

# 非线性车辆悬架系统的滞后分岔及多稳态控制\*

贺尔星 赵文浩 刘润 李高磊 乐源<sup>†</sup>

(西南交通大学 力学与航空航天学院 应用力学与结构安全四川省重点实验室,成都 610031)

**摘要** 考虑一类单自由度 1/4 非线性车辆悬架系统,根据 Floquet 理论得到周期运动的 Floquet 乘子用于判定其稳定性;并得到 Lyapunov 指数用于刻画混沌运动的性质,揭示了系统中一种新的滞后分岔:滞后环由一条稳定的周期轨道、一条不稳定周期轨道和一条周期轨道的倍化序列构成,其中周期轨道的倍化序列在滞后环的边界已经形成混沌轨道;因此随参数改变在该滞后环边界将产生一条稳定周期轨道与一条混沌轨道之间的跳跃现象,并且,若周期倍化序列形成的混沌轨道在滞后环边界处与不稳定周期轨道接触,混沌轨道将产生边界激变而突然消失,并跳跃至另一条稳定的周期轨道.根据线性增益控制法,实现了滞后环内部的多稳态控制,包括从大振幅周期 3 轨道控制到小振幅周期 1 轨道,以及周期 1 轨道控制到混沌轨道,本文研究结果可为车辆悬架的动力学设计提供理论参考.

**关键词** 非线性车辆悬架, 滞后分岔, 周期倍化序列, 边界激变, 多稳态控制

**中图分类号:** O313

**文献标志码:** A

## Hysteresis Bifurcation and Control Multistability of Nonlinear Vehicle Suspension System\*

He Erxing Zhao Wenhao Liu Run Li Gaolei Yue Yuan<sup>†</sup>

(SApplied Mechanics and Structure Safety Key Laboratory of Sichuan Province, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

**Abstract** A single-degree-of-freedom quarter suspension system is considered. According to the theory of Floquet, we can get the Floquet multiplier which is employed to determine the stability of period trajectory and the Lyapunov exponent which is employed to determine the nature of chaos motion. We reveal a new hysteresis bifurcation: hysteresis loop is composed of a stable period trajectory and an unstable period trajectory, the stable period trajectory which has a complete period-doubling sequence. The period-doubling sequence has appeared a chaos trajectory on the boundary of the hysteresis loop, so there will occur jumping phenomena between the stable period trajectory and the chaos trajectory on the boundary of the hysteresis loop as the change of parameters. In addition, if the chaos trajectory formed by period-doubling sequence meets with unstable trajectory on the boundary of the hysteresis loop, the chaos trajectory will occur boundary crisis and disappeared suddenly, then jumps to the other stable trajectory. According to the method of linear augmentation control, the multistability is controlled which insides of hysteresis loop, including the high amplitude 3-period trajectory has controlled to low amplitude

1-period trajectory and 1-period motion has controlled to chaos motion. The results of the research can provide theoretical reference for the dynamics design of vehicle suspension.

**Key words** Nonlinear suspension system, hysteresis bifurcation, period-doubling sequence, boundary crisis, control of multistability

## 引言

车辆悬架系统的动力学研究对于提高车辆系统的隔振性能和安全性能具有重要意义;线性悬架模型在固有频率远低于激励频率时才采用,在冲击、高频路况等情况下,需要采用非线性悬架模型<sup>[1]</sup>.Metwalli<sup>[2]</sup>提出了一种非线性悬架模型,考虑了非线性刚度和非线性阻尼对车辆悬架系统垂直加速度取最小值的影响.孙蓓蓓等<sup>[3]</sup>研究了用橡胶弹簧作为隔振构件的车辆悬架系统,为了避免橡胶悬架系统在某些参数下出现跳跃等不稳定现象,在悬架优化设计时必须选择合适的刚度参数范围.

空气弹簧因其在高频有着良好的隔振效果以及能使所支撑的系统具有非常低的固有频率而比金属弹簧更受众多汽车制造商的青睐<sup>[4]</sup>.Chang等<sup>[5]</sup>从理论上导出空气弹簧非线性恢复力为位移的三次多项式,并将其应用到1/4车辆悬架模型的研究中,研究结果表明,对空气弹簧几何参数的优化选择可以提高车辆的平顺性.伊万建<sup>[6]</sup>通过对空气弹簧的实验分析,给出了空气弹簧用于车辆悬架的非线性恢复力亦为三次多项式.

