

## 5 : 3 内共振轨道的非线性动力学研究 \*

周毅<sup>1,2</sup> 张伟<sup>1†</sup>

(1.北京工业大学材料与制造学部,北京 100124)

(2.淮南师范学院金融与数学学院,淮南 232038)

**摘要** 在平面圆型限制性三体模型基础上,详细研究了处于 5 : 3 内共振的二阶共振轨道的动力学特性和演化.计算并得到了处于精确共振时的临界半长轴、临界偏心率和共振角与相位之间的关系.计算获得了 $(\theta, a)$ 平面上的庞加莱截面,系统地分析了偏心率、初始位置对于二阶共振轨道拓扑结构的动力学影响,解释了共振岛屿数量的变迁过程.利用庞加莱截面得到了一些经典轨道,如周期、概周期和混沌轨道,研究了小天体轨道的演化过程.在 $(\theta, e, a)$ 空间内生成共振域,得到了可视化的稳定域和混沌域.

**关键词** 平运动共振, 庞加莱截面, 概周期轨道, 混沌

**中图分类号**: O327

**文献标志码**: A

## Nonlinear Dynamics of the 5 : 3 Internal Resonant Orbit \*

Zhou Yi<sup>1,2</sup> Zhang Wei<sup>1†</sup>

(1.College of Mechanical Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(2.School of Finance and Mathematics, Huainan Normal University, Anhui 232038, China)

**Abstract** Based on the planar circular restricted three-body problem, the nonlinear dynamics of the second order 5 : 3 internal mean motion resonance are studied. The eccentricity and initial location, namely the semimajor axis and phase, of the asteroid significantly affect the steady-state of the resonant orbits. The transition mechanisms are obtained for the number of the stable islands. Some typical orbits, including periodic, quasi-periodic, and chaotic ones, are obtained. Resonance spaces are generated in  $(\theta, e, a)$  coordinate system, offering an intuitive visualization of stable and chaotic domains.

**Key words** mean motion resonance, Poincaré map, quasi-periodic orbit, chaos

### 引言

轨道共振或称平运动共振是指卫星、行星等两个或多个天体的轨道频率之间存在简单的整数倍关系,并且是互素的<sup>[1,2]</sup>.平运动共振是为太阳系和

系外行星系统提供稳定性的一个基本机制<sup>[3,4]</sup>.即使天体之间精确的共振不存在,但是稳定的拟周期轨道或者在平衡点附近的稳定运动仍然是可能存在的.这给保持天体轨道稳定,阻止天体之间近距离接近或受到大的扰动提供了可能性<sup>[5,6]</sup>.共振也

可能激发轨道偏心率或倾角<sup>[7]</sup>,潜在地增强潮汐能量耗散,从而导致轨道失稳.这种不稳定性可以用来设计人造天体的转移轨道或者逃逸轨道.

目前人们观测发现的稳定运行的共振天体,绝大部分处于一阶<sup>[8]</sup>、二阶<sup>[9]</sup>和三阶<sup>[10,11]</sup>等低阶共振.近年来,由美国国家航空航天局主持的开普勒任务和其后续计划凌日外行星勘测项目的观测数据显示,一些多行星系统内的行星之间形成或者非常接近共振<sup>[12]</sup>,如 1 : 3, 3 : 5 平运动共振<sup>[13,14]</sup>等.

Michtchenko 和 Ferraz-Mello<sup>[11]</sup>利用一般平面三体模型,模拟了木星-土星系统的 5 : 2 平运动共振,得到了这个共振系统的不同运动状态. Smirnov 等人<sup>[15,16]</sup>利用数值积分和机器学习的方法,识别出部分与太阳系行星处于三体轨道共振中的小行星. Correa-Otto 等人<sup>[17]</sup>构建了一个半解析模型用来计算与火星发生平运动共振的匈牙利族小行星,发现了 23 颗处于 2 : 3 外共振的小行星.通过理论分析和数值模拟, Huang, Ji 和 Dong<sup>[18]</sup>对热海王星系统 2 : 1 共振捕获和潮汐耗散进行了研究,探讨了 HD106315c 的初始半长轴、偏心率以及偏心率衰减系数对系统轨道结构的影响.众多学者此前的研究多集中在共振轨道的识别以及低偏心率条件下小天体轨道的演化,对于大偏心率情形下共振轨道的研究较少.本文借助庞加莱截面,讨论了初始位置和在(0.1, 0.95)大范围内的初始偏心率变化对共振轨道的动力学影响.

