

窄带随机激励下三稳态压电俘能器的 动力学特性与实验研究*

聂欣 张婷婷 靳艳飞[†]

(北京理工大学 宇航学院力学系,北京 100081)

摘要 本文研究了窄带随机激励下三稳态压电俘能器的动力学输出特性.首先,建立了非线性三稳态压电俘能器的分布参数型机电耦合运动方程,并基于多尺度法推导得到系统运动方程响应的解析解以及一阶、二阶稳态矩的表达式.其次,分析了磁铁间距、噪声强度和激励幅值等参数对系统稳态响应的影响.研究结果表明,在一定参数范围内,随着噪声强度的增加,压电振动俘能器会经历阱内振动、阱间振动甚至大轨道周期运动,以表现出单稳态、双稳态和三稳态特性;改变磁铁水平间距和竖直间距构造三稳态压电俘能器,其振动幅值和采集电压相较于双稳态明显提高.最后,通过实验比较了压电俘能器在不同位形时的采集性能,结果表明了三稳态压电俘能器的优越性,为窄带随机激励下的非线性振动俘能器的设计提供一定的理论依据.

关键词 三稳态压电俘能器, 窄带随机激励, 输出电压, 多尺度法

中图分类号:O324

文献标志码:A

Dynamical Behaviors and Experimental Analysis of Tri-stable Piezoelectric Energy Harvester Under Narrow-Band Random Excitations*

Nie Xin Zhang Tingting Jin Yanfei[†]

(Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract In this paper, the dynamical behaviors of a tri-stable piezoelectric energy harvester under the narrow-band random excitation is studied. Firstly, the dynamical equation of a tri-stable nonlinear cantilever piezoelectric energy harvesting system is established. The analytical expressions of the dynamical response of the system together with the first and second steady moments are obtained by using the multiple scales method. Secondly, the effects of the distance between the tip magnet and the external magnets, the noise intensity and the excitation amplitude on the system response and harvesting performance are discussed. The obtained results show that as the noise intensity increases, the piezoelectric vibration energy harvester will experience mono-stable, bi-stable and tri-stable motion. Changing the horizontal and vertical spacing of the magnets makes the piezoelectric energy harvester perform tri-stable motion, and the displacement and acquisition voltage are significantly improved compared to the bi-stable case. Finally, the collection performance of the piezoelectric energy harvester in different configurations is compared through experiments. The results show the superiority of the tri-stable piezoelectric energy harvester, which provide the theoretical support for the design of the vibration energy harvester under the narrow-band random excitation.

Key words narrow-band random excitation, tri-stable piezoelectric energy harvester, output voltage, the method of multiple scales

引言

随着能源短缺问题加剧,以及微电子技术和无线传感网络技术的高速发展,能源采集技术得到广泛重视^[1,2].压电振动俘能器是利用压电效应将环境中的振动能量转换为电能的装置,具有结构简单、转换效率高、抗干扰能力强等优点^[3,4],在国防军事、环境监测、医疗系统等领域应用广泛^[5].由于线性结构的压电俘能器具有狭窄的固有频率特征,利用非线性结构实现宽频响应的能量采集方式得到了广泛关注.姚明辉等^[6]提出了双稳态 L 型悬臂梁结构,理论分析得到系统的势能函数具有两个对称的稳定势阱,当考虑重力势能时,势能函数出现不对称的双势阱.Arrieta 等^[7]设计了一种非线性双稳态压电悬臂梁来实现宽带振动能量俘获,实验结果表明,该装置能够从定宽带振动源中收集较多的电能.Stanton 等^[8]提出了一种双稳态压电俘能器模型,利用谐波平衡法求出了系统运动方程的解析解.

双稳态压电俘能器在弱激励条件下无法进入大幅间运动^[9,10],而多稳态压电俘能器被证明具有更浅、更宽的势能阱,这一特点使其在较弱的振动环境中也有较高的输出性能^[11,12].周生喜等^[13]通过数值仿真和实验方法验证了弱激励条件下三稳态压电俘能器的俘能效果优于双稳态压电俘能器.Zhou 等^[14]通过最小误差遗传算法证明三稳态压电俘能器具有更宽的工作频带和更高的采集效率.Kim 和 Seok^[15]提出一种三稳态压电俘能器,研究了影响势能阱深度的各种因素.Leng 等^[16]利用等效磁化电流法建立了磁铁间的非线性磁力模型,研究了随机激励下三稳态压电俘能器的系统响应.

这些基于低频宽带随机激励或单频周期激励下的研究成果对优化多稳态压电俘能器结构、提高输出性能有参考价值.同时随着研究的深入,人们发现日常生活和工作环境中的振动激励形式往往是能量集中在一定频率范围内的窄带随机激励,例如悬索桥上的振动能量集中在 22Hz 到 46Hz 范围内^[17],人行走的振动频率在 1Hz 左右.已有不少学

者使用不同方法对窄带随机激励下非线性悬臂梁系统的系统响应和能量转换效率进行研究.例如,Zhu 等^[18]利用数值分析方法研究了 Duffing 振子在窄带随机噪声激励下系统响应的双峰稳态概率密度问题,以及分叉和跳跃现象.戎海武等^[19]利用多尺度法和线性化方法,研究了窄带随机激励下 Duffing 振子输出响应的双峰稳态概率密度问题.首先用多尺度法分离系统的快变项,再用线性化方法求解双峰稳态概率密度的表达式.吴海娟^[20]讨论了窄带随机激励的中心频率、强度和带宽对双稳态悬臂梁能采集系统输出电压的影响规律,论证了系统在分界点间距处始终存在响应峰值的特征规律.Jin 等^[21]研究了窄带随机激励下时滞 Duffing 型压电俘能器的输出响应和稳定性.然而,大多数研究集中于窄带随机激励下单稳或双稳态振动俘能器,对窄带随机激励下三稳态振动俘能器动力学的研究较少.

本文考虑三稳态压电俘能器的非线性特性,建立了集中参数型机电耦合运动方程,以带通滤波器输出一定带宽的窄带随机激励模拟环境振动,基于多尺度法得到系统运动响应的解析解,分析了窄带随机激励下磁铁间距、噪声强度和激励幅值等参数对系统动力学特性和采集性能的影响,并通过实验对比了俘能器做双稳态运动和三稳态运动时的输出特性.

1 三稳态压电俘能器的数学模型

图 1 为本文所研究的三稳态压电俘能器结构示意图.其中,悬臂梁长度为 l ,由弹性基体和黏结在其上、下表面的一对极化方向相反的压电片组成,压电片串联连接外部负载电阻 R .悬臂梁一端固定在基座左侧面上,另一端与末端磁铁 A 连接.外部磁铁 B 和 C 沿悬臂梁水平轴线延长线对称分布在基座右侧面上,其与末端磁铁的水平间距为 d_x ,外部磁铁 B、C 之间的竖直间距为 $2d_y$,磁铁的偏心距为 $a/2$,末端磁铁 A 受到外部磁铁 B 和 C 的非线性磁力排斥作用.

