

# 基于等几何分析的柔性多体系统建模方法研究\*

常汉江<sup>†</sup> 蔡毅鹏 高庆 王乐 张程

(中国运载火箭技术研究院,北京 100076)

**摘要** 近三十年来,柔性多体系统动力学取得长足进步,尤其是以绝对节点坐标方法(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)为代表的非线性有限元已被用来处理复杂的柔性多体系统动力学问题,但绝对节点坐标方法采用斜率矢量作为广义坐标,导致系统自由度多,计算效率低.针对柔性多体系统,基于非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)曲线和曲面分别提出了 Euler-Bernoulli 细长梁单元和 Kirchhoff-Love 薄壳单元,在完全拉格朗日格式下,根据 Green 应变张量对单元变形进行描述,结合第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量给出单元应变能公式,推导了单元的弹性和弹性力雅可比矩阵表达式,最后通过静力学及动力学数值算例对提出的两类单元的性能进行对比和验证,为柔性多体系统建模提供了一种精确高效的新单元.

**关键词** 柔性多体系统, 等几何分析, Euler-Bernoulli 梁, Kirchhoff-Love 壳, NURBS 插值  
**中图分类号**:O327 **文献标志码**:A

## Research of Flexible Multibody System Modeling Based on Isogeometrical Analysis\*

Chang Hanjiang<sup>†</sup> Cai Yipeng Gao Qing Wang Le Zhang Cheng

(China Academy of Launch Vehicle Technology, Beijing 100076, China)

**Abstract** In the last three decades, the research in flexible multibody dynamics has made substantial progress, in particular, the nonlinear finite element represented by the Absolute Nodal Coordinate Formulation (ANCF) has been widely applied to deal with the system of flexible multibody dynamics. However, in this formulation the slope vectors are selected as the element node coordinate, the increased scale of the freedoms for the complex structures gives rise to the computational burden. Based on the above issues, the beam and shell elements described with Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) curves and surfaces have been proposed in the frame of Isogeometrical Analysis (IGA). Based on the total lagrangian formulation, the deformation of the elements is described with the Green strain, and the strain energy of the elements can be obtained. Besides, the elastic force and its Jacobian matrix of the elements are also deduced. Finally, four case studies including both static and dynamic problems are given to validate the proposed beam and shell elements. High efficient and accurate formulation has been proposed in the research of flexible multibody dynamics.

**Key words** Flexible multibody system, Isogeometrical Analysis, Euler-Bernoulli beam, Kirchhoff-Love shell, NURBS interpolation

## 引言

随着航天技术的发展,轻质、高精度、柔性零部件被广泛应用于众多工程领域,如空间站柔性操作机械臂、卫星环形桁架天线、航天器太阳帆板、空间机器人等.这些系统中存在刚性部件与柔性部件的大范围运动相互耦合,而且柔性部件的大范围运动和自身的大变形相互耦合<sup>[1]</sup>,属于刚柔耦合多体系统动力学问题.基于小变形假设的柔性多体系统动力学是多刚体系统动力学与线性有限元的组合方法,无法描述柔性部件的大变形问题.因此,非线性有限元逐渐成为描述和预测这类柔性多体系统动力学响应的主流方法<sup>[2]</sup>.

1997年,美国多体动力学专家 Shabana 教授为了实现柔性体大范围运动和大变形的统一描述,提出了绝对节点坐标方法(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)<sup>[3]</sup>.该方法基于连续介质力学的构型描述,在惯性坐标系中定义单元节点坐标,并采用节点斜率矢量代替传统有限元中的节点转角坐标,得到的柔性多体系统微分-代数方程具有常数质量矩阵、不存在科氏力和离心力项等特点,被认为是多体系统动力学研究历史上的重要进展之一,受到国内外众多学者的研究与关注.但该方法采用斜率矢量作为节点坐标,导致单元自由度多,并且存在严重的闭锁问题,影响了该方法的计算效率和精度.当涉及复杂几何构型时,采用绝对节点坐标方法单元进行网格划分分会使得单元节点处的斜率矢量难以确定,造成网格的生成非常困难和耗时.此外,绝对节点坐标方法单元多选用 Hermite 多项式作为形函数,使得离散之后的网格模型是初始几何模型的近似,这种近似会降低动力学仿真结果的精度.因此,将绝对节点坐标方法单元集成到现有的多体系统动力学分析软件时遇到不少困难.

在柔性多体系统动力学研究中,采用绝对节点坐标方法对柔性构件进行建模时,需要人工划分网格,这是一个非常耗时的过程.此外,离散后的网格模型通常是初始几何模型的近似,对于研究大应变和接触碰撞等问题,这种近似会造成较大误差.美国能源部 Sandia 国家实验室曾做过一项统计,在汽车、航空航天和造船行业等领域,采用传统有限元进行分析,大约 80% 的时间用于网格剖分以及剖分前的几何模型准备工作<sup>[4]</sup>,如图 1 所示.因此,

在多柔体系统建模时,一个关键问题就是如何将几何描述模型和力学仿真计算模型进行统一,简化网格生成和细化的过程,提高数值仿真计算效率和精度,实现模型设计和分析一体化.

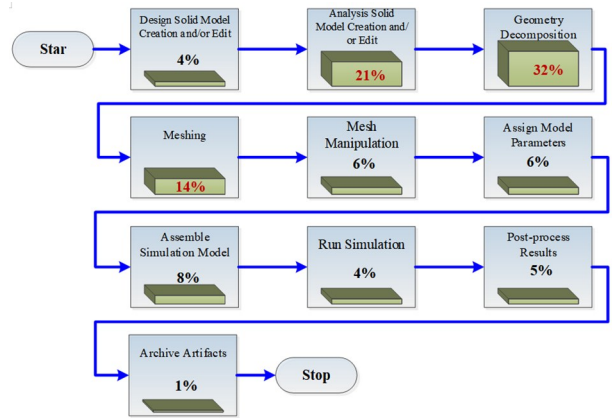


图 1 Sandia 国家实验室估计的建模和分析过程中每部分工作所占时间比例

Fig.1 The consumed time of the modeling and analysis investigated by Sandia National Laboratory