## 1 平面圆型限制性三体模型

平面圆型限制性三体问题(PCR3BP)是研究无限小质量体在两个以圆轨道相互绕行的有限质量体引力场下的运动,小天体的运动被限制在大天体的轨道平面内(图 1).

假设小天体 A, 第一主天体 S 和第二主天体 P 质量分别为  $m, m_1$  和  $m_2$ , 且  $m \ll m_2 < m_1$ . 会合坐标系  $O-xy$  平面与 S、P 轨道平面重合, 原点  $O$  取在 S 和 P 的质心上,  $x$  轴从 S 指向 P,  $y$  轴与  $x$  轴构成右手坐标系.  $\theta$  是第二主天体 P 和小天体 A 近心点的夹角. 引入质量比  $\mu = m_2/(m_1+m_2)$ , 则大天体 S 和 P 在会合坐标系下的坐标分别为  $(-\mu, 0)$  和  $(1-\mu, 0)$ . 小天体的方程可表示为:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3} \quad (1)$$

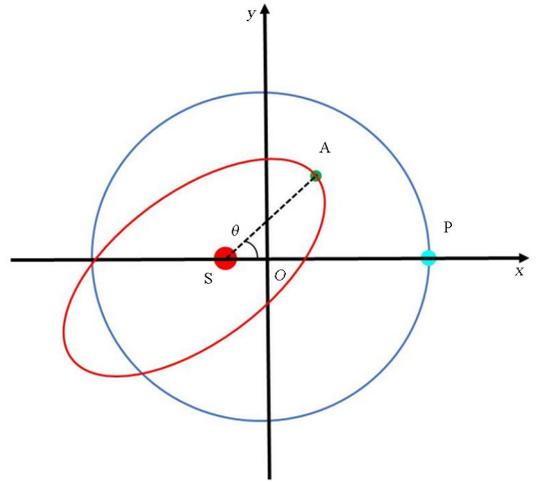


图 1 会合坐标系下平面圆型限制性三体问题  
Fig.1 The PCR3BP in synodic frame

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} - \frac{\mu y}{r_2^3} \quad (2)$$

其中  $r_1$  和  $r_2$  分别是小天体 A 到两个大天体 S 和 P 的距离:

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \quad (3)$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2} \quad (4)$$

假设两个天体 A 与 P 的平运动速度为  $n$  与  $n_1$ , 周期为  $T$  与  $T_1$ . 当满足:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{T_1}{T} = \frac{p+i}{p} \quad (5)$$

时, 称 A 与 P 成  $(p+i) : p$  共振,  $i$  称为共振阶数(其中  $p+i, p$  为互素整数). 若天体 A 的轨道半长轴  $a$  小于 P 的轨道半长轴  $a_1$ , 也即 A 的轨道在 P 轨道的内部, 则称 A 与 P 成  $(p+i) : p$  内共振(本文中  $p=3, i=2$ ); 反之称为外共振.

由开普勒第三定律, 可知:

$$\frac{n}{n_1} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} (1-\mu)^{\frac{1}{2}} = \frac{p+i}{p} \quad (6)$$

当发生  $(p+i) : p$  精确共振时, 半长轴  $a_e$  满足:

$$a_e = \left(\frac{p}{p+i}\right)^{\frac{2}{3}} (1-\mu)^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

对于  $(p+i) : p$  平运动内共振, 定义共振角:

$$\varphi = (p+i)\lambda' - p\lambda - i\bar{\omega} \quad (8)$$

其中  $\lambda = M + \bar{\omega}$ ,  $\lambda' = M' + \bar{\omega}'$ .  $\lambda$  和  $\lambda'$  分别是小天体 A 和第二主天体 P 的平黄经,  $M$  和  $M'$  是平近点

角,  $\bar{\omega}$  和  $\bar{\omega}'$  是近心点经度. 方程(8)给出的是精确共振时共振角满足的关系. 当小天体位于轨道的近心点时, 有  $\lambda = \bar{\omega}$  且  $\theta = \lambda' - \bar{\omega}$ , 则

$$\varphi = (p + i)\theta \tag{9}$$

由方程(9)可知, 当发生  $(p + i) : p$  精确平运动内共振时,  $\varphi$  与  $\theta$  之间呈简单地线性关系, 其物理意义是能够有效的避免小天体 A 与第二主天体 P 之间毁灭性的近距离接触.

