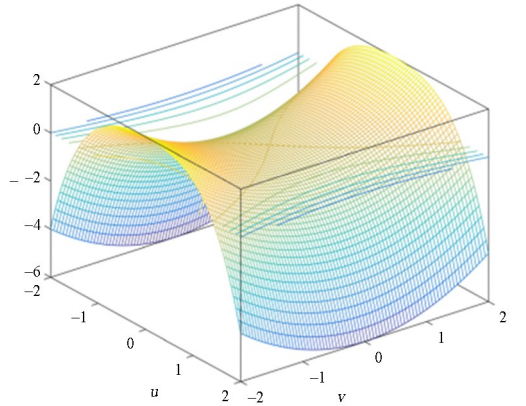
假设系统(14)~(17)中的扰动参数 $\varepsilon=0$, 那么余下系统中(14)、(15)不含 φ , 将 I 视作常数, 因此可将系统对于 (u, v) 平面和 (I, φ) 平面进行解耦, 得:

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= v \\
\dot{v} &= u(2I\gamma_2 - \bar{\mu}_1) + \gamma_1 u^3 \quad (20)
\end{aligned}$$

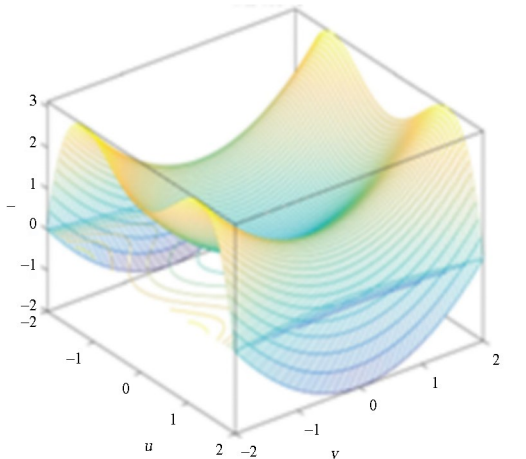
此时系统(20)的哈密顿函数简化为:

$$\bar{H}(u, v) = v^2/2 + \eta u^2/2 - \gamma_1 u^4/4 \quad (21)$$

其中: $\eta = \bar{\mu}_1 - 2I\gamma_2$.



(a) 稳定轨道: $\eta < 0, \gamma_1 > 0$
(a) stable orbits: $\eta < 0, \gamma_1 > 0$



(b) 异宿分岔: $\eta > 0, \gamma_1 > 0$
(b) heteroclinic bifurcation: $\eta > 0, \gamma_1 > 0$

图2 三维相空间流形结构图

Fig.2 Three-dimensional phase space manifold structure diagrams

基于方程(21),绘制系统(20)在三维相空间中的流形结构图.如图2所示,当 $\eta > 0$,系统(20)将出现异宿分岔.当 $\eta < 0$,系统的唯一解为零解 $(u, v) = (0, 0)$,该零解为鞍点.在曲线 $\bar{\mu}_1 - 2I\gamma_2$ 上,即 $I = \bar{\mu}_1/2\gamma_2$ 的零解通过叉型分岔由一个变为三个,不妨将三个解分别记为 $q_0(I) = (0, 0)$, $q_{\pm}(I) = (D, 0)$,由方程(20)的零解条件可以得到 D :

$$D = \pm [(\bar{\mu}_1 - 2\gamma_2 I) / \gamma_1]^{1/2} \quad (22)$$

观察图2(b)可知 $q_0(I)$ 为轨道中心, $q_{\pm}(I)$ 为轨道鞍点.由于异宿轨道可能产生混沌运动,故本文主要研究图2(b)这类情况.对于所有的 $I \in [0, I_1]$,方程(20)有一个鞍点 $q_{\pm}(I)$ 和它自身的异宿轨道相连.

四维空间 (u, v, I, φ) 由下式定义:

$$M_0 = \left\{ (u, v, I, \varphi) \left| \begin{array}{l} u = q_{\pm}(I), v = 0, \\ 0 < I < I_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right. \right\} \quad (23)$$

系统(20)异宿轨道的表达式:

$$\begin{aligned} u(T_1) &= \pm \sqrt{\frac{\eta}{\gamma_1}} \tanh(\delta) \\ v(T_1) &= \pm \frac{\eta}{\sqrt{2\gamma_1}} \operatorname{sech}^2(\delta) \end{aligned} \quad (24)$$

其中: $\delta = (\sqrt{2}/2)T_1$.