负刚度弹簧因在准零刚度机构(quasi-zero-stiffness mechanism, QZS)的应用而受到关注, E.Palomares等通过实验测试和数值仿真表明,与无负刚度弹簧的被动悬架系统相比,有负刚度的被动悬架系统隔振性能得到了改善<sup>[7]</sup>.曹计欢等<sup>[8]</sup>研究了负刚度弹簧和空气弹簧并联的单自由度悬架系统的1/3次亚谐共振,结果表明,随着负刚度弹簧绝对值的增大,可以降低系统的共振频率,但会增大亚谐波共振幅值.

多稳态是指在不同初始值下,多种稳态解存在于同一组参数条件下的现象<sup>[9]</sup>.系统存在多稳态的利弊取决于实际工程背景,对于胶囊系统,多稳态需要被控制以便使胶囊保持向前运动<sup>[10]</sup>;而在由随机噪声诱导的多稳态系统中,系统的稳态解会被随机扰动到另一个不被期望的稳态解,这时需要控

制多稳态以对抗噪声的影响<sup>[10,11]</sup>.JIANG<sup>[12]</sup>考察了周期反馈控制在Duffing系统中的应用,线性增益反馈控制是周期反馈控制的改进;Liu等<sup>[13]</sup>在非光滑碰撞系统中对线性增益反馈控制的有效性进行了数值分析.为提高车辆悬架的平顺性,有必要对其振动特性的进行分析与控制,张航星等<sup>[14]</sup>对三轴重载车辆半主动悬架平顺性的优化控制进行了研究,设计了模糊控制器并制定了相应的控制策略,通过仿真实验说明此控制策略可以实现对该悬架平顺性的优化控制;赵义伟等<sup>[15]</sup>采用车辆二自由度模型对开关型和连续型两种控制策略进行对比分析,根据传递特性分析结果提出了混合控制策略,以改善列车高速运行时的乘坐舒适性,发现该控制策略可以有效地改善列车横向平稳性能.

激变(crisis)是指混沌吸引子与共存的不稳定不动点、不稳定周期轨道相撞的现象<sup>[16]</sup>;当发生激变时,混沌吸引子的尺寸发生剧烈变化,或突然增大,此时叫内部激变(interior crisis),或突然消失,此时叫边界激变(boundary crisis).滞后特性表现在非线性弹簧所表现出的硬特性和软特性中,其中受迫振动Duffing振子的幅频共振曲线图就具有滞后跳跃行为<sup>[17]</sup>.

朱宇杰等<sup>[18]</sup>研究了轴承-转子系统中的滚动轴承变柔度(varying compliance, VC)振动,采用谐波平衡-频时转换方法追踪系统的周期运动分支,并结合Floquet理论分析了系统亚谐共振行为的演化机制,发现系统1/2阶亚谐共振同样具有滞后跳跃行为.于航<sup>[19]</sup>分析了时滞Fitzhugh-Nagumo神经网络滞后分岔现象及应用,并对6个神经元的Fitzhugh-Nagumo神经网络的Hopf分岔以及产生的滞后分岔进行了计算和仿真验算.

目前关于车辆悬架系统的动力学研究大多集中于振动特性尤其是主共振分析方面,并没过多涉及其他丰富的动力学现象,诸如:多稳态、分岔和混沌.

本文考虑了一类单自由度1/4非线性车辆悬

架系统,揭示了该系统中新的滞后分岔现象.滞后分岔形成的滞后环由一条稳定的周期轨道、一条不稳定的周期轨道以及一条稳定周期轨道的倍化序列构成.通过线性增益控制法,在系统的同一组参数下,将系统的多稳态从大振幅周期3运动控制到小振幅周期1运动上和从周期1运动控制到混沌运动上.

## 1 非线性车辆悬架方程

受路面正弦波激励的单自由度1/4非线性车辆悬架系统如图1所示.通过在单自由度1/4车辆悬架中并联空气弹簧和负刚度弹簧的形式<sup>[8]</sup>,构成非线性车辆悬架系统,以提高车辆悬架的隔振能力.