## 2 5 : 3 内共振的共振轨道

假设小天体 A 与第二主天体 P 形成精确的 5 : 3 平运动内共振, 质量比  $\mu = 5 \times 10^{-5}$ , 则小天体的轨道半长轴  $a_c$  可由方程(7)计算获得:

$$a_c = \left( \frac{p}{p+i} \right)^{\frac{2}{3}} (1-\mu)^{\frac{1}{3}} \approx 0.7114 \tag{10}$$

小天体 A 的远心点距离  $d_a$  为:

$$d_a = a(1+e) \tag{11}$$

当远心点距离  $d_a$  等于  $1 - 2\mu$  时, 小天体 A 的共振轨道内切于第二主天体的轨道; 当远心点距离  $d_a$  小于  $1 - 2\mu$  时, 小天体 A 的共振轨道由内而外穿越第二主天体的轨道. 故有下述关系:

$$a_c(1+e_c) = 1 - 2\mu \tag{12}$$

临界偏心率为:

$$e_c = \frac{1 - 2\mu}{a_c} - 1 \approx 0.4056 \tag{13}$$

由方程(8)和方程(9), 可得共振角为:

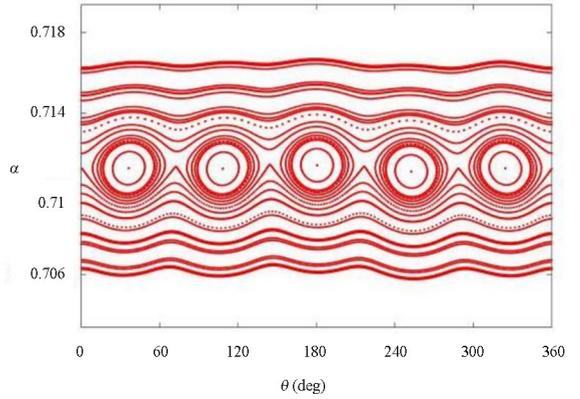
$$\varphi = 5\lambda' - 3\lambda - 2\bar{\omega} \tag{14}$$

为了研究小天体 A 共振轨道的不同相空间结构, 以下我们将计算  $(\theta, a)$  平面上的庞加莱截面, 讨论初始偏心率和初始位置(初始相位和初始半长轴)对于轨道演化的作用.

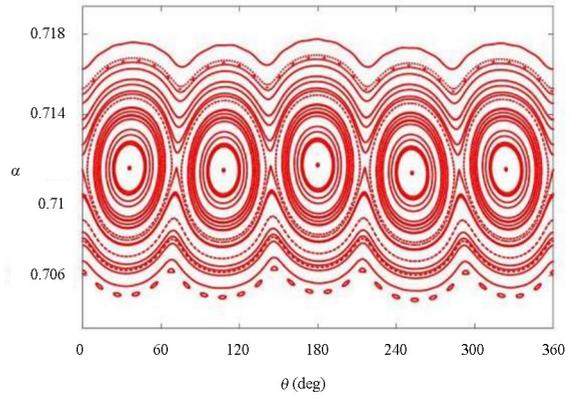
### 2.1 偏心率 $e < 0.4056$ 时, 共振轨道的几何结构

从图 2(a)和图 2(b)可以看出, 当小天体 A 的偏心率  $e < 0.4056$  时, 庞加莱截面上存在 5 个稳定岛屿(第一共振区), 它们的中心分别在  $\theta = 36^\circ, 108^\circ, 180^\circ, 252^\circ$  和  $324^\circ$ . 位于这些稳定岛屿的中心分别有一个不动点, 对应于稳定的周期轨道. 围绕着不动点的光滑闭合曲线代表了围绕稳定精确 5 : 3 内共振轨道振动的概周期轨道. 处于这些稳定概周期轨道上的小天体的共振角呈现出天平动现象, 称该轨道为天平动轨道. 这意味着共振角  $\varphi$  会