将无扰动系统限制在 M_0 上再进行分析,对于任意 $I \in [0, I_1]$,满足 $D_I H[q_0(I), I] = 0$ 的值 I 被称为共振值,记作 I_r ,当 $I = I_r$ 时可以得到此时连接异宿轨道的相位漂移角:

$$\Delta\varphi = -2\sqrt{2\eta} \cdot (\gamma_3/\gamma_1) \quad (25)$$

3 多脉冲混沌轨道

由于不变流形 M_0 在微小的非零扰动 ϵ 影响下是不动的,所以 M_0 在小扰动的持续作用下变为 M_{ϵ} :

$$M_{\epsilon} = \left\{ (u, v, I, \varphi) \left| \begin{array}{l} u = q_0(I), v = 0, \\ 0 < I < I_1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right. \right\} \quad (26)$$

将系统(14)~(17)限制在 M_{ϵ} 上后,对 $\sqrt{\epsilon}$ 进行Taylor展开,同时引入变换 $I = I_r + \sqrt{\epsilon}h$ 及 $\tau = \sqrt{\epsilon}T_1$,得:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= -2I_r\mu_2 - f \sin\varphi \sqrt{2I_r} - \\ & (2\mu_2 + f \sin\varphi / \sqrt{2I_r}) \sqrt{\epsilon}h + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= -(2\gamma_3\gamma_2/\gamma_1 + 2\gamma_4)h - \\ & \sqrt{\epsilon}f \cos\varphi / \sqrt{2I_r} + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (28)$$

其中: $\dot{h}, \dot{\varphi}$ 分别表示对 τ 求导.当扰动参数 ϵ 趋向于零时,令方程(27)、(28)中 $\dot{h} = 0, \dot{\varphi} = 0$,得到两个不动点:

$$p = (0, \varphi_c) = [0, -\arcsin(\mu_2 \sqrt{2I_r}/f)] \quad (29)$$

$$q = (0, \varphi_s) = [0, \pi + \arcsin(\mu_2 \sqrt{2I_r}/f)] \quad (30)$$

其中:不动点 p 是中心, q 是鞍点.经过鞍点 q 存在一个同宿轨道与自身相连,同时不动点 p 周围有许多周期轨道.当扰动参数 ϵ 足够小时,中心不动点 p 会下沉变为 p_{ϵ} ,连接 q_{ϵ} 的同宿轨道破裂, q_{ϵ} 不稳定流形逐渐趋近于 p_{ϵ} .

方程(27)、(28)的哈密顿函数数值保持不变,可得 φ_n 与 φ_s 的关系式:

$$\begin{aligned} \arcsin(\mu_2 \sqrt{2I_r}/f) + \sqrt{f^2 - \mu_2^2 2I_r} / \mu_2 \sqrt{2I_r} = \\ \varphi_n - f \cos\varphi_n / \mu_2 \sqrt{2I_r} - \pi \end{aligned} \quad (31)$$

基于Haller和Wiggins给出的表达式^[18],耗散情况下 n 阶能量差函数表示为:

$$\begin{aligned} \Delta^n \dot{H}_D = \dot{H}_D(h, \varphi + n\Delta\varphi) - \dot{H}_D(h, \varphi) - \\ n \int_A [dg^n/du + dg^n/dv] dudv - n \int_{\alpha A_t} g^I d\varphi \end{aligned} \quad (32)$$

耗散情况下 n 阶能量差分函数转化为:

$$\begin{aligned} \Delta^n \dot{H}_D = -2f \sqrt{2I_r} \sin(\varphi + \\ n\Delta\varphi/2) \sin(n\Delta\varphi/2) - n\mu_1 4\sqrt{2}\eta^{3/2}/3\gamma_1 \end{aligned} \quad (33)$$

方程(27)、(28)存在非退化平衡点 $p \equiv (h, \varphi_c) = (0, \varphi_c)$,通过中心点 p 的能量差函数横截零点可得:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{f} \{ [N(4\sqrt{2}\eta^{3/2}/3\sqrt{2I_r}\gamma_1) - \sqrt{2I_r} \sin(N\Delta\varphi)]^2 + \\ 2I_r [\cos(N\Delta\varphi) - 1]^2 \}^{1/2} = \cos(N\Delta\varphi) - 1 \end{aligned} \quad (34)$$