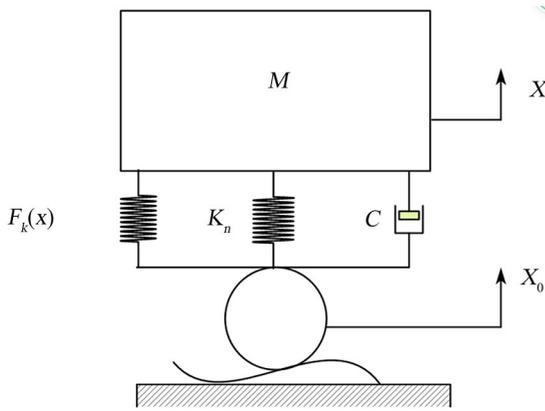


图1 单自由度1/4非线性车辆悬架系统

Fig.1 A single-degree-of-freedom quarter vehicle suspension system

其中,  $X_0 = A \sin \Omega t$  是系统所受路面激励,  $C$  是考虑空气弹簧阻尼的减振阻尼系数<sup>[6]</sup>,  $M$  是1/4车体质量<sup>[6]</sup>,  $A$  是路面激励幅值,  $X$  是悬架的垂直位移,  $\Omega$  为路面激励频率,  $K_n$  为负刚度系数<sup>[7]</sup>,  $F_k(X)$  为空气弹簧恢复力<sup>[5,6]</sup>:

$$F_k(X) = K_1 X + K_2 X^2 + K_3 X^3 \quad (1)$$

式中,  $K_1, K_2, K_3$  为空气弹簧的静态拟合参数,其值取自实验数据<sup>[6]</sup>.

根据牛顿第二定律,建立系统运动微分方程:

$$M\ddot{X} + C(\dot{X} - \dot{X}_0) + K_1(X - X_0) + K_2(X - X_0)^2 + K_3(X - X_0)^3 + K_n(X - X_0) = 0 \quad (2)$$

令  $x = X - X_0$ ,  $\omega_0^2 = \frac{K_1}{M}$ ,  $\tau = \omega_0 t$ ,  $\omega = \frac{\Omega}{\omega_0}$ , 记  $\dot{x}$

$$= x_1, \dot{x}_1 = x_2, c = \frac{C}{M\omega_0}, k_2 = \frac{K_2}{M\omega_0^2}, k_3 = \frac{K_3}{M\omega_0^2},$$

$\alpha = 1 + \frac{K_n}{M\omega_0^2}$ , 无量纲化并化为状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - c x_2 - k_2 x_1^2 - k_3 x_1^3 + A\omega^2 \sin \omega \tau \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\{(\alpha, c, k_2, k_3, A, \omega) \in \mathbf{R}^+\}$ , 即

$$\dot{x} = f(\tau, x) \quad (4)$$

式中  $x = (x_1, x_2)^T$ ,  $\tau \in \mathbf{R}$ ,  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ,  $f(\tau + 2\pi/\omega) = f(\tau, x)$ , 向量函数  $f$  满足局部 Lipschitz 条件.

## 2 Floquet 乘子

设式(4)的一个周期解为  $\varphi(\tau) = \varphi(\tau + T)$ ,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  对其施加小扰动  $\eta$ , 使得  $x = \varphi(\tau) + \eta$ , 可得其变分方程:

$$\dot{\eta} = \frac{\partial f(\tau, \varphi(\tau) + \eta)}{\partial x} \eta \quad (5)$$

式(5)的通解为:

$$\eta(\tau) = \Psi(\tau) \eta(0) \quad (6)$$

其中  $\Psi(\tau)$  是基本解矩阵,  $\eta(0)$  是与初始条件相关的积分常数, 因而可得特征方程:

$$|\Psi(T) - \rho I| = 0 \quad (7)$$

特征方程的特征根  $\rho$  为可以判断 Poincaré 映射不动点性质的 Floquet 乘子<sup>[20]</sup>; 基本解矩阵满足如下关系:

$$\eta(\tau + T) = \eta(\tau) \Psi(T) \quad (8)$$

对式(7)的特征根  $\rho$  取对数并除以周期, 即可得到计算周期轨线  $\varphi(\tau)$  的 Lyapunov 指数为:

$$\lambda = \frac{\ln(\rho)}{T} \quad (9)$$

当 Poincaré 映射为不变集时, 需要计算不变集中每一条周期轨道的 Lyapunov 指数, 并在长时间加以平均, 得到不变集的 Lyapunov 指数时间序列, 才能刻画不变集的性质, 若不变集的 Lyapunov 指数时间序列大于零, 则此 Poincaré 映射不变集为混沌吸引子.