在某个值附近振荡(即  $\dot{\varphi}$  周期性的改变符号), 且其振幅小于  $360^\circ$ . 稳定岛屿的外部被光滑非闭合曲线包围, 这些非闭合曲线也对应着概周期轨道. 处于这些光滑非闭合曲线上的小天体的共振角持续增大或减小(即  $\dot{\varphi}$  的符号保持不变), 该轨道为循环轨道. 在较小的偏心率下, 小天体的远心点距离远小于行星的轨道半径, 因此由低质量第二主天体引起的引力扰动较小, 在这种情况下不存在混沌区域.



(a)  $e = 0.1$  时的庞加莱截面  
(a) Poincaré section with  $e = 0.1$



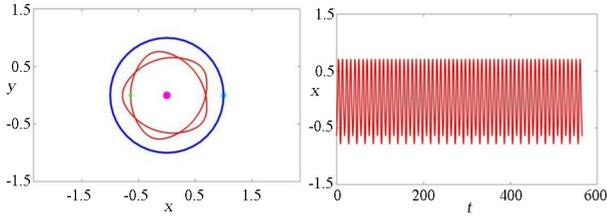
(b)  $e = 0.2$  时的庞加莱截面  
(b) Poincaré section with  $e = 0.2$

图 2 5 : 3 内共振轨道庞加莱截面

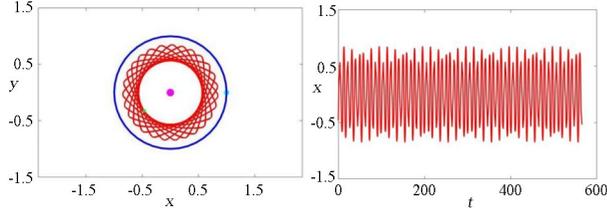
Fig.2 Poincaré section of 5 : 3 internal MMR

图 3(a)和图 3(b)给出了偏心率  $e = 0.1$ , 初始位置  $(\theta_0, a_0) = (180^\circ, 0.7114)$  [记作  $(0.1, 180^\circ, 0.7114)$ ] 的小天体处于精确的 5 : 3 平运动内共振时在  $(x, y)$  面上的相图和在  $(t, x)$  面上的时序图. 该共振轨道对应的是图 2(a)中心在  $\theta = 180^\circ$  的第一共振区的不动点, 小天体 A 在大天体 S 和 P 的引力作用下做稳定的周期运动.

图 3(c)和图 3(d)给出了初始条件为  $(0.2, 215^\circ, 0.7061)$  的小天体的相图和时序图, 此时小天体 A 做稳定的概周期运动.



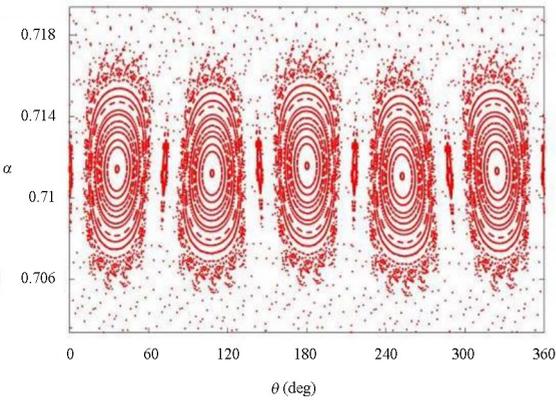
(a) 初始条件为(0.1, 180°, 0.7114)小天体的相图 (b) 时序图  
(a) Phase diagram (b) Time series