假设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu$,当 $\Delta\varphi$ 满足条件 $\Delta\varphi \neq 2m\pi/N$, $m \in Z$,同时系统满足下列非退化条件,据此可判断系统是否在 N -脉冲轨道上发生跳跃:

$$\begin{aligned} \sqrt{2I_r} \{ \cos[-\arcsin(\mu \sqrt{2I_r}/f) + n\Delta\varphi] - \\ \cos[-\arcsin(\mu \sqrt{2I_r}/f)] \} - \end{aligned}$$

$$\mu 4\sqrt{2}\eta^{\frac{3}{2}}/3f\gamma_1 \neq 0 \quad (35)$$

最后,需要确定从慢流形上起跳的任意一个 N -脉冲轨道的降落点必须落在焦点的吸引域 A_c 之内. 考虑区间 $[-\pi, \pi]$ 内的一点, 它的降落点与 $\varphi_c + N\Delta\varphi$ 的相位差约 $2k\pi$, 降落点可以表示为:

$$\varphi_f^N = \varphi_s + (\varphi_c + N\Delta\varphi - \varphi_s) \bmod 2\pi \quad (36)$$

其中: φ_s 和 φ_c 如公式(29)、(30)中所表示. 如果 $\varphi_f^N > \varphi_s$, 将 φ_f^N 减去 $2k\pi$ 后重新定义 φ_f^N , 验证降落点平移 $2k\pi$ 后是否还在鞍点 φ_s 附近, 如果 φ_f^N 的能量大于鞍点 φ_s 的能量, 则:

$$\dot{H}_D(0, \varphi_f^N) > \dot{H}_D(0, \varphi_s) \quad (37)$$

$$\cos\varphi_f^N - \cos\varphi_s > \mu\sqrt{2I_r}(\varphi_f^N - \varphi_s)/f \quad (38)$$

当降落点落在吸引域之内, 系统可能存在混沌运动.

4 数值算例和分析

本文的数值算例中, 悬索的参数选取^[19]: $L = 850\text{m}$, $\rho = 8376\text{kg/m}^3$, $E = 1.794 \times 10^{11}\text{Pa}$, $A = 0.1159\text{m}^2$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.005$, $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$, 结合实际工程情况, 温度变化 $\Delta T = \pm 40^\circ\text{C}$. 图 3 给出了温度变化以及 Irvine 参数 ($\log\lambda^2$) 对悬索的前六阶固有频率的影响. 图中放大处, 二阶正对称模态和一

阶反对称模态频率之间呈现两倍关系, 系统可能发生 2:1 内共振, 温度变化下系统的各参数和系数大小如表 1 所示.

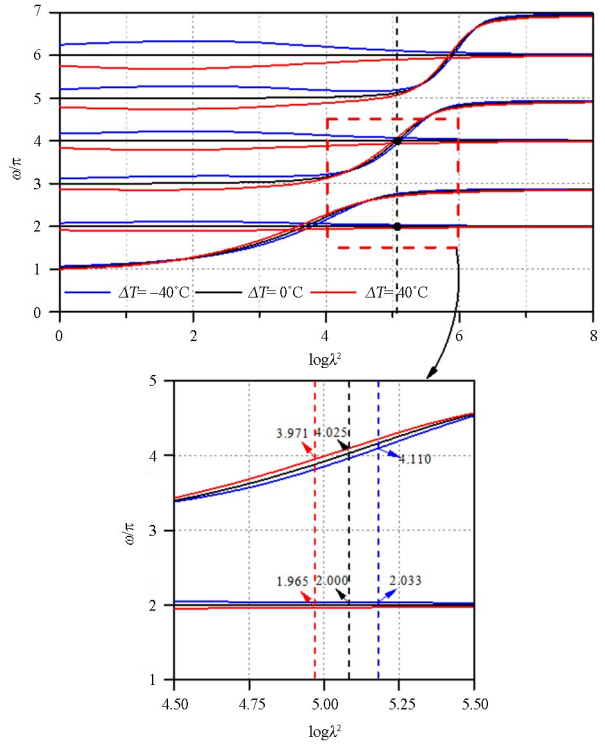


图 3 考虑温度变化影响下悬索的前六阶模态频率
Fig.3 First six natural frequencies of suspended cable considering temperature changes