## 3 线性增益控制法

文中对式(4)施加线性增益反馈控制, 则

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, \tau) + u(\tau) \\ \dot{x}_d = f(x_d, \tau) \end{cases} \quad (10)$$

其中,  $x$  是当前轨道,  $x_d$  是目标轨道,  $u(\tau)$  为线

性增益控制器,具体表达式见式(11),其中  $x_d = (x_{d1}, x_{d2})^T$ ;  $\zeta$  表示线性增益控制器与被控制系统的耦合强度,而  $\xi$  表示控制强度参数,控制器通过消耗系统的能量以达到控制目的<sup>[13]</sup>,若  $x = x_d$ , 则  $u(\tau) = 0$ ,即当前轨道稳定到目标轨道,完成控制过程.控制的具体方程由式(10)可得:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\alpha x_1 - cx_2 - k_2 x_1^2 - k_3 x_1^3 + A\omega^2 \sin\omega\tau + u(\tau) \\ \dot{x}_{d1} = x_{d2} \\ \dot{x}_{d2} = -\alpha x_{d1} - cx_{d2} - k_2 x_{d1}^2 - k_3 x_{d1}^3 + A\omega^2 \sin\omega\tau \\ u(\tau) = \zeta[x_1(\tau) - x_{d1}(\tau) + \xi[x_2(\tau) - x_{d2}(\tau)]] \end{cases} \quad (11)$$

## 4 数值模拟

### 4.1 滞后分岔、多稳态与激变

考察负刚度的影响,取  $\alpha$  作为控制参数,并取系统参数(1):  $\omega = 0.41, k_2 = 0.5, k_3 = 0.3, c = 0.08, A = 0.2$ ,系统分岔图如图 2 所示;图中黑虚线表示不稳定的周期 1 轨道.

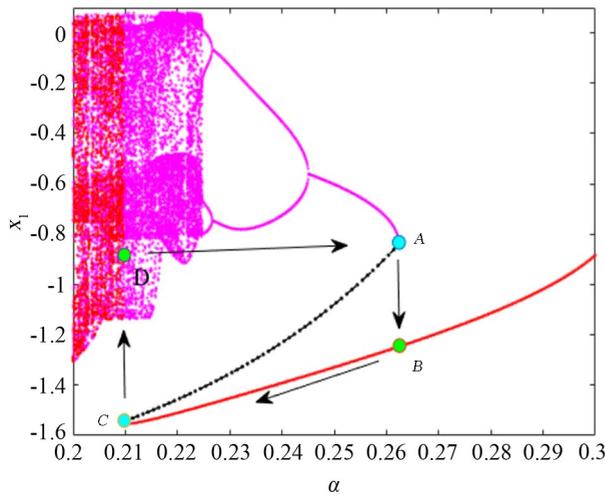


图 2 分岔图  
Fig.2 Bifurcation diagram

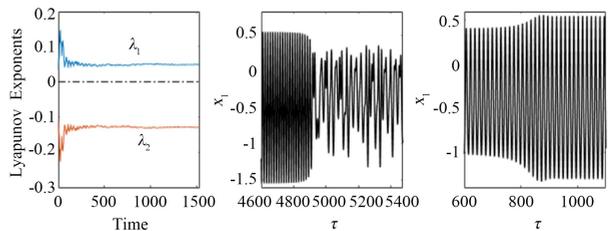
由图 2 可知,系统(3)发生滞后分岔<sup>[21]</sup>;其跳跃点为  $A \rightarrow B$  和  $C \rightarrow D$ ,滞后环(hysteresis loop)为.可由式(8)经数值计算各跳跃点性质,如表 1 所示.因为  $D$  位于 Poincaré 映射的一个不变集中,可由式(9)计算  $D$  所在的不变集的 Lyapunov 指数时间序列,如图 3(a)所示;其时间取 100 个周期,因

为在 100 个周期内  $\lambda_1 > 0$ ,所以  $D$  所在的不变集为混沌吸引子.