2005年, Hughes 等<sup>[5]</sup>为了解决这一问题,提出了等几何分析(Isogeometric Analysis, IGA)的概念,直接将构造 CAD 几何造型的样条函数[如 Bézier、B-spline、非均匀有理 B 样条(Non-Uniform Rational B-Splines, NURBS)和 T-spline 等]及其控制点坐标作为有限元分析的输入信息,从而省去了网格划分过程,形成了几何与分析的直接联系.因此可以说,等几何分析是有限元法的扩展,成熟的 CAD 建模技术和有限元计算为等几何分析方法提供了坚实基础.由于该方法在设计与仿真阶段对模型的几何描述形式是完全一致的,因而被称为“等几何分析”.在等几何分析中,几何模型和分析网格模型采用同一表达方式,避免了网格细化过程中与几何模型数据的频繁交互,同时避免了传统有限元中网格划分的复杂过程.此外,和绝对节点坐标方法相比,等几何分析的结果精度更高,其分析使用的多项式直接来源于几何模型数据,避免了传统有限元中采用分段多项式逼近的方式而引入的误差.采用等几何分析方法建立的多柔体系统动力学模型不仅能精确描述柔性构件的几何特征,而且能高效描述柔性构件的大转动、大变形耦合动力学,还具有单元自由度少和收敛性高的特性,成为一种颇具发展前景的建模和计算方法.

根据是否考虑梁截面的剪切变形,可将基于等

几何分析的梁单元分为两类:只考虑轴向伸长和横向弯曲变形的 Euler-Bernoulli 梁单元,以及考虑截面剪切和轴向转动效应的 Timoshenko 梁单元. Weeger 等<sup>[6]</sup>提出了基于等几何分析的细长梁单元,将其应用于对空间细长结构的非线性振动进行分析,并和传统拉格朗日插值得到的梁单元进行对比.分析结果表明,等几何梁单元表现出更好的收敛性,且不存在转角坐标,避免了转动插值的奇异性. Bouclier 等<sup>[7]</sup>提出了基于 NURBS 插值的等几何 Timoshenko 梁单元,并采用缩减积分和 B 投影技术解决了短粗梁结构分析中常见的剪切和薄膜闭锁问题.随后, Sang 等<sup>[8]</sup>通过研究发现,在等几何 Timoshenko 梁单元中,随着 NURBS 插值形函数次数的升高,剪切闭锁效应逐渐减弱,并通过对梁结构自由振动的数值分析验证了该结论.此外, Luu 等<sup>[9]</sup>通过对抛物线形和椭圆形空间曲梁结构进行动力学分析,并和同阶拉格朗日插值多项式构造的梁单元进行对比,计算结果表明等几何单元的精度更高.这是由于 NURBS 能够对此类结构的几何构型进行精确描述,而以拉格朗日插值多项式构造的梁单元是对该结构几何构型的近似.近年来 Borkovicab 等<sup>[10]</sup>提出了考虑三维空间梁厚度方向非线性应变的几何精确欧拉伯努利梁单元;陈明飞等<sup>[11]</sup>基于一阶剪切变形理论并采用等几何有限元方法对任意曲率的功能梯度曲梁进行自由振动分析;夏阳等<sup>[12]</sup>应用拟协调有限元,使用降阶基函数逼近梁内应变项,解决了复杂三维曲梁结构仿真中的闭锁问题.

在等几何分析概念提出后,基于等几何分析的计算力学研究自然延伸到板壳结构.基于 Kirchhoff-Love 理论的薄板壳有限元要求近似位移场具有 C1 连续性,这是传统有限元构造薄壳单元的难点,但该条件在基于光滑样条理论的等几何分析中通常可以自然满足. Kiendl 等<sup>[13]</sup>基于等几何分析提出了一种薄壳单元,通过构造光滑的基函数保证应变和应力的全局连续性.由于其研究仅考虑壳单元节点的 3 个中面位移自由度,单元的自由度数非常少.基于该薄壳单元, Chen 等<sup>[14]</sup>进一步提出了等几何薄膜单元,采用显示时间积分策略对空间薄膜结构的充气过程进行了数值仿真,并对充气过程中薄膜结构出现的动力松弛现象进行了讨论.为了描述面外剪切变形, Benson 等<sup>[15]</sup>提出了基于实体退

化的 Reissner-Mindlin 壳单元,通过减缩积分(reduced integration)技术提高了计算效率.他们基于该单元引入弹塑性本构模型,分析了结构中出现的塑性变形,并将提出的单元集成到 LS-DYNA 软件中.此外, Echter<sup>[16]</sup>基于高阶剪切板理论提出了多种等几何板壳单元,并对单元的收敛性进行了系统的对比.

在动力学与控制领域,等几何分析方法也逐渐受到众多学者的关注.王悦等<sup>[17]</sup>提出了一种基于 T 样条曲面的变网格柔性系统等几何分析方法,通过对受冲击柔性薄板的动力学分析表明所提出 T 样条单元及局部细化算法可以只在接触碰撞等应变剧烈变化的区域实现局部网格细化,从而控制系统自由度数,提高计算效率;刘涛等<sup>[18]</sup>针对表面黏贴有压电层的功能梯度板的动力学及主动振动控制问题,建立了一种基于三阶剪切变形理论的等几何分析求解方法;陈龙等<sup>[19]</sup>基于等几何分析方法研究了齿轮接触问题,研究结果表明该方法具有计算效率高、速度快、应力场更加光滑等优势;荣吉利等<sup>[20]</sup>为实现大变形结构动力学问题中的网格自适应算法,将多层贝塞尔提取方法用于 HB 样条建模分析以实现形函数的统一; Tobias 等<sup>[21]</sup>采用等几何分析模型研究了柔性多体系统的冲击响应,模拟了弹性球体对刚性表面的冲击和长弹性杆的冲击并进行了试验验证,表明等几何分析方法在研究柔性多体系统碰撞问题上具有高精度和高效率的特点.