表 1 考虑温度变化影响的悬索参数

Table 1 Parameters of suspended cables considering temperature changes

| $\Delta T/(^\circ\text{C})$ | $\log\lambda^2$ | ω_1/π | ω_2/π | γ_1 | γ_2 | γ_3 | γ_4 |
|-----------------------------|-----------------|----------------|----------------|------------|------------|------------|------------|
| 0 | 5.081 | 2.000 | 4.025 | 100421 | -3283786 | -3325905 | 1679014 |
| -40 | 4.988 | 1.965 | 3.971 | 100024 | -2369095 | -2410619 | 1221176 |
| 40 | 5.192 | 2.033 | 4.110 | 103469 | -2627149 | -2670119 | 1351414 |

表 2 考虑温度变化影响的 Lyapunov 指数和吸引子类型

Table 2 Lyapunov exponents and attractors types considering temperature changes

| $\Delta T/(^\circ\text{C})$ | γ_1 | γ_2 | γ_3 | γ_4 | Attractors types |
|-----------------------------|------------|------------|------------|------------|------------------|
| 0 | 0.00046 | -0.00465 | -0.00537 | -0.01044 | Periodic |
| -40 | 0.07520 | 0.00023 | -0.00986 | -0.08557 | Chaotic |
| 40 | 0.00016 | -0.00450 | -0.00535 | -0.01032 | Periodic |

采用四阶龙格库塔法计算方程组(10)~(13), 并计算该四维系统的 Lyapunov 指数. 假设支座横向振动幅值 $\Delta_x = 0.0001$, 当调谐参数 $\sigma_2 = -0.10$ 时, 选取脉冲轨道数 $N = 3$. 此时三组 γ_i 均大于 0, 为了使系统在该环境下产生异宿轨道, 必须让方程(22)

中的 D^2 为正数, 即 $\eta = \bar{\mu}_1 - 2I\gamma_2 > 0$.

图 4 表示不同温度场中悬索产生异宿轨道的条件. 当 $\Delta T = -40^\circ\text{C}$ 或 0°C 时, $\eta > 0$ 的解集为闭集, 而当 $\Delta T = +40^\circ\text{C}$ 时, $\eta > 0$ 的解集为开集. 选取 -40°C 这组参数, 当 σ_1 在 $[0.30775, 1.25072]$ 范围

内,系统(20)产生异宿轨道.当 $\sigma_1=0.483$ 时,带入方程(34)得到满足能量差函数横截零点的激励 $f=1.4724 \times 10^{-4}$.此时共振值 $I=I_r=3.4671 \times 10^{-8}$,相位漂移值 $\Delta\varphi=2.0862$.通过求解方程(36),可得: $\varphi_f^N=6.2409, \varphi_s=3.1595, \cos(\varphi_f^N) - \cos(\varphi_s) = 1.9989, \mu \sqrt{2I_r}(\varphi_f^N - \varphi_s)/f = 0.0276$.系统参数满足方程(37)、(38),即可能出现混沌响应.

图5分别表示 $\Delta T=0^\circ\text{C}, -40^\circ\text{C}, 40^\circ\text{C}$ 时,该动力系统的时程曲线、相位图和庞加莱截面.如图所示,温度变化 ΔT 为 0°C 以及 40°C ,图5(a)和5(c)时程曲线在一段时间运动后将逐渐趋于稳定,最大无量纲振幅减小约为0.0002.二者相位图呈现为闭合圆环,庞加莱截面均表现为杂乱但有限的点集.

由表2可知,这两种温度变化条件下,其Lyapunov指数均为(零,负,负,负),即可判定,当 0°C 及 40°C 时,系统吸引子类型均为周期型.