表 1 不动点及其性质  
Table 1 The nature of Fixed points

Fixed Point	Floquet Multiplier	Norm of Floquet Multiplier	Nature
A	0.999244594836138 0	At the boundary of Unit Circle At the inside of Unit Circle	Crisis Point
B	0.2759+0.4661i 0.2759-0.4661i	At the inside of Unit Circle At the inside of Unit Circle	stability Focus Point
C	-1.1102e-16 0.999683045611761	At the boundary of Unit Circle At the inside of Unit Circle	Crisis Point

滞后环 ABCD 由一个稳定的红色周期 1 轨道,一个稳定的紫色周期 1 轨道的周期倍化序列以及一个不稳定周期 1 轨道构成,在滞后环内部 ( $0.2098 < \alpha < 0.262$ ),两个稳定的周期轨道和不稳定的周期轨道共存,因为紫色的周期轨道存在完整的周期倍化序列,所以依次出现红色周期 1 轨道与紫色周期 1 轨道共存、红色周期 1 轨道与紫色周期 2 轨道共存、红色周期 1 轨道与紫色周期 4 轨道共存、红色周期 1 轨道与紫色混沌吸引子共存的现象;在滞后环外部 ( $\alpha > 0.262$  和  $\alpha < 0.2098$ ),共存现象消失,这是因为在滞后环右边界,不稳定周期 1 轨道接触稳定的紫色周期 1 轨道形成临界点 A,并导致其跃迁至稳定焦点 B;而在滞后环的左边界,不稳定周期 1 轨道接触稳定的红色周期 1 轨道形成临界点 C,并导致其跃迁至混沌吸引子边界的 D 点;左右边界的跳跃都破坏了滞后环内部的共存现象.



(a) Lyapunov 指数 (b) 时间历程图 (c) 时间历程图  
图 3 Lyapunov 指数图和时间历程图

Fig.3 Lyapunov Exponents diagram and time series diagram

由  $A \rightarrow B$  的跳跃过程发生在  $\alpha = 0.262$  附近,如图 3(c)所示,这是小振幅周期 1 轨道向大振幅周期 1 轨道的跳跃;由  $C \rightarrow D$  的跳跃过程是通向混沌的一种路径,不同于周期倍化通向混沌这一路径;系统在  $\alpha = 0.2087$  附近发生跳跃,如图 3(b)所

示,这是周期运动向混沌运动的跳跃。

选取激励频率  $\omega$  作为控制参数,并取系统参数(2):  $\alpha = 0.19, c = 0.08, k_2 = 0.08, k_3 = 0.3, A = 0.2$ , 系统分岔图如图4所示.图中黑虚线表示不稳定的周期3轨道。

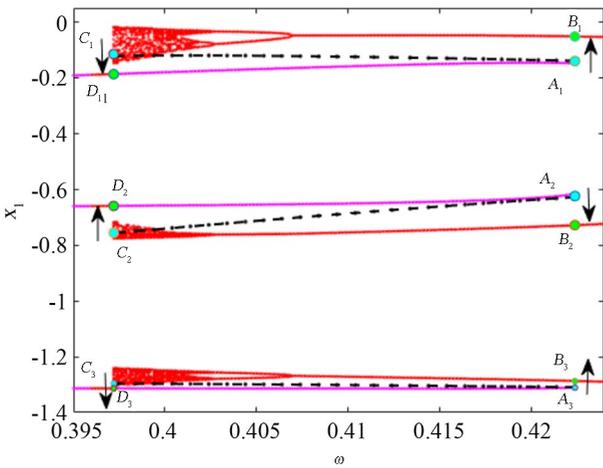


图4 分岔图  
Fig.4 Bifurcation diagram

由图4可知,系统(3)的周期3轨道发生了滞后分岔,存在三个滞后环  $A_i B_i C_i D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); 这三个滞后环的跳跃临界点为  $A_i \rightarrow B_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 和  $C_i \rightarrow D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );  $A_i$ 、 $B_i$  和  $D_i$  的性质可由式(7)的 Floquet 乘子确定,  $A_i$  都是临界点,  $B_i$  和  $D_i$  都是稳定的焦点;  $C_i$  所在的 Poincaré 映射不变集性质可由式(9)的 Lyapunov 指数时间所确定,  $C_i$  所在的 Poincaré 映射不变集都是混沌吸引子。