在等几何分析中, B 样条和 NURBS 是两类常用的样条基函数,对于二维或三维问题, B 样条与 NURBS 通常采用张量积形式构造,局部加密将会导致全局网格的变化,无法实现局部细化.为实现网格局部细化及自适应网格,多种可局部加密的样条函数在计算机图形学领域被提出,例如, T 样条、 R 样条(Local Refined Splines),以及层次 B 样条(Hierarchical B-splines,简称 HB 样条)<sup>[22]</sup>.此外,三角 B 样条<sup>[22]</sup>采用三角形拓扑结构,天然具有实现网格局部细化的优势.虽然 B 样条和 NURBS 在网格局部细化上存在不足,但在 CAD 领域,根据国际标准化组织(ISO)颁布的工业产品数据交换标准 STEP, NURBS 是定义工业产品几何形状的唯一数学方法.因此 NURBS 在实现计算机辅助设计与计算机辅助工程的统一方面具有重要的地位.

本工作将等几何分析方法的研究范围扩展至



含大转动、大变形的柔性多体系统动力学研究中,基于 NURBS 曲线和曲面分别提出了 Euler-Bernoulli 梁单元和 Kirchhoff-Love 壳单元,通过数值算例对单元的性能进行验证,表明提出的等几何单元不仅能精确描述柔性构件的几何特征,而且能精确描述柔性构件的大转动、大变形耦合动力学特性,还具有单元自由度少和收敛性高的特性,为柔性多体系统建模提供了一种高效、精确的新单元。

## 1 NURBS 基本理论

NURBS 是在 1975 年由 Versprille<sup>[23]</sup> 在其博士学位论文中提出。1991 年,国际标准化组织 (ISO) 颁布的工业产品数据交换标准 STEP 中,把 NURBS 作为定义工业产品几何形状的唯一数学方法。由于 NURBS 是 B 样条的有理形式,所以首先介绍 B 样条的构造。

### 1.1 节点矢量

B 样条是在 1972 年由 Riesenfeld<sup>[24]</sup> 提出的一种样条曲线特殊表示形式,在等几何分析中一般称为 B 样条基函数。B 样条基函数是定义在一个节点矢量 (knot vector) 上的分段多项式,节点矢量的定义为

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

其中  $\xi_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+p+1$ ) 称为节点 (knot),  $p$  为 B 样条基函数的次数 (order),  $n$  为 B 样条基函数的个数。节点矢量表示的是一组非递减的非负实数,即  $0 \leq \xi_i \leq \xi_{i+1}$ , 节点矢量  $\Xi$  构成了定义 B 样条基函数的参数空间<sup>[25]</sup>。

节点矢量中节点的分布决定了 B 样条基函数的连续性。在节点矢量中相邻的两个或两个以上的节点值相等,称这些节点为重复节点,节点的重复  $i$  称为节点重复度 (multiplicities), 节点重复度决定了 B 样条基函数的连续性。没有重复节点时, B 样条基函数在该节点具有  $C^{p-1}$  连续; 如果存在重复节点, 基函数在该节点具有  $C^{p-k}$  连续,  $k$  为节点重复度。

在计算机图形学中,通常采用开放型 (open) 节点矢量定义 B 样条基函数,开放型节点矢量表示在节点矢量  $\Xi$  的两端节点  $\xi_1$  和  $\xi_{n+p+1}$  处,节点重复度为  $p+1$ 。对于开放型节点矢量定义的 B 样条基函数,在参数区间端点处具有插值性,但在内部节点通常不具有插值性。下文不作特殊说明的情况下

B 样条和 NURBS 所采用的节点矢量均为开放型节点矢量。

### 1.2 B 样条曲线和曲面

对于给定的节点矢量  $\Xi$ , B 样条基函数由 Coxde Boor 递归方法<sup>[26-27]</sup> 定义,首先对于  $p=0$ , 即 0 阶 B 样条可定义为

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

其次,对于  $p=1, 2, \dots, n$ , B 样条基函数定义为

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

由式 (3) 可知,一个  $p$  阶 B 样条基函数是两个  $p-1$  阶 B 样条基函数的线性组合,这为 B 样条基函数的计算提供了方法。

图 2 给出了定义在节点矢量  $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1\}$  上的 7 个二次 B 样条基函数。从图中可以看出,该二阶 B 样条基函数在节点 0.75 处的节点重复度为 2, 因此在该节点处是  $C^0$  连续; 而在节点 0.25 和 0.5 处的重复度为 1, 因而是  $C^1$  连续。

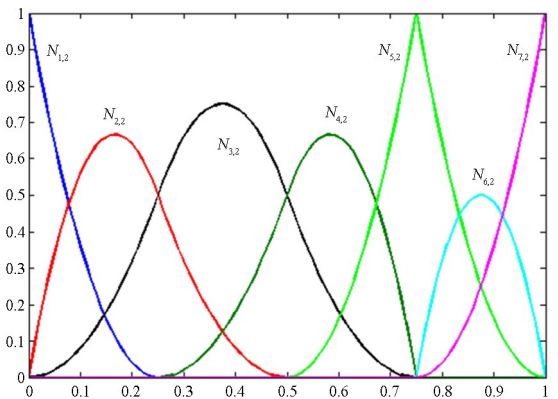


图 2 二次 B 样条基函数  
Fig.2 Basis functions of degree two

根据 B 样条基函数的定义,对于给定的节点矢量  $\Xi$ ,  $p$  阶 B 样条基函数具有以下性质:

(1) 非负性 (non-negativity). 即  $\forall \xi$ , 有  $N_{i,p}(\xi) \geq 0$ . 由传统 Lagrange 和 Hermite 多项式构造的基函数则无法保证非负性,导致非协调元在界面处的几何不连续。此外, B 样条基函数的非负性使得等几何单元的质量阵也是非负的。

(2)单位分解性(partition of unity).即  $\forall \xi$ , 均

有  $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \geq 0$ , 这是构造有限元基函数必须具备的性质.

(3)紧支性(compact support).如果  $\xi \notin [\xi_i, \xi_{i+p+1})$ , 则  $N_{i,p}(\xi) = 0$ , 即 B 样条基函数  $N_{i,p}(\xi)$  仅在  $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$  上非零.

(4)可微性(differentiability).B 样条基函数  $N_{i,p}(\xi)$  在节点  $\xi_i$  处是  $p-m_i$  次可微的, 其中  $m_i$  为节点  $\xi_i$  的重复度.B 样条基函数的可微性保证了构造的样条曲线是全局光滑的, 并且保证基于 B 样条的等几何分析单元在内部节点处应力和应变也是连续的.