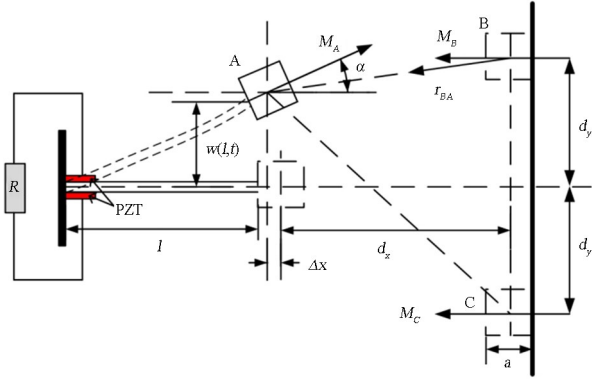


图1 三稳态压电俘能器结构示意图

Fig.1 The model of a tri-stable piezoelectric energy harvester

假设磁场在磁铁 A, B 和 C 中分布均匀,把每个磁铁等效成点磁荷.采用磁偶极子模型^[22],可得磁铁之间的势能为:

$$U_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{m_B}{\|r_{BA}\|^{3/2}} + \frac{m_C}{\|r_{CA}\|^{3/2}} - \frac{(m_A \cdot r_{BA})3r_{BA}}{\|r_{BA}\|^{5/2}} - \frac{(m_C \cdot r_{CA})3r_{CA}}{\|r_{CA}\|^{5/2}} \right] \cdot m_A \quad (1)$$

式中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 为真空磁导率.磁偶极矩和方向向量分别为:

$$\begin{aligned} m_A &= M_A \cos\alpha \cdot i + M_A \sin\alpha \cdot j, \\ m_B &= -V_B M_B \cdot i, \\ m_C &= -V_B M_C \cdot i, \\ r_{BA} &= -d_x \cdot i + (w(l,t) - d_y) \cdot j, \\ r_{CA} &= -d_x \cdot i + (w(l,t) + d_y) \cdot j \end{aligned}$$

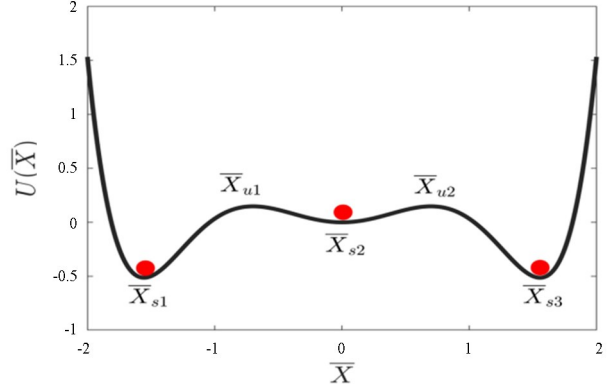
其中, i, j 分别为 x 向和 z 向的单位矢量, V_x 和 M_x ($x = A, B, C$) 分别为磁铁 x 的体积和磁化强度. $w(l,t)$ 为悬臂梁末端相对固定端的振动位移, α 是末端磁铁 A 的偏转角,满足 $\tan\alpha = w(l,t)$,水平间距 $\Delta x = a(1 - \cos\alpha)/2$.

仅考虑第1阶模态,将 U_m 进行泰勒级数展开,系统的势函数可以表示为^[23]:

$$U(\bar{X}) = \frac{1}{2}k_1\bar{X}^2 + \frac{1}{4}k_2\bar{X}^4 + \frac{1}{6}k_3\bar{X}^6 \quad (2)$$

式中, k_1, k_2 和 k_3 分别表示线性、三次和五次方刚度系数,与磁铁间距 d_x, d_y 的关系表达式参考文献^[24].根据方程(2)可知,当 $k_1 > 0, k_2 < 0, k_3 > 0$ 且满足 $k_2^2 - 4(1 - k_1)k_3 > 0$ 时,势能曲线有三个稳定平衡点: $\bar{X}_{s_i} = \pm \sqrt{(-k_2 - \sqrt{k_2^2 - k_1 k_3})/2k_3}, \bar{X}_{s_i} = 0, (i = 1, 2, 3)$ 以及两个不稳定平衡点 $\bar{X}_{u_i} =$

$\pm \sqrt{(-k_2 + \sqrt{k_2^2 - k_1 k_3})/2k_3}, (i = 1, 2)$.系统具有三稳态势的结构,如图2所示.

图2 势函数曲线($k_1=1.3, k_2=-3.2, k_3=1.1$)Fig.2 The plot of potential function by choosing stiffness coefficients as $k_1=1.3, k_2=-3.2, k_3=1.1$

当压电悬臂梁工作在一阶弯曲振动模态时,根据牛顿第二定律、基尔霍夫定律,系统的运动方程为:

$$\begin{cases} \bar{M} \ddot{\bar{X}}(t) + \bar{C} \dot{\bar{X}}(t) + \frac{dU(\bar{X})}{d\bar{X}} - \bar{\lambda} \ddot{V}(t) = -\bar{M} \ddot{\bar{X}}_b \\ C_P \dot{V}(t) + \frac{V(t)}{R} + \bar{\kappa} \dot{\bar{X}}(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

其中, \bar{X} 为末端磁铁 A 的位移, $\dot{\bar{X}}$ 为末端磁铁 A 的速度, $\ddot{\bar{X}}_b$ 为激励加速度. \bar{M}, \bar{C} 分别为俘能器的等效质量和等效阻尼. $\bar{\lambda}$ 为线性机电耦合系数, $\bar{\kappa}$ 为电路中的压电耦合项, C_P 为采集电路的等效电容, $V(t)$ 为负载两端电压, R 为负载电阻.