滞后环  $A_i B_i C_i D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 由一个稳定的紫色周期3轨道,一个稳定的红色周期3轨道的周期倍化序列以及一个不稳定周期3轨道构成,在滞后环内部 ( $0.3965 < \omega < 0.4225$ ),两个稳定的周期3轨道和一个不稳定的周期3轨道共存,因为红色的周期3轨道存在完整的周期倍化序列,所以依次出现紫色周期3轨道与红色周期3轨道共存、紫色周期3轨道与红色周期6轨道共存、紫色周期3轨道与红色周期12轨道共存、紫色周期3轨道与红色混沌吸引子共存的现象;在滞后环外部 ( $\omega > 0.4225$  和  $\omega < 0.965$ ),共存现象消失,这是因为在滞后环的右边界,不稳定的周期3轨道接触稳定的周期3轨道形成临界点  $A_i$ ,并导致其跃迁至稳定焦点  $B_i$ ;而在滞后环的左边界,不稳定的周期3轨

道接触位于混沌吸引子边界的  $C_i$ ,发生边界激变,导致其跃迁至稳定焦点  $D_i$ ;左边界的激变和右边界的跳跃都破坏了滞后环内部的共存现象。

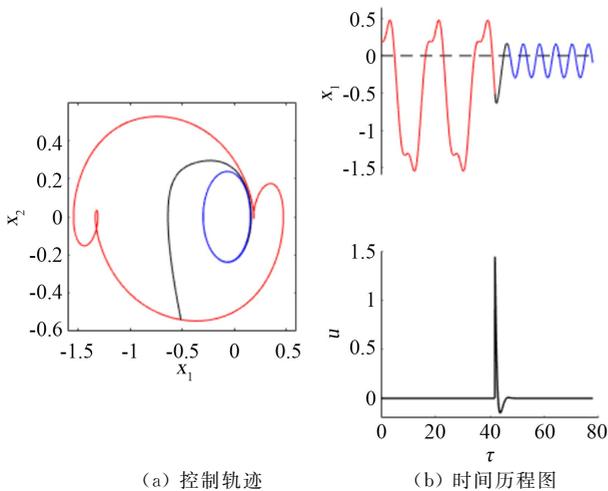
由  $A_i \rightarrow B_i$  的跳跃过程发生在  $\omega \approx 0.4225$  附近,这是紫色周期3轨道向红色周期3轨道的跳跃;  $C_i \rightarrow D_i$  的过程发生了边界激变<sup>[14]</sup>;在  $\omega \approx 0.39271$  附近,发生了边界激变,三个混沌吸引子边界同时接触不稳定的周期3轨道,并同时缩小至紫色周期轨道的不动点上[稳点焦点  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )].当  $\omega < 0.39271$ ,从不同初始点出发的轨道最后都稳定在紫色周期3吸引子上,共存现象被破坏。

## 4.2 多稳态控制

在车辆的行驶过程中,为了提高乘车的舒适性,需要将系统的周期运动控制到小振幅周期运动上.由式(11),控制参数选为  $\zeta = 2, \xi = 1$ ;取系统参数(3):  $\alpha = 0.19, c = 0.08, k_2 = 0.5, k_3 = 0.3, A = 0.2, \omega = 1.05$ ;通过数值模拟,得到系统随时间变化的控制过程,如图5所示,图5(a)表示系统轨迹的控制过程,图5(b)表示系统位移  $x_1$  和线性增益控制器  $u(\tau)$  的时间历程图.黑色曲线是线性增益控制器发生作用的过程,选取大振幅红色周期3轨道作为当前轨道,小振幅蓝色周期1轨道作为目标轨道;系统运动先是稳定在红色周期3上,在  $\tau = 41.8879$  时开始控制,线性增益控制器发出控制信号,  $u(\tau)$  突然正向增大,系统受到控制信号的调控;大振幅红色周期3轨道成功被控制到小振幅蓝色周期1轨道上,在  $\tau = 46.8878$  时控制结束,  $u(\tau)$  立刻减小并振荡的趋于零点,不再发出信号;从图5(b)可知,此控制过程有效地降低了振动的幅值。