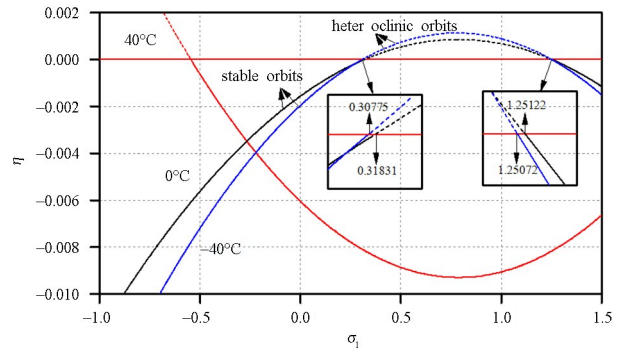


图4 考虑温度变化影响的系统异宿轨道产生条件
Fig.4 Conditions for the generation of system's heteroclinic orbits considering temperature changes

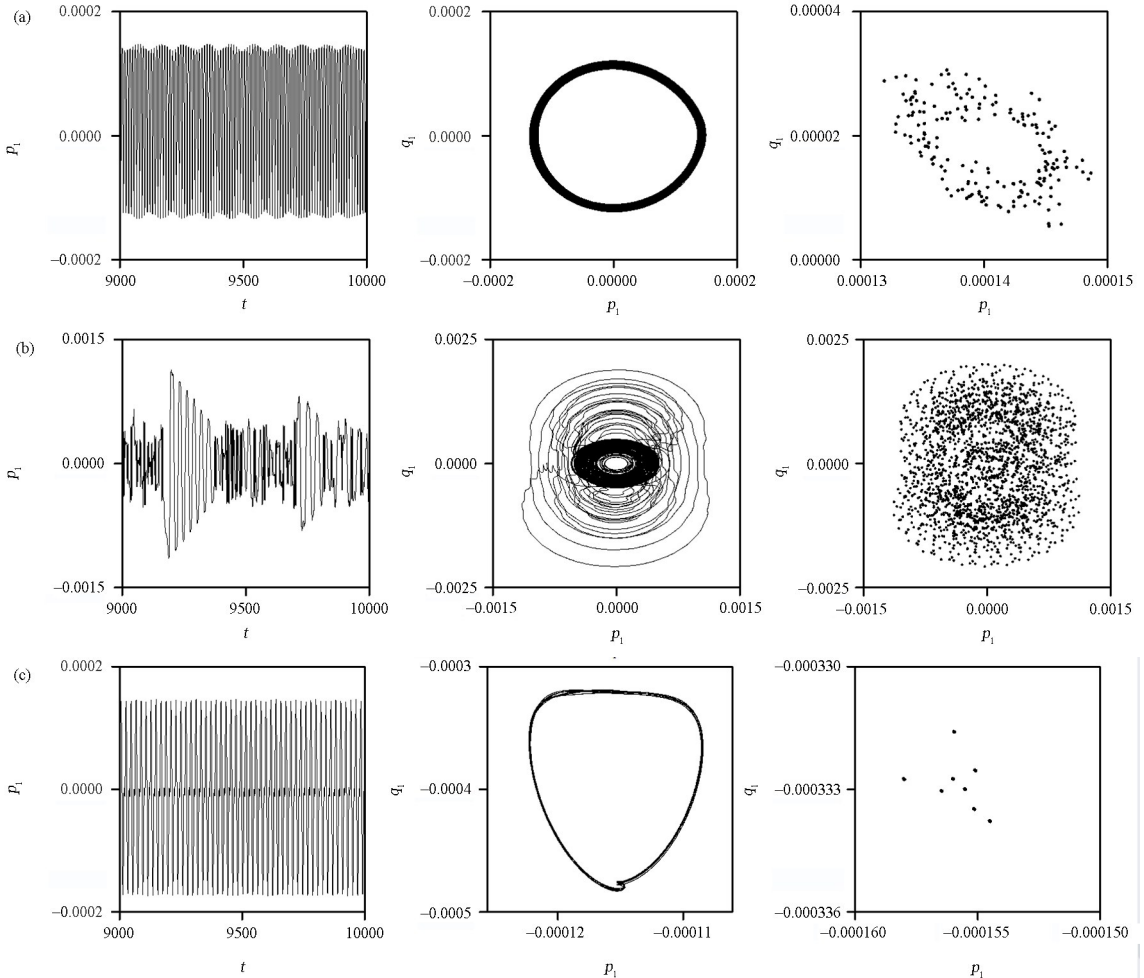


图5 考虑温度变化影响的时程曲线,相位图,庞加莱截面:(a) 0°C ; (b) -40°C ; (c) 40°C

Fig.5 Time history curve, phase diagram, Poincaré section considering temperature changes: (a) 0°C ; (b) -40°C ; (c) 40°C