由式(3)可知, 给定 B 样条基函数的次数  $p$  和合适的节点矢量  $\Xi$ , 就可以构造  $n$  个 B 样条基函数.同样, 在空间中给定  $n$  个控制点, 则  $p$  阶分段多项式 B 样条曲线可通过 B 样条基函数和相应控制点的线性组合表示

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \mathbf{B}_i \quad (4)$$

其中  $\mathbf{r}$  为 B 样条曲线上任意一点的位置矢量,  $N_{i,p}$  是定义在节点矢量  $\Xi$  上的  $p$  次 B 样条基函数,  $\mathbf{B}_i$  是空间中定义 B 样条曲线的控制点, 由控制点  $\mathbf{B}_i$  在空间中按下标顺序连接构成的多边形称为 B 样条曲线的控制多边形.图 3 给出了平面空间内的一个二次 B 样条曲线及其控制点和控制多边形示意图, 对应的基函数如图 2 所示.

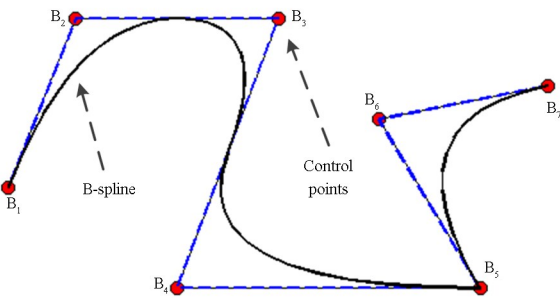


图 3 B 样条曲线及控制点和控制多边形  
Fig.3 The B-spline curve with the control points and the control polygon

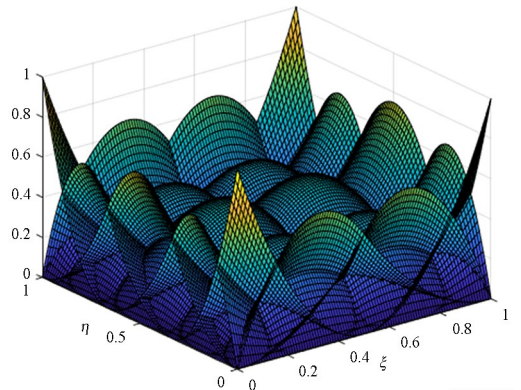
B 样条曲面是张量积曲面, 通常由两个节点矢量  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$  和  $\Gamma = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$  以及  $n \times m$  个控制点  $\mathbf{B}_{i,j}$  构成.  $N_{i,p}(\xi)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+p+1$  和  $M_{j,q}(\eta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m+q+1$  分别为定义在节点矢量  $\Xi$  和  $\Gamma$  上的一维 B 样条基函

数.则 B 样条曲面可表示为

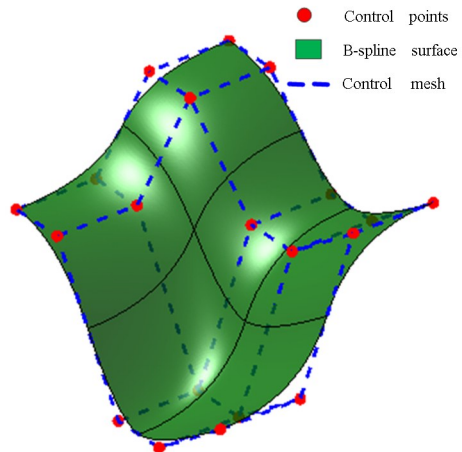
$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{r}(\xi, \eta)$  为 B 样条曲面上任意一点, 其中  $p$  和  $q$  分别为  $\xi$  和  $\eta$  方向上 B 样条基函数的次数, 由控制点  $\mathbf{B}_{i,j}$  在空间中构成的多边形网格称为控制网格, 定义 B 样条曲面的参数域为  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}] \times [\eta_1, \eta_{m+q+1}]$ .

图 4 给出了一个双二次( $p=2, q=2$ )B 样条曲面, 其中图 4(a)为该 B 样条曲面的基函数示意图, 图 4(b)给出了该 B 样条曲面及其控制点和控制网格, 其中两个参数方向的节点矢量分别为  $\Xi = \{0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$  和  $\Gamma = \{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$ .



(a) 二次 B 样条基函数  
(a) Basis functions of degree two



(b) B 样条曲面及控制点和控制网格  
(b) The B-spline surface of the control points and the control polygon

图 4 B 样条曲面  
Fig.4 The B-spline surface

B 样条曲面的基函数由单变量 B 样条基函数的张量积形式构成, 则 B 样条曲面的基函数同样具有非负性、单位分解性和紧支性等性质.此外, B 样条曲线和曲面还具有仿射变换(affine transforma-

tion)几何不变性,仿射变换是指平移、旋转和投影等线性变换.仿射变换几何不变性保证了B样条单元在刚性位移下的零应力特征.

### 1.3 B样条基函数的导数

在等几何分析中需要通过基函数的导数推导弹性力及其雅可比矩阵,因此本节简单介绍B样条基函数的求导方法.由式(3)可知,一个 $p$ 阶B样条基函数是两个 $p-1$ 阶B样条基函数的线性组合,则B样条基函数的导数可由低阶基函数组合递推得到.已知B样条的阶次 $p$ 和节点矢量 $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ ,则 $p$ 阶B样条基函数的一阶导数为

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (6)$$

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left[ \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right] - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left[ \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right] \quad (7)$$

由式(7)依次递推得

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{i,j} N_{i+j,p-k}(\xi) \quad (8)$$

其中系数 $\alpha_{i,j}$ 满足以下关系

$$\begin{cases} \alpha_{0,0} = 1 \\ \alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i} \\ \alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}}, j = 1, \dots, k-1 \\ \alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}} \end{cases} \quad (9)$$

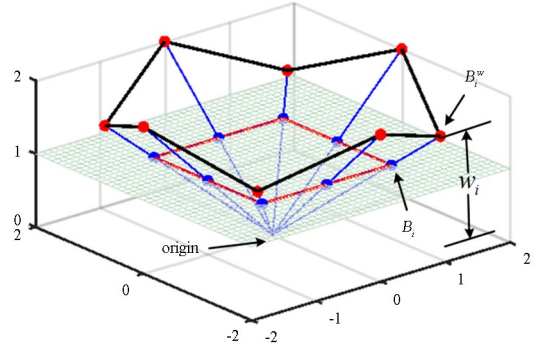
式(7)给出了对B样条基函数求导的通用公式.需要注意的是:求导次数 $k$ 不应超过 $p$ ,对于B样条基函数,所有高于 $p$ 阶的导数均为零;在求导过程中,某些项的分母中节点之差可能为零,规定这种情况商为零,即 $0/0=0$ .