引入无量纲参数进行归一化处理,令:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{X}}{l}, x_b = \frac{\bar{X}_b}{l}, V = \frac{C_P \bar{V}}{\bar{\lambda} l}, \omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{\bar{M}}}, c = \frac{\bar{C}}{\bar{M}}, \\ \hat{\alpha} &= \frac{K_2 l^2}{\bar{M}}, \hat{\beta} = \frac{K_3 l^4}{\bar{M}}, \hat{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}^2 l}{\bar{M} C_P}, \lambda = \frac{1}{RC_P}, \kappa = \frac{\bar{\kappa}}{\bar{\lambda}} \end{aligned}$$

式(3)无量纲化后可以表示为:

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + dU(x)/dx - \hat{\lambda}V(t) = -\ddot{x}_b \quad (4a)$$

$$\dot{V}(t) + \lambda V(t) + \kappa\dot{x}(t) = 0 \quad (4b)$$

其中,无量纲线性阻尼系数 $c = 2\hat{\mu}\omega_n$,无量纲势函数 $U(x) = \omega_n^2/2x^2 + \hat{\alpha}x^4/4 + \hat{\beta}x^6/6$, $\hat{\mu}$ 表示无量纲阻尼系数, $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 表示无量纲刚度系数.外界振动激励 \ddot{x}_b 满足窄带随机激励 $\xi(t) = \hat{F} \cos(\Omega t + \gamma W(t))$,

这里, $W(t)$ 为标准维纳过程, \hat{F} 为振幅, Ω 为恒定转速, γ 为噪声强度. $\xi(t)$ 的功率谱 $S(\omega)$ 表达式为^[25]:

$$S(\omega) = \frac{\hat{F}^2 \gamma^2 \left(\Omega^2 + \omega^2 + \frac{\gamma^4}{4} \right)}{2 \left[\left(\Omega^2 - \omega^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 + \omega^2 \gamma^4 \right]} \quad (5)$$

由式(5)可知, 当噪声强度增加时, 峰的带宽随之增加. 当噪声强度趋近于无穷, 式(5)趋近于均匀分布的白噪声功率谱. 当噪声强度 γ 趋近于 0 时, $S(\omega)$ 在 $\omega = \pm \Omega$ 处趋于无穷大, 此时为典型的窄带随机噪声的功率谱.

2 系统的随机响应分析

2.1 多尺度法求解

采用多尺度法求解运动式(4)的解析解, 研究系统非线性响应特性并推导稳态响应矩的表达式. 引入无量纲化摄动参数小量和新的时间变量 T_0 ,

T_1, T_r, \dots , 即

$$T_r = \epsilon^r t, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

定义偏导数算子表示导数算子, 即

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} = D_0 + \epsilon D_1 + O(\epsilon^2) \\ \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + O(\epsilon^2) \end{cases} \quad (7)$$

设式(4)中的无量纲系数为 ϵ 阶, 即

$$\dot{\mu} = \epsilon \mu, \dot{\alpha} = \epsilon \alpha, \dot{\beta} = \epsilon \beta, \dot{\lambda} = \epsilon \lambda, \dot{F} = \epsilon F$$

则式(4)可重新表示为如下形式:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\epsilon \mu \omega_n \dot{x}(t) + \omega_n^2 x(t) + \epsilon \alpha x^3(t) + \\ \epsilon \beta x^5(t) - \epsilon \lambda v(t) = \epsilon F \cos(\Omega t + \gamma W(t)) \\ \dot{V}(t) + \lambda V(t) + \kappa \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

设式(8)中位移和电压的一阶近似解为

$$\begin{cases} x(t) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \\ v(t) = v_0(T_0, T_1) + \epsilon v_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \end{cases} \quad (9)$$

其中, $T_0 = t$ 和 $T_1 = \epsilon t$ 分别是快变参数和慢变参数.

将式(7)和式(9)代入式(8), 省略 ϵ 的二阶以上项, 并分别令 ϵ^0 、 ϵ^1 的系数为零, 得到

$O(\epsilon^0)$:

$$\begin{cases} D_0^2 x_0(T_0, T_1) + \omega_n^2 x_0(T_0, T_1) = 0 \\ D_0 V_0(T_0, T_1) + \lambda V_0(T_0, T_1) + \\ \kappa D_0 x_0(T_0, T_1) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$O(\epsilon^1)$:

$$\begin{cases} D_0^2 x_1(T_0, T_1) + \omega_n^2 x_1(T_0, T_1) = \\ -2D_0 D_1 x_0(T_0, T_1) - 2\mu \omega_n D_0 x_0(T_0, T_1) - \\ \alpha x_0^3(T_0, T_1) - \beta x_0^5(T_0, T_1) + \lambda V_0(T_0, T_1) + \\ F \cos(\Omega T_0 + \gamma W(T_1)) \\ D_0 V_1(T_0, T_1) + \lambda V_1(T_0, T_1) = \\ -D_1 V_0(T_0, T_1) - \kappa D_0 x_1 - \kappa D_0 x_0 \end{cases} \quad (11)$$

式(16)和式(17)的通解可以写成

$$\begin{cases} x_0 = A_1(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + cc \\ v_0 = B_1(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + cc \end{cases} \quad (12)$$

其中, $A_1(T_1)$ 为复函数, $\bar{A}_1(T_1)$ 为 $A_1(T_1)$ 的复共轭, cc 为复共轭项. 将式(12)代入式(10), 得:

$$B_1 \cdot i\omega_n + \lambda B_1 + A_1 \cdot i\omega_n \kappa = 0 \quad (13)$$

由式(13)得 $B_1(T_1)$ 为:

$$B_1(T_1) = \frac{-i\omega_n \kappa}{i\omega_n + \lambda} A_1(T_1) \quad (14)$$

将式(12)中第一式代入式(17), 消去永年项得:

$$\begin{aligned} & -2i\omega_n A_1' - 2i\omega_n^2 \mu A_1 - 3\alpha \bar{A}_1 A_1^2 - 10\beta \bar{A}_1^2 A_1^3 - \\ & \frac{i\omega_n \kappa \lambda A_1}{i\omega_n + \lambda} + \frac{F}{2} \exp[i(\Omega T_0 - \omega_n T_0 + \\ & \gamma W(T_1))] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

本文主要研究式(8)中的主共振, 引入调谐参数 σ 表示接近度, 设

$$\Omega = \omega_n + \epsilon \sigma \quad (16)$$

根据式(16), 式(15)改写为:

$$\begin{aligned} & -2i\omega_n D_1 A - 2i\omega_n^2 \mu A_1 - 3\alpha \bar{A}_1 A_1^2 - 10\beta \bar{A}_1^2 A_1^3 - \\ & \frac{i\omega_n \kappa \lambda A_1}{i\omega_n + \lambda} + \frac{F}{2} \exp[i(\sigma T_1 + \gamma W(T_1))] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

将 $A_1(T_1)$ 写成极坐标的形式 $A_1(T_1) = 1/2a(T_1) \exp[i\varphi(T_1)]$, 其中 a 为稳态响应的幅值, φ 为运动的相位. 在式(17)中引入 $\eta(T_1) = \sigma T_1 + \gamma W(T_1) - \varphi(T_1)$, 并分离实部和虚部, 得

$$\begin{cases} a' = -\mu_1 a + \frac{F}{2\omega_n} \sin \eta, \\ a\eta' = \sigma_1 a - \frac{3\alpha a^3}{8\omega_n} - \frac{5\beta a^5}{16\omega_n} + \frac{F}{2\omega_n} \cos \eta + \gamma a W'(T_1) \end{cases} \quad (18)$$

这里, $\mu_1 = \mu\omega_n + \frac{\chi\kappa\lambda}{2(\omega_n^2 + \lambda^2)}$, $\sigma_1 = \sigma - \frac{\chi\kappa\omega_n}{2(\omega_n^2 + \lambda)}$.