然而,当 $\Delta T=-40^\circ\text{C}$ 时,系数满足方程(37)-(38)条件,即图5(b)所示的运动存在多脉冲Shilnikov型轨道.对比图5中三组时程曲线,当

$\Delta T=-40^\circ\text{C}$ 时,很长一段时间后运动仍没有趋于稳定,最大振幅约为0.001.此时图5(b)中相位图和庞加莱截面图均表现出系统存在无法预知的运动

行为.同理计算得到的 -40°C 的 Lyapunov 指数为(正,零,负,负),如表2所示,其中最大 Lyapunov 指数大于零,即判定该运动存在混沌吸引子,并且该混沌为多脉冲 Shilnikov 型轨道混沌.

由此可见,当 $\Delta T = -40^{\circ}\text{C}$ 时,系统存在混沌吸引子,且伴随无序的大幅振动.此时动力系统的振动幅值难以准确预测,由此导致的大幅振动可能会影响结构的安全.当不考虑温度变化(0°C)或者变化升高(40°C)时,系统参数不再满足能量差函数的零解条件,Shilnikov 型多脉冲轨道消失,混沌运动也随之消失,最大振幅明显下降.由此可见温度变化有可能明显改变动力系统的吸引子类型以及系统的振动幅值.

5 结论

温度变化会直接改变悬索静态构形,导致其固有频率及非线性系数发生改变,影响频率间的公倍关系,进而引发系统全局动力学行为产生变化.当悬索存在 Shilnikov 型多脉冲轨道并产生混沌运动时,温度变化会影响悬索系统中 Shilnikov 型多脉冲轨道的产生条件.在异宿轨道参数限制下,相同的激励条件,温度变化可能会引起产生混沌响应的多脉冲轨道消失,导致动力系统展现出截然不同的动力学行为,改变系统的共振响应幅值,影响结构安全.

参考文献

- [1] 刘永健,刘江,张宁.桥梁结构日照温度作用研究综述[J].土木工程学报,2019,52(5):59-78.
LIU Y J, LIU J, ZHANG N. Review on solar thermal actions of bridge structures [J]. China Civil Engineering Journal, 2019, 52(5): 59-78. (in Chinese)
- [2] LEPIDI M, GATTULLI V. Static and dynamic response of elastic suspended cables with thermal effects [J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49: 1103-1116.
- [3] TREYSSSEDE F. Finite element modeling of temperature load effects on the vibration of local modes in multi-cable structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 413: 191-204.
- [4] MA L, XU H, MUNKHBAATAR T, et al. An accurate frequency-based method for identifying cable

tension while considering environmental temperature variation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 490: 115693.

- [5] ZHAO Y, PENG J, ZHAO Y, et al. Effects of temperature variations on nonlinear planar free and forced oscillations at primary resonance of suspended cables [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89: 2815-2827.
- [6] 林恒辉,赵珖冰.温度变化对悬索非线性内共振响应特性影响[J].振动与冲击,2021,40(8):165-172.
LIN H H, ZHAO Y B. Influences of temperature on suspended cables' nonlinear vibration characteristics considering internal resonances [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(8): 165-172. (in Chinese)
- [7] 李凤臣,杨鸥,田石柱,等.考虑前2阶模态组合的拉索非线性参数共振研究[J].防灾减灾工程学报,2015,35(2):249-255.
LI F C, YANG O, TIAN S Z, et al. Nonlinear parametric resonance of cable in consideration of first two modes combination [J]. Journal of Disaster Prevention and Mitigation Engineering, 2015, 35(2): 249-255. (in Chinese)
- [8] 汪峰,李春清,刘章军,等.考虑附加刚度的黏滞阻尼器-斜拉索参数振动模型及控制分析[J].振动与冲击,2020,39(22):183-191.
WANG F, LI C Q, LIU Z J, et al. Parametric vibration model for a viscous damper-cable system considering the effect of additional stiffness [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(22): 183-191. (in Chinese)
- [9] 张伟,姚明辉,张君华,等.高维非线性系统的全局分岔和混沌动力学研究[J].力学进展,2013,43(1):63-90.
ZHANG W, YAO M H, ZHANG J H, et al. Study of global bifurcations and chaotic dynamics for high-dimensional nonlinear [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 63-90. (in Chinese)
- [10] ZHANG W, TANG Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations [J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 2002, 37: 505-526.
- [11] CHEN H K, XU Q Y. Bifurcations and chaos of an inclined cable [J]. Nonlinear Dynamics, 2009, 57: 37-55.
- [12] ZHANG X H, CHEN F Q, JING T Y. Global bifurcations of a taut string with 1:2 internal resonance