### 1.4 NURBS曲线和曲面

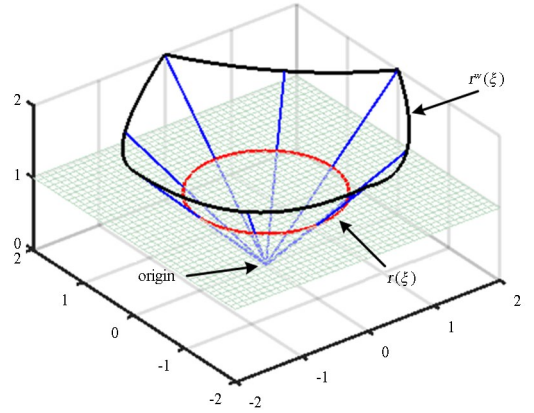
B样条虽然有强大的曲线曲面表示能力,但是对于许多在工程设计中常见的几何形状,如圆锥曲线、旋转面和圆锥曲面等解析曲面却无法精确表示.为解决这一问题,工程界通常采用NURBS曲

线和曲面,下面对NURBS进行简单介绍.

NURBS是B样条的有理形式,则 $R^d$ 空间的NURBS可以由 $R^{d+1}$ 空间的B样条进行投影变换(projective transformation)得到.例如, $R^2$ 空间内的圆弧曲线是 $R^3$ 空间的二次B样条曲线在平面内投影所得,如图5所示.



(a) 三维空间B样条控制顶点投影得到二维平面NURBS控制顶点  
(a) Projective transformation of "projective control points" yields B-spline curve



(b) 三维空间B样条曲线投影得到二维NURBS平面圆  
(b) Projective transformation of B-spline curve yield NURBS curve  
图5 二维空间NURBS描述的圆

Fig.5 Circle constructed by NURBS in  $R^2$

通过B样条的投影变换可以得到有理多项式 $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$ ,其中 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 是分段多项式,下面首先介绍在 $R^d$ 空间NURBS曲线的构造策略.设 $\{B_i^w\}$ 为 $R^{d+1}$ 空间的B样条曲线的控制点集合,节点矢量为 $\Xi$ ,则 $R^d$ 内的NURBS控制点可由 $R^{d+1}$ 空间中的B样条控制点进行投影得到,即

$$(B_i)_j = B_i^w / \omega_i, j = 1, \dots, d \quad (10)$$

$$\omega_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (11)$$

其中 $(B_i)_j$ 为控制点 $B_i$ 的第 $j$ 个分量, $\omega_i$ 为控制点 $B_i$ 对应的权重因子.在图5中,权重即为中B样条曲线控制顶点的纵坐标.由此可得NURBS基函



数和 NURBS 曲线的定义为

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)\omega_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi)\omega_j} \quad (12)$$

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i \quad (13)$$

其中,  $R_i^p(\xi)$  为 NURBS 基函数. 和 B 样条曲面类似, NURBS 曲面同样由张量积的 NURBS 基函数构造, 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\xi, \eta) &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta) \omega_{k,l}} \mathbf{B}_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\mathbf{r}$  为 NURBS 曲面上的任意一点, 为 NURBS 曲面的基函数. 图 6 给出了由张量积 NURBS 构造的三维曲面, 如球壳、圆环壳和旋转曲面等. 对于这些圆锥曲面和旋转曲面, 可由双二次 NURBS 曲面精确构造. NURBS 是 B 样条基函数的有理形式, NURBS 除了具有 B 样条的特性以外, 还具有以下特殊性质:

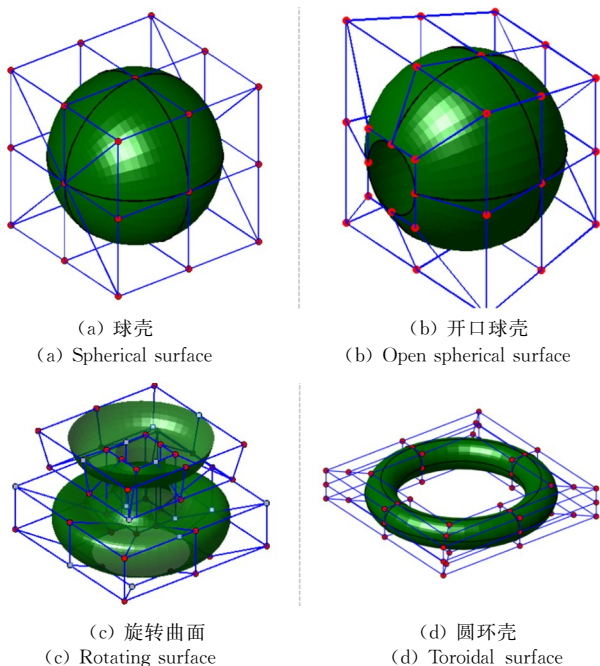


图 6 NURBS 曲面  
Fig.6 NURBS surfaces

(1) 当所有权重因子相等时, NURBS 将退化为 B 样条, 也就是说 B 样条是 NURBS 的一种特例.

(2) NURBS 基函数是有理多项式, 与传统 Lagrange 和 Hermite 多项式一样, NURBS 基函数的

计算也是稳定的.

(3) NURBS 可以精确表示标准的解析(如圆锥曲线曲面、旋转面)和自由曲线、曲面, 为产品几何模型的定义提供了标准.

(4) 为了修改曲线曲面的几何形状, 既可通过调整控制点的位置, 又可通过改变权重因子的值来实现, 具有很大灵活性.