由式(18)可得 a 和 η , 进一步得到式(8)中无量纲位移响应和输出电压响应的一阶近似表达式:

$$x(t) = a(\epsilon t) \cos(\Omega t - \eta(\epsilon t)) + O(\epsilon) \quad (19)$$

$$V(t) = \frac{\omega_n \kappa}{\sqrt{\omega_n^2 + \lambda^2}} a(\epsilon t) \cos(\Omega t - \eta(\epsilon t) + \theta) + O(\epsilon) \quad (20)$$

式中, $\theta = \arctan(\lambda/\omega_n)$.

2.2 稳态响应矩

根据式(18), 稳态解可以表示为:

$$\begin{cases} da = \left[-\mu_1 a + \frac{F}{2\omega_n} \sin\eta \right] dT_1 \\ d\eta = \left[\sigma_1 - \frac{3\alpha a^2}{8\omega_n} - \frac{5\beta a^4}{16\omega_n} + \frac{F}{2a\omega_n} \cos\eta \right] dT_1 + \gamma dW(T_1) \end{cases} \quad (21)$$

当 $\gamma = 0$ 时, 式(21)为确定性系统. 对于稳态解满足 $a' = 0$, $\eta' = 0$, 代入式(18)得

$$\left(\sigma_1 a_0 - \frac{3\alpha a_0^3}{8\omega_n} - \frac{5\beta a_0^5}{16\omega_n} \right)^2 + (\mu_1 a_0)^2 = \frac{F^2}{4\omega_n^2} \quad (22)$$

下面讨论 $\gamma \neq 0$ 时, 噪声强度对系统稳态响应的影 响. 由于 γ 较小, 可用线性化方法求解, 令

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \\ \eta &= \eta_0 + \eta_1 \end{aligned} \quad (23)$$

其中, a_0, η_0 是确定性谐波激励下的系统稳态响应幅值和相位角, a_1, η_1 是小扰动项. 将式(23)代入式(21), 忽略高阶项, 得到线性化方程

$$\begin{cases} a'_1 = -\mu_1 a_1 + \frac{F}{2\omega_n} \cos\eta_0 \cdot \eta_1 \\ \eta'_1 = \left(\frac{\sigma_1}{a_0} - \frac{9\alpha a_0}{8\omega_n} - \frac{75\beta a_0^3}{16\omega_n} \right) a_1 - \frac{F}{2a_0\omega_n} \sin\eta_0 \cdot \eta_1 + \gamma W'(T_1) \end{cases} \quad (24)$$

根据式(22), 式(24)可以表示为

$$\begin{cases} a'_1 = -\mu_1 a_1 - M_1 \eta_1 \\ \eta'_1 = M_2 a_1 - \mu_1 \eta_1 + \gamma W'(T_1) \end{cases} \quad (25)$$

其中, $M_1 = \sigma_1 a_0 - 3\alpha a_0^3/8\omega_n - 5\beta a_0^5/16\omega_n$, $M_2 = \sigma_1/a_0 - 9\alpha a_0/8\omega_n - 75\beta a_0^3/16\omega_n$.

式(24)中的二阶矩满足下列等式:

$$\begin{cases} \frac{dEa_1^2}{dT_1} = -2\mu_1 Ea_1^2 - 2M_1 Ea_1 \eta_1 \\ \frac{dEa_1 \eta_1}{dT_1} = M_2 Ea_1^2 - M_1 E\eta_1^2 - 2\mu Ea_1 \eta_1 \\ \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} = 2M_2 Ea_1 \eta_1 - 2\mu E\eta_1^2 + \gamma^2 \end{cases} \quad (26)$$

令 $\frac{dEa_1^2}{dT_1} = \frac{dEa_1 \eta_1}{dT_1} = \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} = 0$, 通过式(26)得

到二阶稳态矩:

$$\begin{cases} Ea_1^2 = \frac{M_1^2 \gamma^2}{4\mu_1 (\mu_1^2 + M_1 M_2)} \\ Ea_1 \eta_1 = \frac{-M_1 \gamma^2}{4(\mu_1^2 + M_1 M_2)} \\ E\eta_1^2 = \frac{(2\mu_1^2 + M_1 M_2) \gamma^2}{4\mu_1 (\mu_1^2 + M_1 M_2)} \end{cases} \quad (27)$$

对式(23)两边取数学期望, 得到解的一阶和二阶稳态矩:

$$\begin{cases} Ea = a_0, Ea^2 = a_0^2 + Ea_1^2 \\ E\eta = \eta_0, E\eta^2 = \eta_0^2 + E\eta_1^2 \end{cases} \quad (28)$$

同理, 输出电压的一阶和二阶稳态矩表示为:

$$\begin{aligned} Ev &= \frac{\omega_n \kappa}{\sqrt{\omega_n^2 + \lambda^2}} a_0 \\ Ev^2 &= \frac{2\omega_n \kappa^2}{\sqrt{\omega_n^2 + \lambda^2}} (a_0 + Ea_1^2) \end{aligned} \quad (29)$$

平均输出功率为

$$EP = \lambda \chi EV^2 \quad (30)$$

由式(28)和式(29)可见, 系统响应幅值和输出电压的一阶稳态矩与调谐参数有关, 系统响应幅值和输出电压的二阶稳态矩与一阶稳态矩有关, 调谐参数影响的结果对设备的小型化和采集性能的提高都至关重要. 基于上述理论结果, 在后续研究中, 除特殊说明外固定参数 $\omega_n = 1.0$, $\mu = 0.1$, $\chi = 1$, $F = 2$, $\epsilon = 0.1$, 探究系统响应幅值和输出电压的一阶稳态矩与调谐参数的函数关系.

为了更好地理解调谐参数的影响, 图3给出了主共振附近响应幅值 Ea 在不同非线性刚度 α 与 β 下随调谐参数 σ 的变化规律. 一方面, 曲线呈现硬化特性, 随着 α 的增大, Ea 表现为非线性引起的右弯曲共振曲线, 响应峰值和带宽大小均随之减小. 这是由于非线性曲率在压电悬臂梁处于一阶模态振动时起主导作用, 而表现出硬化特性. 另一方面, 随着 β 的增大, Ea 向右弯曲的趋势更加明显, 响应峰值和带宽大小均迅速减小.