- [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19: 776–788.
- [13] AN F X, CHEN F Q. Multi-pulse chaotic motions of functionally graded truncated conical shell under complex loads [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 89(3): 1753–1778.
- [14] 高美娟, 张伟, 姚明辉, 等. 压电复合材料层合板的混沌动力学研究 [J]. 振动与冲击, 2009, 28(6): 82–85.
GAO M J, ZHANG W, YAO M H, et al. Chaotic dynamics of the laminated composite piezoelectric rectangular plate [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(6): 82–85. (in Chinese)
- [15] 孙莹, 张伟, 吴瑞琴. 六维系统环形桁架天线的非线性动力学分析 [J]. 应用数学和力学, 2019, 40(3): 282–300.
SUN Y, ZHANG W, WU R Q. Analysis on nonlinear dynamics of circular truss antennae in 6D systems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(3): 282–300. (in Chinese)
- [16] DEMSIC M, UROS M, LAZAREVIC A, et al. Resonance regions due to interaction of forced and parametric vibration of a parabolic cable [J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 447: 78–104.
- [17] ZHANG W, ZHANG F X, ZU J W. Computation of normal forms for high dimensional nonlinear systems and application to nonplanar motions of a cantilever beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 278: 949–974.
- [18] HALLER G, WIGGINS S. N-pulse homoclinic orbits in perturbations of resonant Hamiltonian systems [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1995, 130: 25–101.
- [19] SRINIL N, REGA G. The effects of kinematic condensation on internally resonant forced vibrations of shallow horizontal cables [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2007, 42(1): 180–195.

附录

$$K_i = -\alpha \int_0^1 \Delta_x \varphi_i'' \varphi_i dx, (i = 1, 2)$$

$$\omega_i^2 = -\chi^2 \int_0^1 \varphi_i'' \varphi_i dx - (\alpha/\chi^4) \int_0^1 y'' \cdot \int_0^1 y' \varphi_i' dx \varphi_i dx, (i = 1, 2)$$

$$P_i = -(\alpha/\chi^2) y'' \Delta_x \int_0^1 \varphi_i dx + \Omega^2 \Delta_z \int_0^1 (1-x) \varphi_i dx, (i = 1, 2)$$

$$\Lambda_{11} = -(\alpha/2\chi^2) \left(\int_0^1 y'' \int_0^1 \varphi_1'^2 dx \varphi_1 dx - 2 \int_0^1 \varphi_1'' \int_0^1 y' \varphi_1' dx \varphi_1 dx \right)$$

$$\Lambda_{13} = -(\alpha/2\chi^2) \int_0^1 y'' \int_0^1 \varphi_2'^2 dx \varphi_1 dx$$

$$\Lambda_{22} = -(\alpha/\chi^2) \int_0^1 \varphi_2'' \int_0^1 y' \varphi_1' dx \varphi_2 dx$$

$$\Gamma_{ij} = -(\alpha/2) \int_0^1 \varphi_i'' \int_0^1 \varphi_j'^2 dx \varphi_i dx, (i, j = 1, 2)$$

$$\gamma_1 = -3\Gamma_{11}/8\omega_1 + 5\Lambda_{11}^2/12\omega_1^3$$

$$\gamma_2 = \Lambda_{11}\Lambda_{13}/2\omega_1^3 - \Gamma_{12}/4\omega_1 - \Lambda_{13}\Lambda_{22}/(2\omega_1^3 - 8\omega_1\omega_2^2)$$

$$\gamma_3 = -\Gamma_{21}/4\omega_2 + \Lambda_{11}\Lambda_{22}/4\omega_2\omega_1^2 - \Lambda_{22}^2/(4\omega_1^2\omega_2 - 16\omega_2^3)$$

$$\gamma_4 = -3\Gamma_{24}/8\omega_2 - \Lambda_{13}\Lambda_{22}(8\omega_2^2 - 3\omega_1^2)/8\omega_1^2\omega_2(\omega_1^2 - 4\omega_2^2)$$