NURBS 和 B 样条可通过  $h$  细分(节点插入),  $p$  细分(基函数升阶)和  $k$  细分(基函数升阶+节点插入)实现控制点个数的增加和基函数次数的升高, 并且这些细分方式都不会改变样条的几何性质. 这些细分方法为基于 NURBS 和 B 样条的等几何分析提供了丰富的网格细化方法.

## 2 基于 NURBS 的等几何单元

在结构力学中, 广泛应用的梁理论有两种: Euler-Bernoulli 梁理论和 Timoshenko 梁理论, Euler-Bernoulli 梁理论也称为工程梁理论. 其中 Euler-Bernoulli 梁理论的运动学假设是: 梁单元在变形过程中, 梁的中线法平面一直保持平面, 并与梁的中线垂直. 这个假定认为弯曲变形是梁的主要变形, 剪切变形是次要的变形, 因而可以忽略不计, 这对于截面尺度远小于轴向尺寸的实腹梁来说, 不会引起显著的误差, 因而在工程界得到广泛应用.

### 2.1 Euler-Bernoulli 梁单元

如图 7 所示, 采用 NURBS 曲线对细长梁的中线进行建模, 由 NURBS 曲线的定义可知, 梁单元的中线上任意一点  $P$  的全局位置矢量可表示为

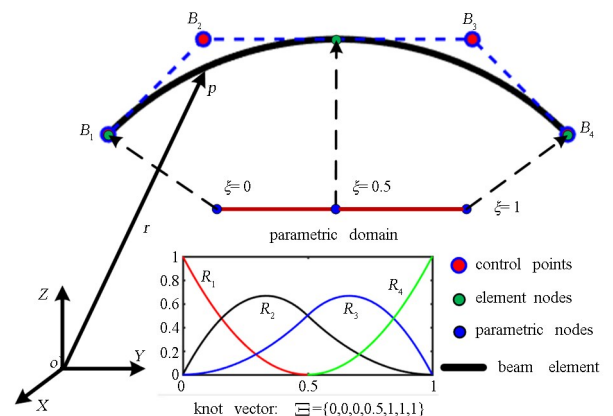


图 7 基于 NURBS 的 Euler-Bernoulli 梁单元  
Fig.7 Euler-Bernoulli beam based on NURBS

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi) \mathbf{B}_i = \mathbf{S} \mathbf{e} \quad (15)$$

其中  $\mathbf{S}$  为参数域中任意一点  $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$  的非零基函数, 构成该等几何梁单元的形函数. 根据 NURBS 基函数的紧支性, 对于  $p$  阶 NURBS 基函数, 点处有且仅有  $p+1$  个非零基函数, 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= [S_1 \mathbf{I}_3, S_2 \mathbf{I}_3, \dots, S_{p+1} \mathbf{I}_3] \\ &= [R_i^p(\xi) \mathbf{I}_3, R_{i+1}^p(\xi) \mathbf{I}_3, \dots, R_{i+p+1}^p(\xi) \mathbf{I}_3] \end{aligned} \quad (16)$$

其中  $\mathbf{I}_3$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵,  $\mathbf{e}$  为  $p+1$  个非零基函数所对应的控制点构成的单元节点坐标, 可表示为

$$\mathbf{e} = [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_{i+1}, \dots, \mathbf{B}_{i+p+1}]^T \quad (17)$$

在完全拉格朗日格式 (Total Lagrangian Formulation) 框架下, 不考虑梁单元的截面剪切变形, 则梁单元上任意一点的 Green 应变可解耦为拉伸应变  $\epsilon^l$  与弯曲应变  $\epsilon^\kappa$  两部分

$$\epsilon = \epsilon^l + \epsilon^\kappa \quad (18)$$

其中拉伸应变  $\epsilon^l$  可表示为

$$\epsilon^l = \frac{1}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \left| \frac{d\mathbf{r}_0}{d\xi} \right|^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} \left| \frac{d\mathbf{r}_0}{d\xi} \right|^{-1} - 1 \right) \quad (19)$$

弯曲应变可表示为

$$\epsilon^\kappa = \frac{\bar{\kappa}_0(\xi) - \bar{\kappa}(\xi)}{\left| (\mathbf{r}_0)_\xi \right|^2} \quad (20)$$

弯曲应变中的表示为材料曲率 (material measure of curvature)  $\bar{\kappa}(\xi) = |\mathbf{r}_\xi \times \mathbf{r}_{\xi\xi}| / |\mathbf{r}_\xi|$ ,  $\bar{\kappa}_0(\xi) = |(\mathbf{r}_0)_\xi \times (\mathbf{r}_0)_{\xi\xi}| / |(\mathbf{r}_0)_\xi|$ .

在得到梁单元上任一点的应变后, 在梁单元的初始构形上进行积分, 则单元应变能可表示为

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{V^e} E (\epsilon^l)^2 dV^e + \frac{1}{2} \int_{V^e} E (\epsilon^\kappa)^2 dV^e \\ &= U^l + U^\kappa \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $E$  为材料的杨氏模量,  $V^e$  为初始构型中曲梁单元的体积. 从式(21)可知, 单元应变能也可分为拉伸应变能与弯曲应变能两部分, 其中拉伸应变能可表示为

$$\begin{aligned} U^l &= \frac{1}{2} \int_{V^e} E (\epsilon^l)^2 dV^e \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 EA (\epsilon^l)^2 |(\mathbf{r}_0)_\xi| d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

弯曲应变能可进一步展开为

$$\begin{aligned} U^\kappa &= \frac{1}{2} \int_{V^e} E \epsilon^\kappa \epsilon^\kappa dV^e \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 EI \frac{1}{\left| (\mathbf{r}_0)_\xi \right|^3} [\bar{\kappa}(\xi) - \bar{\kappa}_0(\xi)]^2 d\xi \end{aligned} \quad (23)$$

单元弹性力可表示为应变能对广义坐标的一次偏导数

$$\mathbf{F}^e = \frac{\partial U^l}{\partial \mathbf{e}} + \frac{\partial U^\kappa}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{F}^l + \mathbf{F}^\kappa \quad (24)$$