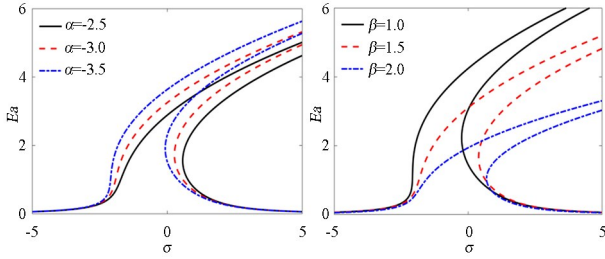


图3 振幅一阶稳态矩随调谐参数的变化函数

Fig.3 The first-order steady-state moments of the amplitude Ea as a function of detuning frequency σ

图4绘制了输出电压的一阶矩 EV 随调谐参数 σ 的变化图像。增大非线性刚度 α 和 β , EV 同样显示了右弯曲共振曲线,并且五次方刚度系数 β 的影响比三次方刚度系数 α 的影响更大。因此,可以考虑合理调整非线性刚度 α 和 β 来拓宽能量采集器的工作频带宽度。

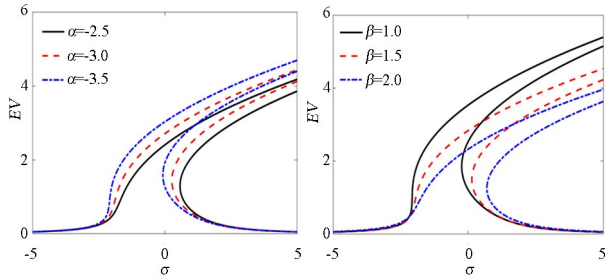


图4 电压的一阶稳态矩随调谐参数的变化函数

Fig.4 The first-order steady-state moments of the voltage EV as a function of detuning frequency σ

2.3 数值模拟

通过使用四阶 Runge-Kutta 算法得到式(4)的数值解。为便于分析,通常使用式(31)给出的伪随机信号对 $\xi(t)$ 进行建模,实现随机动力学相关的数值模拟。

$$\xi(t) = \sqrt{\frac{4\omega}{N}} \sum_{k=1}^N \cos\left[\frac{2k-1}{N}\omega t + \varphi_k\right] \quad (31)$$

其中, φ_k 在 $(0, 2\pi]$ 上均匀分布, N 是一个较大的正整数。

当马尔可夫扩散过程达到静止状态,稳态概率密度函数通过条件 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = 1$ 和 $\partial p / \partial t = 0$ 求解。

由于强非线性刚度,中心差分格式可以表示为:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad \frac{\partial p_{ij}}{\partial \dot{x}} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j-1}}{\Delta \dot{x}}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 p_{ij}}{\partial Y^2} = \frac{p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}}{\Delta \dot{x}^2}$$

进一步探讨系统参数对随机响应的影响,在下面的数值模拟中,除 2.2 节中给出的参数设置外,其他主要系统参数设置为 $\kappa = 0.4, \lambda = 0.4, \alpha = -3.2, \beta = 1.1, N = 1000$ 。在 (x, \dot{x}) 的计算区域 $[-1.5, 1.5] \times [1.5, 1.5]$ 上选取 50×50 组初始值,对不同初始值得到的响应轨迹进行平均,得到系统的稳态概率密度函数。

图5和图6分别是激励幅值 $F=2$ 和 $F=4$ 时,系统对应的时间历程图和电压变化图。通过比较发现位移和电压的输出响应在不同 F 下会发生明显波动,具体表现为:当 F 较小时,系统的采集输出能力较低,磁铁之间的作用力较弱,此时位移和电压响应较小;当 F 增大时,系统的输出响应有较大变化,末端磁铁受到两个外部磁铁之间非线性作用力较大,非线性作用特性影响明显,末端振动位移和输出电压均有提高。可见激励幅值对于系统的能量采集效率至关重要,在一定范围内增大加速度幅值有利于拓宽能量采集器作三稳态运动的工作频带,从而提高系统的采集输出能力。

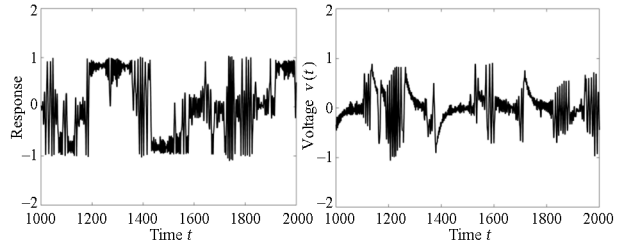
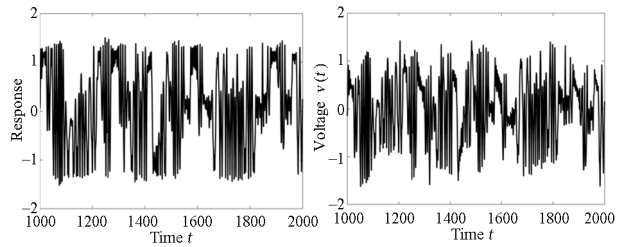
(a) 时间历程 (b) 输出电压
(a) Time history (b) Output voltage图5 $F=2$ 时系统的输出响应特性Fig.5 Response behaviors of the system for $F=2$ (a) 时间历程 (b) 输出电压
(a) Time history (b) Output voltage图6 $F=4$ 时系统的输出响应特性Fig.6 Response behaviors of the system for $F=4$

图7和图8分别是改变噪声强度大小时,系统对应的输出特性仿真结果。当噪声强度 $\gamma = 0.2$ 时,如图7所示,系统陷入了三稳态的某一势阱中,在对应的平衡点附近作小幅值振动,此时压电储能器的振动位移、振动速度和输出电压均迅速减小。当

噪声强度进一步增大至 $\gamma = 0.35$, 如图 8 所示, 系统较易克服磁力的束缚作用, 在三个势阱之间来回跳跃做大幅值的振动, 此时俘能器的输出性能较 $\gamma = 0.2$ 时提高更多. 由此可见, 适当的选择噪声强度有利于提高俘能器的输出性能, 从而满足实际情况下的需求.