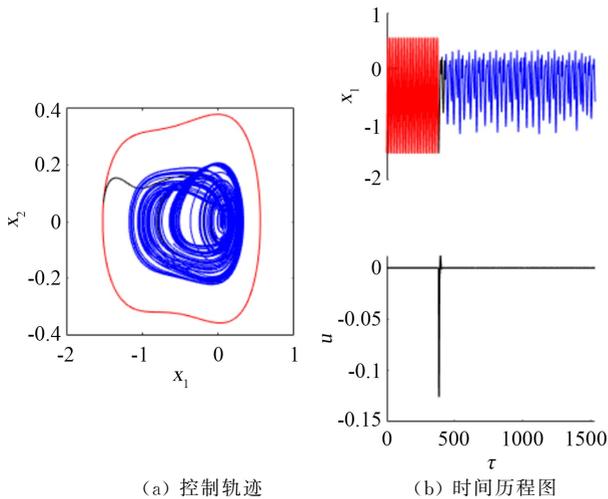
取系统参数(4):  $\alpha = 0.22, c = 0.08, k_2 = 0.5, k_3 = 0.3, A = 0.2, \omega = 0.41$ ;由式(11),通过数值模拟,得到系统随时间变化的控制过程,如图6所示,图6(a)表示系统轨迹的控制过程,图6(b)表示系统位移  $x_1$  和线性增益控制器  $u(\tau)$  的时间历程图.选取红色周期1轨道作为当前轨道,此时目标轨道选取为混沌轨道;需要加大控制强度<sup>[13]</sup>,所以控制参数取为  $\zeta = 0.1, \xi = 5.72$ ;在  $\tau = 383.121$  时开始控制,线性增益控制器发出控制信号,  $u(\tau)$  突然负向增大,系统受到控制信号的调控;周期1轨道成功被控制到混沌轨道,  $\tau = 433.122$  时结束控制,成功

将周期1运动控制到混沌运动上。



(a) 控制轨迹 (b) 时间历程图

图5 系统的控制过程  
Fig.5 Diagram of control



(a) 控制轨迹 (b) 时间历程图

图6 系统的控制过程  
Fig.6 Diagram of control

## 5 结论

本文揭示了一类单自由度1/4非线性车辆悬架系统新的滞后分岔并实现了滞后环内部的多稳态控制。滞后环由一条稳定的周期轨道、一条不稳定的周期轨道以及一条稳定周期轨道的周期倍化序列构成;在滞后环内部,两个稳定的周期轨道和一个不稳定的周期轨道共存,在滞后环外部,共存现象消失。在滞后环左右边界,滞后环内部的不稳定周期轨道接触不同的稳定周期轨道;当不稳定的周期轨道与稳定的周期轨道相遇时,产生跳跃现象;当不稳定的周期轨道与由稳定周期轨道经周期倍化分岔演化而成的混沌吸引子边界相遇时,产生边界激变,跳跃和边界激变都破坏了滞后环内部的