其中拉伸弹性力与弯曲弹性力分别为

$$\mathbf{F}^l = \frac{\partial U^l}{\partial \mathbf{e}} = \int_0^1 EA \epsilon^l \frac{\partial \epsilon^l}{\partial \mathbf{e}} |(\mathbf{r}_0)_\xi| d\xi \quad (25)$$

$$\mathbf{F}^\kappa = \frac{\partial U^\kappa}{\partial \mathbf{e}} = \int_0^1 EI \frac{\bar{\kappa} - \bar{\kappa}_0}{\left| (\mathbf{r}_0)_\xi \right|^3} \frac{\partial \bar{\kappa}}{\partial \mathbf{e}} d\xi \quad (26)$$

单元弹性力雅可比矩阵可表示为应变能对广义坐标的二次偏导数, 具体推导过程参考文献 [28]. 根据虚功原理, 梁单元的质量矩阵可表示为

$$\mathbf{M}_e = \int_{V^e} \rho_0 \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV^e = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \rho_0 \mathbf{S}^T \mathbf{S} |(\mathbf{r}_0)_\xi| d\xi \quad (27)$$

上式表明, NURBS 描述的梁单元质量矩阵也为常数矩阵. 此外, 若忽略梁单元中的弯曲应变能, 只考虑拉伸应变能, 则该梁单元退化成索单元.

## 2.2 Kirchhoff-Love 壳单元

在许多工程构件的模拟中, 壳单元都是极为重要的. 其中薄壳出现在许多产品中, 诸如汽车上的金属薄板, 飞机的机舱、机翼和方向舵, 以及某些产品的外壳, 如火箭、手机、洗衣机和计算机等. 用实体单元模拟这些构件通常需要大量单元, 同时存在闭锁问题, 从而导致非常昂贵的计算费用. 因此采用壳单元模拟薄壁结构, 能够极大地改善运算效率. 本节根据 Kirchhoff-Love 假设, 采用 NURBS 曲面对薄壳的中面进行描述, 提出了适合对薄壳结构进行建模的等几何分析壳单元.

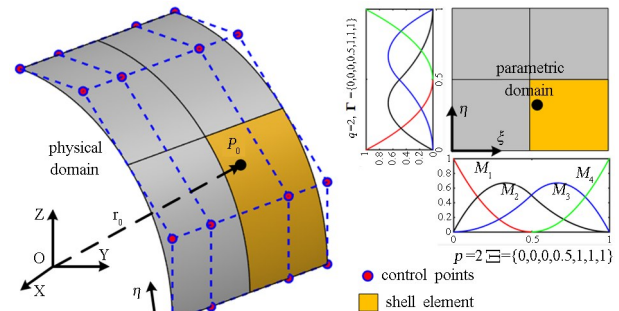


图8 NURBS 薄壳单元

Fig.8 Shell elements based on NURBS

如图8所示, 在壳单元的初始构型中, 基于 Kirchhoff-Love 假设, 壳体上任一点  $P_i^s(\xi, \eta, \zeta)$



的位置矢量可通过壳的中面上对应点  $P_0(\xi, \eta)$  的位置矢量  $\mathbf{r}_0$  以及该点的法线方向  $\mathbf{n}_0$  确定

$$\mathbf{r}_0^z(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{r}_0(\xi, \eta) + \zeta \mathbf{r}_0(\xi, \eta) \quad (28)$$

其中‘0’表示初始构型,  $\xi$  和  $\eta$  为薄壳的中面对流曲线坐标 (convective curvilinear coordinates),  $\xi$  ( $-h/2 \leq \xi \leq h/2$ ) 是点与点之间的距离,  $h$  是壳的厚度.  $\mathbf{r}_0$  是由 NURBS 曲面描述的壳中面上点  $P_0(\xi, \eta)$  的位置矢量, 即

$$\mathbf{r}_0(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{ij}^{pq}(\xi, \eta) \mathbf{B}_{i,j} \quad (29)$$

其中  $R_{ij}^{pq}(\xi, \eta)$  和  $\mathbf{B}_{i,j}$  分别为 NURBS 曲面基函数和控制点.

为了精确描述薄壳单元的变形, 在薄壳单元初始构型中的任意一点  $P_0^z(\xi, \eta, \zeta)$  处, 建立两个局部坐标系  $(\mathbf{g}_0^z)_1 - (\mathbf{g}_0^z)_2 - (\mathbf{g}_0^z)_3$  和  $(\mathbf{e}_0^z)_1 - (\mathbf{e}_0^z)_2 - (\mathbf{e}_0^z)_3$ . 类似地, 在当前构型中的点  $P^z(\xi, \eta, \zeta)$  处也可建立两个局部坐标系  $(\mathbf{g}^z)_1 - (\mathbf{g}^z)_2 - (\mathbf{g}^z)_3$  和  $(\mathbf{e}^z)_1 - (\mathbf{e}^z)_2 - (\mathbf{e}^z)_3$ . 这些坐标系的详细定义读者可参考文献[29].

基于连续介质力学理论[30], 连续体壳单元中任意一点的变形梯度矩阵  $\mathbf{F}$  表示为

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{X}_0} \quad (30)$$

其中  $d\mathbf{X}_0$  和  $d\mathbf{x}_0$  分别是在参考构型和当前构型中, 点  $P_0^z(\xi, \eta, \zeta)$  在切平面上的微元. 变形梯度矩阵  $\mathbf{F}$  能够通过一个正交矩阵  $\mathbf{R}$  和一个非奇异对称矩阵  $\mathbf{U}$  进行分解[21], 即

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (31)$$

其中  $\mathbf{R}$  表示微元的纯刚体转动,  $\mathbf{R}$  矩阵能够通过右伸长张量  $\mathbf{U}$  从变形梯度矩阵  $\mathbf{F}$  中进行提取. 矩阵  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{U}$  可进一步表示为

$$\begin{cases} \mathbf{R} = [(\mathbf{e}_0^z)_1 & (\mathbf{e}_0^z)_2 & (\mathbf{e}_0^z)_3]^T [(\mathbf{e}^z)_1 & (\mathbf{e}^z)_2 & (\mathbf{e}^z)_3] \\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}_0 & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (32)$$