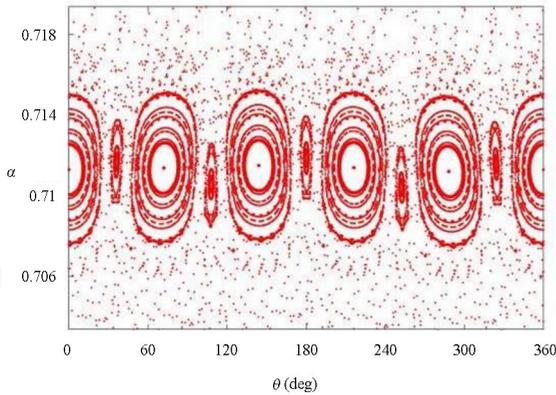
(c) 初始条件为(0.2, 215°, 0.7061)小天体的相图 (d) 时序图  
(c) Phase diagram (d) Time series

图3 不同初始条件下小天体5:3内共振轨道的相图和时序图  
Fig.3 Phase portraits and time series

## 2.2 偏心率 $0.4056 \leq e < 0.75$ 时, 共振轨道的几何结构



(a)  $e=0.45$  时的庞加莱截面  
(a) Poincaré section with  $e=0.45$



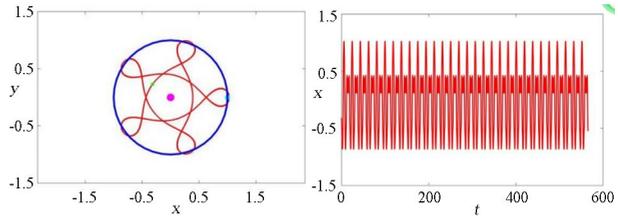
(b)  $e=0.7$  时的庞加莱截面  
(b) Poincaré section with  $e=0.7$

图4 5:3内共振轨道庞加莱截面

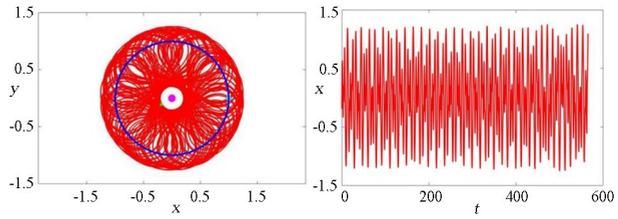
Fig.4 Poincaré section of 5:3 internal MMR

偏心率  $e \geq 0.4056$  时, 五个以  $\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$  和  $288^\circ$  为中心的新稳定岛屿(第二共振

区)出现在庞加莱截面上(见图4), 稳定岛屿的数量从5个增加到10个. 这些新的稳定岛屿代表着新的稳定周期轨道和概周期轨道. 当偏心率进一步增大时, 第一共振区会持续收缩直到完全消失. 另一方面, 第二共振区继续扩张.



(a) 初始条件为(0.45, 144°, 0.7114)小天体的相图 (b) 时序图  
(a) Phase diagram (b) Time series



(c) 初始条件为(0.7, 210°, 0.718)小天体的相图 (d) 时序图  
(c) Phase diagram (d) Time series

图5 不同初始条件下小天体5:3内共振轨道的相图和时序图  
Fig.5 Phase portraits and time series

图5(a)和图5(b)是初始条件为(0.45, 144°, 0.7114)的小天体的相图和时序图. 该稳定的周期轨道对应的是图4(a)中心在  $\theta = 144^\circ$  的第二共振区的不动点. 此时相图是一条五叶曲线, 第二主天体的虚拟轨道被分割成10段, 导致庞加莱截面上的第二共振区出现, 稳定岛屿数量由5个增加到10个. 随着叶瓣内弧段的长度增加, 第二共振区持续扩大.

图5(c)和图5(d)是初始条件为(0.7, 210°, 0.718)的小天体的混沌轨道.

## 2.3 偏心率 $0.75 \leq e < 0.8$ 时, 共振轨道的几何结构

如图6所示, 当偏心率大于0.75时, 第一共振区消失, 稳定岛屿的数量从10个减少到5个. 同时, 以  $\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$  和  $288^\circ$  为中心的第二共振区的覆盖的范围变大.

图7(a)和图7(b)是初始条件为(0.75, 0°, 0.7114)的小天体的稳定周期轨道. 第二主天体的虚拟轨道被小天体轨道的五个叶瓣分割成五段, 第一共振区消失, 稳定岛屿数量减到5个. 图7(c)和图7(d)是初始条件为(0.75, 340°, 0.71)的小天体概周期轨道.