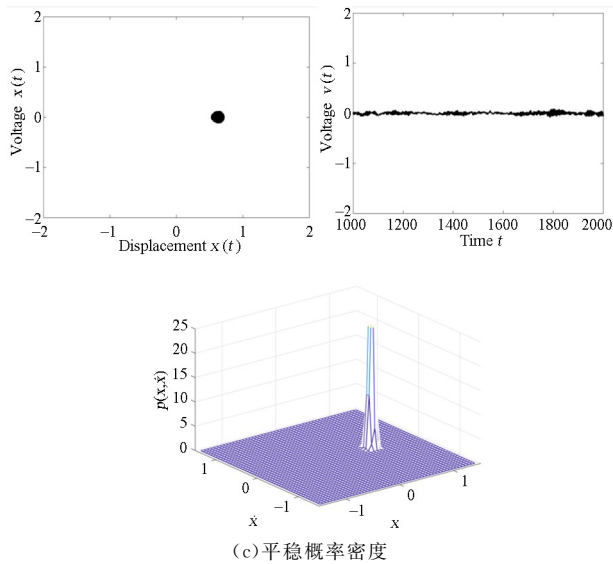


图 7 $\gamma = 0.2$ 时系统的输出响应特性

Fig.7 Response behaviors of the system for $\gamma = 0.2$

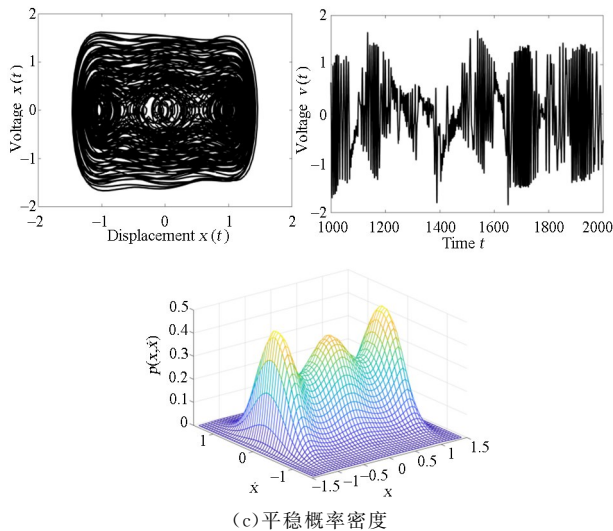


图 8 $\gamma = 0.35$ 时系统的输出响应特性

Fig.8 Response behaviors of the system for $\gamma = 0.35$

3 实验验证

为了验证第 2 节给出的理论结果的正确性, 图 10 为搭建的三稳态压电俘能器实验样机和平台. 压电悬臂梁左侧固定在基座上, 其右端用高强度胶黏结末端磁铁 A, 两个外部磁铁 B 和 C 也通过高强

度胶黏结在可滑动板上, 磁铁的型号为 N50. 基板根部的上、下表面黏结两片大小相同、极化方向相同的压电陶瓷片, 并通过金属铜电极串联连接电阻 R, 压电片的型号为 PZT-5H.

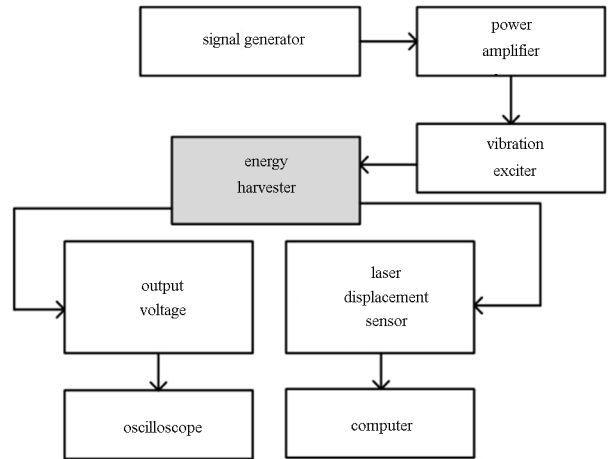


图 9 实验系统测试中仪器连接

Fig.9 Experimental test system of piezoelectric energy harvesting system

搭建实验系统测试平台时, 各个实验仪器之间的连接示意图如图 9 所示. 基座通过底部中间的螺钉固定在激振器上, 在计算机中生成窄带激励数字信号, 然后通过 USB 输入信号发生器. 信号发生器输出后通过功率放大器放大, 再输入到激振器作用于能量采集器上. 激光位移传感器采集悬臂梁末端位移, 压电片产生的电压由示波器进行采集和存储. 实验涉及的主要参数见表 1.

表 1 压电俘能器的主要材料参数

Table 1 Main material parameters of piezoelectric energy harvester

Parameter	Unit	Value
Length of beam	mm	60
Width of beam	mm	10
Thickness of beam	mm	0.2
Density of beam	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	7700
Elastic modulus of beam	GPa	105
Length of PZT	mm	10
Width of PZT	mm	10
Thickness of PZT	mm	0.3
Density of PZT	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	7450
Elastic modulus of PZT	GPa	29.5
Density of magnet	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	8200
Magnetization of magnet	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	10^6

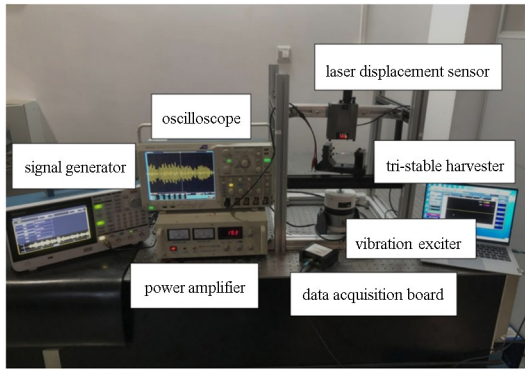
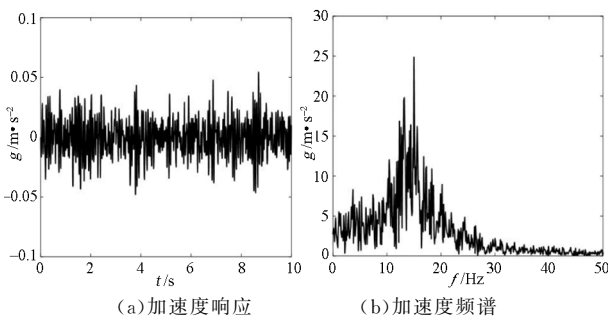