共存现象。

最后,通过线性增益控制法成功将系统的周期运动控制到小振幅周期运动和混沌运动上;研究结果对有效控制车辆悬架振动,提升车辆悬架系统舒适性具有一定的理论参考意义。

## 参考文献

- [1] IBRAHIM R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314(3-5): 371-452.
- [2] METWALLI S M. Optimum nonlinear suspension systems [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1986, 108(2): 197-202.
- [3] 孙蓓蓓, 周长峰, 张晓阳, 等. 工程车辆橡胶悬架系统的非线性动力学特性 [J]. *东南大学学报(自然科学版)*, 2007, 37(6): 974-979.  
SUN B B, ZHOU C F, ZHANG X Y. Nonlinear dynamic characteristics of rubber suspension of construction vehicle [J]. *Journal of Southeast University (Natural Science Edition)*, 2007, 37(6): 974-979. (in Chinese)
- [4] YOKOTA Y, ASAMI T, ISE T, et al. Analysis of non-linear characteristics and experimental verification of the air spring with the orifice [J]. *The Proceedings of the Dynamics and Design Conference*, 2010, 537: 1-6.
- [5] CHANG F, LU Z H. Air suspension performance analysis using nonlinear geometrical parameters model [J]. *SAE Technic Paper*, 2007, 1: 1-9.
- [6] 伊万建. 汽车空气弹簧悬架系统的非线性动力学行为研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2007.  
YI W J. Investigation on nonlinear dynamical behavior in automobile air spring suspension system [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2007. (in Chinese)
- [7] PALOMARES E, NIETO A J, MORALES A L, et al. Numerical and experimental analysis of a vibration isolator equipped with a negative stiffness system [J]. *Journal of Sound Vibration*, 2018, 414: 31-42.
- [8] 曹计欢, 牛江川, 王军. 负刚度和空气弹簧并联的悬架系统的亚谐波共振. *石家庄铁道大学学报(自然科学版)* [J], 2020, 33(3): 1-6.  
CAO J H, NIU J C, WANG J. Subharmonic reso-

- nance of suspension system with negative stiffness and air spring in parallel [J]. *Journal of Shijiazhuang Railway Institute (Natural Science)*, 2020, 33(3): 1–6. (in Chinese)
- [9] PISARCHIK A N, FEUDEL U. Control of multistability [J]. *Physics Reports*, 2014, 540(4): 167–218.
- [10] LIU Y, PÁEZ CHÁVEZ J. Controlling multistability in a vibro-impact capsule system [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 88(2): 1289–1304.
- [11] ARECCHI F T, BADIO R, POLITI A. Generalized multistability and noise-induced jumps in a nonlinear dynamical system [J]. *Physical Review A*, 1985, 32(1): 402–408.
- [12] JIANG Y. Trajectory selection in multistable systems using periodic drivings [J]. *Physics Letters A*, 1999, 264(1): 22–29.
- [13] LIU Y, PÁEZ CHÁVEZ J. Controlling coexisting attractors of an impacting system via linear augmentation [J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 2017, 348(Complete): 1–11.
- [14] 张航星, 路永婕, 李韶华, 等. 三轴重载车辆半主动控制研究 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(2): 98–104.
- ZHANG H X, LU Y J, LI S H, et al. Semi-active control of three-axle heavy-duty vehicle [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(2): 98–104. (in Chinese)
- [15] 赵义伟, 杨绍普, 刘永强, 等. 基于列车悬挂系统的半主动混合控制仿真分析 [J]. *动力学与控制学报*, 2020, 18(3): 38–43.
- ZHAO Y W, YANG S P, LIU Y Q, et al. Simulation analysis of semi-active hybrid control of train suspension system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(3): 38–43. (in Chinese)
- [16] GREBOGI C, OTT E. Crisis, sudden changes in chaotic attractors and transient chaos [J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1983, 7(1): 181–200.
- [17] NAYFEH A H, MOOK A D. *Nonlinear oscillations* [J]. Clarendon, 1981: 162–174.
- [18] 朱宇杰, 张智勇, 陈毅恒, 等. 球轴承变柔度 1/2 阶亚谐共振的滞后特性及其分岔机理 [J]. *振动与冲击*, 2022, 41(2): 1–10.
- ZHU Y J, ZHANG Z Y, CHEN Y H, et al. Hysteresis and the bifurcation mechanism of 1/2 order subharmonic resonances in varying compliance vibration of a ball bearing [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(2): 1–10. (in Chinese)
- [19] 于航. 时滞 Fitzhugh-Nagumo 神经网络滞后分岔现象分析及应用 [D]. 上海: 东华大学, 2020.
- YU H. Analysis and application of hysteresis bifurcation in time-delay Fitzhugh-nagumo neural networks [D]. Shanghai: Dong Hua University, 2020. (in Chinese)
- [20] Leonid P Shilnikov. 非线性动力学定性理论方法(第一卷) [M]. 金成桴, 译. 北京: 高等教育出版社, 2010: 145–150.
- Leonid P Shilnikov. *Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics (The first volume)* [M]. Jin C F, translation. Beijing: Higher Education Press, 2010: 145–150. (in Chinese)
- [21] 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2018: 6–7.
- XIE J H, YUE Y, LI D H. *Nonlinear dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 2018: 6–7. (in Chinese)