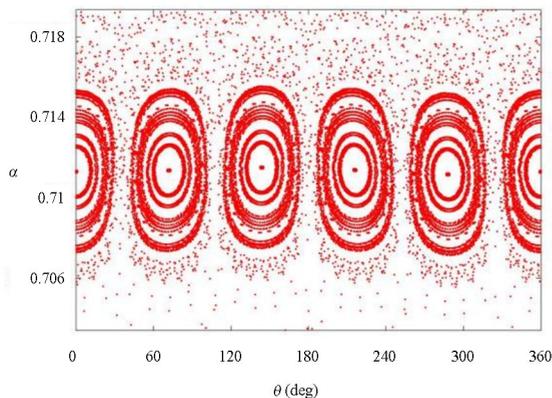
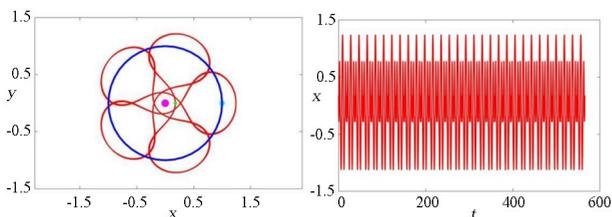
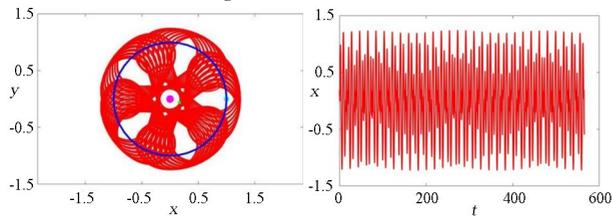


图 6 偏心率  $e=0.8$  时, 小天体的庞加莱截面  
Fig.6 Poincaré section with  $e=0.8$



(a) 初始条件为  $(0.75, 0^\circ, 0.7114)$  小天体的相图 (b) 时序图  
(a) Phase diagram (b) Time series



(c) 初始条件为  $(0.75, 340^\circ, 0.71)$  小天体的相图 (d) 时序图  
(c) Phase diagram (d) Time series

图 7 不同初始条件下小天体 5 : 3 内共振轨道的相图和时序图  
Fig.7 Phase portraits and time series

### 2.4 偏心率 $e > 0.8$ 时, 共振轨道的几何结构

当偏心率增加到 0.8 以上时, 第一共振区会重新出现并以第二共振区的缩减为代价而扩张(见图 8), 同时混沌区域也在不断扩大. 稳定的岛屿数量再次从 5 个增加到 10 个.

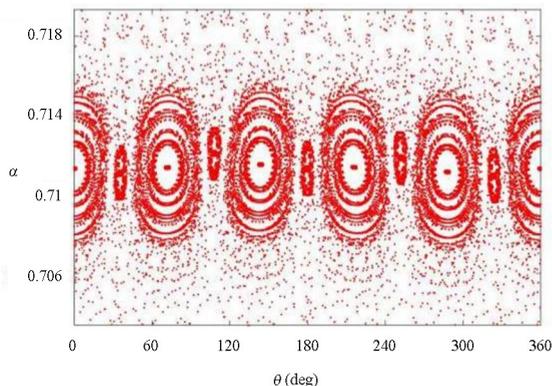
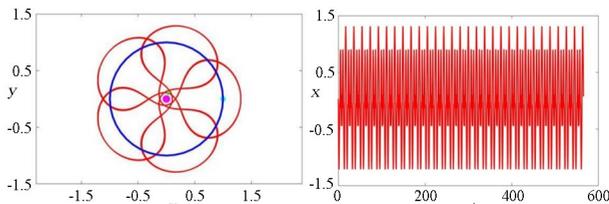
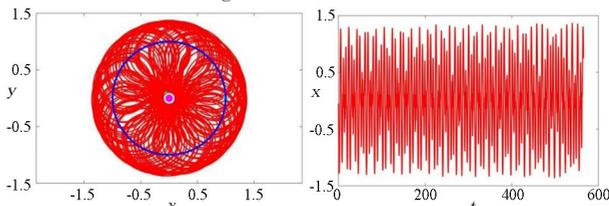