图10 三稳态压电能量采集器实验测试平台

Fig.10 Testing platform of tri-stable piezoelectric energy harvester

为了分析实验中系统的振动响应情况,当激励中心频率为 12Hz 时,图 11 给出激振器的加速度响应及其频谱图,确保实验在接近真实的窄带随机激励下进行。



(a) 加速度响应 (b) 加速度频谱

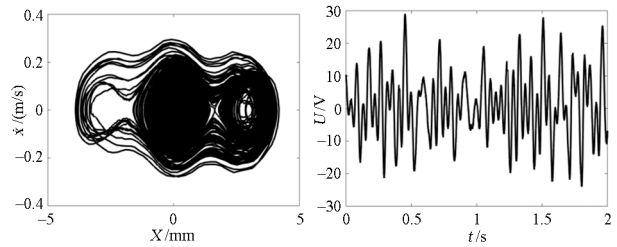
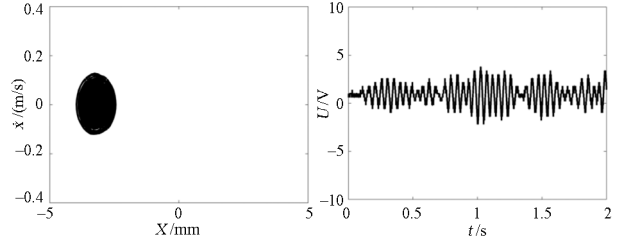
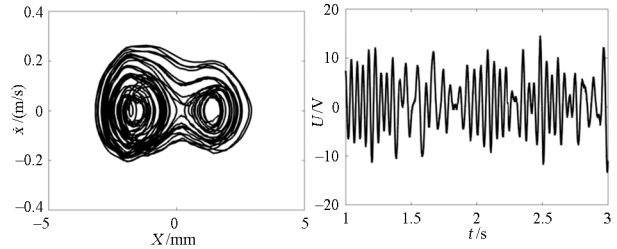
(a) Acceleration response (b) Acceleration spectrum

图 11 激振器的激励状态

Fig.11 Excitation state of the vibrator

末端磁铁与外部磁铁间的非线性作用力会严重影响系统振动特性,为了验证理论方法的正确性,在该激励条件下调节磁铁的水平间距和竖直间距对系统进行实验验证与分析.图 13~图 15 为系统在不同磁铁间距下的相图、时间历程图和输出电压波形的实验结果,对应的振动状态分别是:三稳态跃迁振动、三稳态单势阱内振动、双稳态振动。

图 12(a)表明当水平间距 $d_x = 10\text{mm}$, 竖直间距 $d_y = 5\text{mm}$ 时,磁铁之间的非线性作用特性影响明显,压电俘能器较易克服磁力的束缚,在 3 个稳态平衡位置之间来回跳跃振动,此时系统为三稳态压电俘能器.存在 3 个势能阱且宽度和深度较为均匀一致,有利于在较小的外部激励下表现出大幅值输出特性,有利于输出性能的提高.从图 13 中可以看出,系统的末端振动位移、振动速度最大分别为 4.5mm 和 280mm/s,且采集输出电压最大可达 30V,具有较好的采集性能。

(a) $d_x = 10\text{mm}, d_y = 5\text{mm}$ 时俘能器相图、电压变化(a) Phase and voltage response of VEH for $d_x = 10\text{mm}, d_y = 5\text{mm}$ (b) $d_x = 8\text{mm}, d_y = 5\text{mm}$ 时俘能器相图、电压变化(b) Phase and voltage response of VEH for $d_x = 8\text{mm}, d_y = 5\text{mm}$ (c) $d_x = 12\text{mm}, d_y = 4\text{mm}$ 时俘能器相图、电压变化(c) Phase and voltage response of VEH for $d_x = 12\text{mm}, d_y = 4\text{mm}$ 图 12 不同 d_x, d_y 下俘能器的实验结果Fig.12 Experimental results of VEH with different d_x and d_y

随着磁铁的间距减小到水平间距 $d_x = 8\text{mm}$ 和竖直间距 $d_y = 5\text{mm}$,如图 12(b)所示,由于磁铁之间作用力较大,系统在相同激励水平下,没有足够的能量摆脱磁力的束缚,陷入初始位置附近的势阱中做井内振动.此种情况下,悬臂梁末端只能在由初始位置确定的某一个平衡点附近做小幅值的周期运动,其性能类似于单稳态系统.此时系统的末端振动位移和振动速度都非常小,分别为 1.5mm 和 100mm/s,采集输出电压最大仅为 4V.可以看出,末端磁铁和外部磁铁之间的间距过大、过小都不利于提高压电俘能器的输出性能。

水平间距 $d_x = 12\text{mm}$, 竖直间距 $d_y = 4\text{mm}$ 时,如图 12(c)所示,系统有两个近似对称的势能阱,其深度和宽度较大,外部激励提供较大的能量使得压电俘能器克服势垒的阻碍作用呈现双稳态采集特性.末端振动位移、振动速度分别为 2.5mm 和 200mm/s,采集输出电压最大可达到 15V.通过实验数据对比分析,系统为三稳态能量采集系统时具有更高的采集效率,输出位移和采集电压更高,

进一步说明了三稳态压电俘能器的优越性。

实验结果与仿真结果得到的振动位移和采集电压相比存在一些误差,主要的原因有:样机制作过程中尺寸加工误差和材料特性偏差等因素导致误差,例如材料的弹性模量、密度等参数都是一个范围值,计算时为了简便选取了一个中间值,因此理论与实验结果很难完全一致;由于末端磁铁的重力因素,实验得到的相图不是完全对称的。

能量采集同时关注工作频率带宽的大小,图13给出了不同噪声强度下三稳态压电俘能器的幅频响应曲线的实验对比结果。当噪声强度 $\gamma=0$ 时,窄带随机激励退化成简谐激励;当噪声强度 $\gamma=0.2$ 和 $\gamma=0.4$ 时,外部激励为更符合实际振动的窄带随机振动。由图13可以看出,适当的选择噪声强度,三稳态压电俘能器在窄带随机激励下具有更好的输出性能和更宽的工作频带。在实际应用中可以合理调整,以实现更好的机电能量转换。

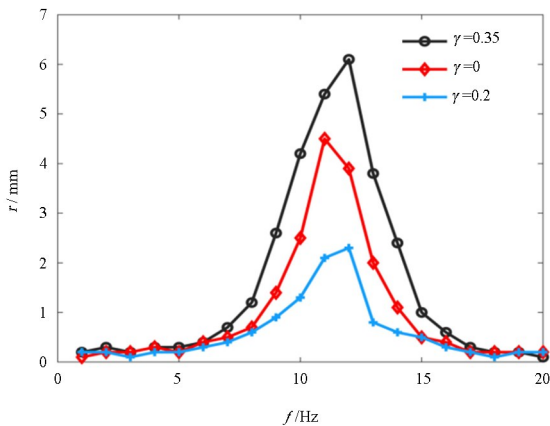


图13 不同噪声强度下俘能器的幅值幅频响应曲线

Fig.13 Amplitude frequency response of VEH with different γ

4 结论

针对三稳态压电俘能系统,基于多尺度法得到系统运动方程的解析解,分析了磁铁间距、噪声强度和加速度幅值等参数对系统响应和采集性能的影响。结果表明,对于一定带宽的窄带随机激励,始终存在一组能够产生响应峰值的磁铁间距,这一特性类似于宽频带随机激励下三稳态系统在最优磁铁间距处产生响应峰值的三稳响应特性;改变磁铁的水平 and 垂直间距,俘能器会经历单稳态、双稳态和三稳态三种运动状态。末端磁铁与外部磁铁的间距过大、过小都不利于提高能量采集器的输出性能,而俘能器做三稳态运动可以显著提高俘能器的