图 8 偏心率  $e=0.85$  时, 小天体的庞加莱截面  
Fig.8 Poincaré section with  $e=0.85$

图 9(a)和图 9(b)是初始条件为  $(0.85, 72^\circ, 0.7114)$  的小天体的稳定周期轨道. 共振轨道的五个叶瓣产生交叉, 第二主天体的虚拟轨道又被分割成 10 段, 庞加莱截面上出现 10 个稳定岛屿. 图 9(c)和图 9(d)是初始条件为  $(0.85, 120^\circ, 0.703)$  的小天体轨道在  $(x, y)$  面上的相图和在  $(t, x)$  面上的时序图, 小天体 A 在大天体 S 和 P 的引力作用下做混沌运动.



(a) 初始条件为  $(0.85, 72^\circ, 0.7114)$  小天体的相图 (b) 时序图  
(a) Phase diagram (b) Time series



(c) 初始条件为  $(0.85, 120^\circ, 0.703)$  小天体的相图 (d) 时序图  
(c) Phase diagram (d) Time series

图 9 不同初始条件下小天体 5 : 3 内共振轨道的相图和时序图  
Fig.9 Phase portraits and time series

### 2.5 共振域的全景图

如图 10 所示, 将偏心率在 0.1~0.95 内计算得到的庞加莱截面上的所有点绘制在  $(\theta, e, a)$  坐标系中, 由此得到 5 : 3 内共振的共振域. 在  $(\theta, e, a)$  坐标系下, 共振区域形成 10 个椭圆锥体, 垂直于  $e$  轴的截面是庞加莱截面.

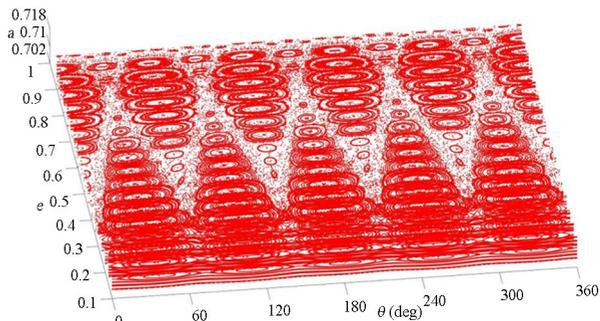


图 10 小天体 5 : 3 内共振在  $(\theta, e, a)$  坐标系下的共振域  
Fig.10 Resonance space of 5 : 3 internal MMR

随着偏心率的增大, 中心位于  $\theta = 36^\circ, 108^\circ, 180^\circ, 252^\circ$  和  $324^\circ$  的五个椭圆锥的垂直于  $e$  轴的截面半径先增大后减小直至为 0, 最后截面再次出现

并增大.另外五个中心位于  $\theta = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 216^\circ$  和  $288^\circ$  的椭圆锥截面半径先增大后减小,锥面是稳定共振域和不稳定域的分界面,锥面上的点做概周期运动.锥体内部的小天体表现出周期和概周期两种稳定运动.锥体外部空间中的无序点对应混沌运动.

### 3 结论

本文基于平面圆型限制性三体模型,研究了处于  $5:3$  平运动内共振的小天体的二阶共振轨道动力学.在  $(\theta, a)$  平面上生成了随小天体偏心率变化的共振轨道的庞加莱截面,研究了偏心率对小天体共振轨道庞加莱截面拓扑结构的动力学影响,发现偏心率、初始相位和初始半长轴对小天体共振轨道的演化和稳定性都具有重要的影响.概周期轨道是保持小天体轨道稳定,防止小天体进入混沌区域的重要机制.利用庞加莱截面,得到了一些典型的轨道,包括周期轨道、准周期轨道和混沌轨道.在  $(\theta, e, a)$  坐标系中生成了共振域,提供了稳定域和混沌域的直观可视化.