振动位移和采集电压;在 $d_x=10\text{mm}$, $d_y=10\text{mm}$ 时,实验得到的振动位移为,采集到的输出电压最大可达到。真实环境中窄带激励存在变化,需要根据实际情况调整俘能器的磁铁间距,从而实现更好的机电能量转换。

参考文献

- [1] ERTURK A, HOFFMANN J, INMAN D J. A piezo-magnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting [J]. Applied Physics Letters, 2009, 94(25): 254102–254104.
- [2] GLYNE-JONES P, WHITE N M. Self-powered systems: a review of energy sources [J]. Sensors Review, 2001, 21(2): 91–97.
- [3] ROUNDY S, WRIGHT P K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics [J]. Smart Materials and Structures, 2004, 13(5): 1131–1144.
- [4] 杨斌强, 徐文潭, 王广庆. 带弹性放大器的双稳态压电振动能量采集器 [J]. 传感技术学报, 2017, 30(5): 684–691.
YANG B Q, XU W T, WANG G Q. A bistable piezoelectric vibration energy harvester with an elastic magnifier [J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2017, 30(5): 684–691. (in Chinese)
- [5] GUAN M J, LIAO W H. On the efficiencies of piezoelectric energy harvesting circuits towards storage device voltages [J]. Smart Materials and Structures, 2007, 16(2): 498–505.
- [6] YAO M H, MA L, ZHANG W. Study on power generations and dynamic responses of the bistable straight beam and the bistable L-shaped beam [J]. Science China-Technological Sciences, 2018, 61(9): 1404–1416.
- [7] ARRIETA A F, HAGEDORN P, ERTURK A, et al. A piezoelectric bistable plate for nonlinear broadband energy harvesting [J]. Applied Physics Letters, 2010, 97(10): 174103.
- [8] STANTON S C, OWENS B, MANN B P. Harmonic balance analysis of the bistable piezoelectric inertial generator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2012, 331(15): 3617–3627.
- [9] HARNE R L, WANG K W. A review of the recent research on vibration energy harvesting via bi-stable systems [J]. Smart Materials and Structures, 2013,

- 22(2): 023001.
- [10] 吴子英,叶文腾,刘蕊. 一种新型双稳态电磁式振动能量捕获器动力学特性研究 [J]. 应用力学学报, 2017, 34(5): 848—854.
- WU Z Y, YE W T, LIU R. Dynamics of a novel bistable electromagnetic vibration energy harvester [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2017, 34(5): 848—854.(in Chinese)
- [11] ZHU P, REN X M, QIN W Y, et al. Improving energy harvesting in a tri-stable piezomagnetoelastic beam with two attractive external magnets subjected to random excitation [J]. Archive of Applied Mechanics, 2016, 87(1): 1—13.
- [12] ZHU P, REN X M, QIN W Y, et al. Theoretical and experimental studies on the characteristics of a tri-stable piezoelectric harvester [J]. Archive of Applied Mechanics, 2017, 87(9): 1541—1554.
- [13] ZHOU S X, CAO J Y, INMAN D J, et al. Broadband tristable energy harvester: modeling and experiment verification [J]. Applied Energy, 2014, 133(1): 33—39.
- [14] ZHOU Z Y, QIN W Y, ZHU P. Energy harvesting in a quad-stable harvester subjected to random excitation [J]. Aip Advances, 2016, 6(2): 785—791.
- [15] KIM P, SEOK J. Dynamic and energetic characteristics of a tri-stable magnetopiezoelectric energy harvester [J]. Mechanism & Machine Theory, 2015, 94: 41—63.
- [16] LENG Y G, TAN D, LIU J J, et al. Magnetic force analysis and performance of a tri-stable piezoelectric energy harvester under random excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 406: 146—160.
- [17] BEEBY S P, WANG L, ZHU D, et al. A comparison of power output from linear and nonlinear kinetic energy harvesters using real vibration data [J]. Smart Materials and Structures, 2013, 22(7): 075022.
- [18] ZHU W Q, LU M Q, WU Q T. Jump and bifurcation of duffing oscillator under narrowband excitation [J]. Acta Mechanica Sinica, 1994, 10(1): 73—81.
- [19] 戎海武,王向东,徐伟. 窄带随机噪声作用下 Duffing 振子的双峰稳态概率密度 [J]. 物理学报, 2005, 54(6): 2557—2560.
- RONG H W, WANG X D, XU W. On double-peak probability density functions of a Duffing oscillator under narrow-band random excitation [J]. Acta Physica Sinica, 2005, 54(6): 2557—2560. (in Chinese)
- [20] 吴娟娟. 窄带随机激励下双稳压电悬臂梁响应特性与能量采集研究 [D]. 天津: 天津大学, 2018.
- WU J J. Response characteristic of a nonlinear bistable piezoelectric cantilever beam under narrow-band random excitations and its energy harvesting [D]. Tianjin: Tianjin University, 2018. (in Chinese)
- [21] JIN Y F, ZHANG Y X. Dynamics of a delayed Duffing-type energy harvester under narrow-band random excitation. Acta Mechanica, 2021, 232: 1045—1060.
- [22] 满大伟. 非线性多稳态压电俘能器的动力特性分析 [D]. 合肥: 合肥工业大学, 2019.
- MAN D W. Analysis of dynamic characteristics of nonlinear multi-stable piezoelectric energy harvester [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2019. (in Chinese)
- [23] 唐炜,王小璞,曹景军. 非线性磁式压电振动能量采集系统建模与分析 [J]. 物理学报, 2014, 63(24): 72—85.
- TANG W, WANG X P, CAO J J. Modeling and analysis of piezoelectric vibration energy harvesting system using permanent magnetism [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(24): 72—85.(in Chinese)
- [24] 满大伟,王建国. 梁端磁铁尺寸对三稳态压电俘能器性能影响分析. 应用力学学报, 2020, 37(4): 1—7.
- MAN D W, WANG J G. Size effect of tip magnet on the performance of tri-stable piezoelectric energy harvesters [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(4): 1—7.(in Chinese)
- [25] DAVIES H G, LIU Q. The response envelope probability density function of a Duffing oscillator with random narrow-band excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 139(1): 1—8.