精确的  $5:3$  内共振轨道在偏心率大于  $0.1$  时具有  $5$  个叶瓣;并且这个轨道在庞加莱截面上的稳定岛屿数量与第二主天体虚拟轨道被  $5$  个叶瓣分割成的圆弧段数量有关.稳定岛屿数量转迁的机制如下:

(1) 当  $e < 0.4056$  时,庞加莱截面上有  $5$  个稳定岛屿;

(2) 当  $0.4056 \leq e < 0.75$  时,小天体共振轨道的  $5$  个叶瓣将第二主天体的虚拟轨道分割为  $10$  段圆弧,结果使稳定岛屿的数量翻倍到  $10$  个;

(3) 当  $0.75 \leq e \leq 0.8$  时,共振轨道的  $5$  个叶瓣将第二主天体的虚拟轨道分割成  $5$  段近似等长的圆弧,导致稳定岛的数量从  $10$  个减少到  $5$  个;

(4) 当  $0.8 < e$  时,共振轨道的  $5$  个叶瓣形成交叉,再一次将第二主天体的虚拟轨道分割为  $10$  段圆弧,稳定岛屿的数量又增加到  $10$  个.

### 参考文献

[1] BEUTLER G, MERVART L, VERDUN A. Methods of celestial mechanics [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[2] LEMAÎTRE A. Resonances: models and captures in dynamics of small solar system bodies and exoplanets [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2010.

[3] CARVALHO J P S, MOURÃO D C, DE MORAES R V, et al. Exoplanets in binary star systems: on the switch from prograde to retrograde orbits [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2016, 124: 73–96.

[4] ANTONIADOU K I. Regular and chaotic orbits in the dynamics of exoplanets [J]. European Physical Journal: Special Topics, 2016, 225: 1001–1016.

[5] NAYFEH A H, KAMEL A A. Three-to-one resonances near the equilateral libration points [J]. AIAA Journal, 1970, 8: 2245–2251.

[6] NAYFEH A H. Two-to-one resonances near the equilateral libration points [J]. AIAA Journal, 1971, 9: 23–27.

[7] MURRAY C D, DERMOTT S F. Solar system dynamics [M]. New York: Cambridge University Press, 1999.

[8] KOTOULAS T, VOYATZIS G. Retrograde periodic orbits in  $1/2$ ,  $2/3$  and  $3/4$  mean motion resonances with Neptune [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2020, 132: 1–16.

[9] JENKINS J S, TUOMI M, BRASSER R, et al. Two super-earths orbiting the solar analogue HD41248 on the edge of a  $7:5$  Mean Motion Resonance [J]. The Astrophysical Journal, 2013, 771: 41.

[10] CAMPANELLA G. Treating dynamical stability as an observable: A  $5:2$  mean motion resonance configuration for the extrasolar system HD 181433 [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2011, 418: 1028–1038.

[11] MICHTCHENKO T A, FERRAZ-MELLO S. Modeling the  $5:2$  mean-motion resonance in the jupiter-saturn planetary system [J]. Icarus, 2001, 149: 357–374.

[12] XU W, LAI D. Migration of planets into and out of mean motion resonances in protoplanetary discs: Analytical theory of second-order resonances [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2017, 468: 3223–3238.

[13] DECK K M, AGOL E. Transit timing variations for planets near eccentricity-type mean motion resonances [J]. The Astrophysical Journal, 2016, 821: 96.

- [14] MUSTILL A J, WYATT M C. Hamiltonian model of capture into mean motion resonance [C]. Proceedings of the International Astronomical Union, 2010, 6: 300–303.
- [15] SMIRNOV E A. Asteroids in three-body mean-motion resonances with Jupiter and Mars [J]. Solar System Research, 2017, 51: 145–149.
- [16] SMIRNOV E A, MARKOV A B. Identification of asteroids trapped inside three-body mean motion resonances: A machine-learning approach [J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 2017, 469: 2024–2031.
- [17] Correa-Otto J A, CAÑADA-ASSANDRI M, GARCIA R S, et al. Dynamical classification of the asteroids in the Hungaria group: The objects affected by the exterior mean-motion resonance 2 : 3 with Mars [J]. Icarus, 2021, 367: 114564.
- [18] HUANG X M, JI J H, DONG Y. Near 2 : 1 mean motion resonance capture and orbital evolution of a Hot-Neptune system: Hd 106315 [J]. Chinese Astronomy and Astrophysics, 2021, 45: 99–117.