其中,  $\mathbf{R}$  为局部笛卡儿坐标  $(\mathbf{e}^z)_1 - (\mathbf{e}^z)_2 - (\mathbf{e}^z)_3$  到坐标系  $(\mathbf{e}_0^z)_1 - (\mathbf{e}_0^z)_2 - (\mathbf{e}_0^z)_3$  的转换.  $\mathbf{T}_0$  表示初始构型中局部笛卡儿坐标  $(\mathbf{e}_0^z)_1 - (\mathbf{e}_0^z)_2 - (\mathbf{e}_0^z)_3$  到坐标系  $(\mathbf{g}_0^z)_1 - (\mathbf{g}_0^z)_2 - (\mathbf{g}_0^z)_3$  的转换. 由此可知矩阵  $\mathbf{T}_0$  可进一步表示为

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} (\mathbf{g}_0^z)_1 \cdot (\mathbf{e}_0^z)_1 & (\mathbf{g}_0^z)_1 \cdot (\mathbf{e}_0^z)_2 \\ (\mathbf{g}_0^z)_2 \cdot (\mathbf{e}_0^z)_1 & (\mathbf{g}_0^z)_2 \cdot (\mathbf{e}_0^z)_2 \end{bmatrix}^{-T} \quad (33)$$

类似地, 在当前构型中, 矩阵  $\mathbf{T}$  也可进一步表示为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^z \cdot \mathbf{e}_1^z & \mathbf{g}_1^z \cdot \mathbf{e}_2^z \\ \mathbf{g}_2^z \cdot \mathbf{e}_1^z & \mathbf{g}_2^z \cdot \mathbf{e}_2^z \end{bmatrix}^{-T} \quad (34)$$

由向量  $(\mathbf{e}_0^z)_1$  和  $(\mathbf{e}_0^z)_2$  之间的正交性可知, 薄壳单元的应变张量可表示为

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0^T \begin{bmatrix} g_{11}^z - (g_0)_{11}^z & g_{12}^z - (g_0)_{12}^z \\ g_{21}^z - (g_0)_{21}^z & g_{22}^z - (g_0)_{22}^z \end{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $(g_0^z)_{a\beta} = (\mathbf{g}_0^z)_a \cdot (\mathbf{g}_0^z)_\beta$  是壳单元中面的第一基本量[32]. 因此, Green 应变张量  $\boldsymbol{\varepsilon}$  能够进一步分解为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}} + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}_0^T \left( \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (g_0)_{11} & (g_0)_{12} \\ (g_0)_{21} & (g_0)_{22} \end{bmatrix} \right) \mathbf{T}_0 \end{cases} \quad (36)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}}$  是壳单元的薄膜应变,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}}$  是弯曲应变. 弯曲应变可表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}} = -\mathbf{T}_0^T (\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0) \mathbf{T}_0 \quad (37)$$

其中  $\boldsymbol{\kappa}_0$  和  $\boldsymbol{\kappa}$  分别为壳单元的初始曲率和变形之后的曲率, 可分别表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\kappa}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial \xi_1^2} \cdot \mathbf{n}_0 & \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \cdot \mathbf{n}_0 \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \cdot \mathbf{n}_0 & \frac{\partial^2 \mathbf{r}_0}{\partial \xi_2^2} \cdot \mathbf{n}_0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1^2} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \xi_2^2} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (38)$$

基于 St. Venant-Kirchhoff 假设, 采用 Voigt 符号, 第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量  $\boldsymbol{\sigma}_s$  可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (39)$$

其中  $E$  是材料的杨氏模量,  $\nu$  是泊松比.  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  和  $\varepsilon_{22}$  是 Green 应变张量的三个分量.

将式(36)代入式(39), 并且在厚度方向  $\zeta$  (—

$h/2 \leq \zeta \leq h/2$ ) 进行积分, 则第二类 Piola-Kirchhoff 应力可解耦成薄膜应力  $\boldsymbol{\sigma}_n$  和弯曲应力  $\boldsymbol{\sigma}_m$  两部分, 分别表示为

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{mem}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{mem}} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{\text{mem}} \end{bmatrix} \quad (40)$$

和

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{bend}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{bend}} \\ 2\boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{\text{bend}} \end{bmatrix} \quad (41)$$

式(40)和式(41)中的  $\boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{mem}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{\text{mem}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{mem}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{11}^{\text{bend}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{12}^{\text{bend}}, \boldsymbol{\varepsilon}_{22}^{\text{bend}}$  分别为薄膜应力  $\boldsymbol{\sigma}_n$  和弯曲应力  $\boldsymbol{\sigma}_m$  的分量。

针对线弹性材料, 由广义胡克定律可知, 单元应变能可表示为

$$U = \int_V (\boldsymbol{\sigma}_s : \boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_A (\boldsymbol{\sigma}_n : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}} + \boldsymbol{\sigma}_m : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}}) dA \quad (42)$$

单元弹性力可表示为应变能对广义坐标的一次偏导数

$$\mathbf{F}^e = \int_A \left( \boldsymbol{\sigma}_n : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\sigma}_m : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}}}{\partial \mathbf{q}} \right) dA \quad (43)$$

对式(43)进一步求导可得单元弹性力的雅各比矩阵

$$\mathbf{J}^e = \int_A \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \mathbf{q}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_m}{\partial \mathbf{q}} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}}}{\partial \mathbf{q}} + \boldsymbol{\sigma}_n : \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{mem}}}{\partial \mathbf{q}^2} + \boldsymbol{\sigma}_m : \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{bend}}}{\partial \mathbf{q}^2} \right) dA \quad (44)$$

### 3 刚柔耦合系统动力学方程建立与求解

按照有限元方法中单元的组装过程, 将柔性多体系统中各单元的质量矩阵、弹性力以及外力向量等进行组装, 同时考虑系统约束条件, 通过第一类拉格朗日方程可以建立描述刚柔耦合系统动力学特性的指标-3(Index-3)微分-代数方程组(DAEs)

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

其中  $\mathbf{M}$  为系统的常数质量矩阵,  $\mathbf{q}$  为系统广义坐标,  $\mathbf{F}(\mathbf{q}), \mathbf{q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  分别为系统弹性力以及外广义外力向量,  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t), \boldsymbol{\Phi}_q$  分别为系统约束方程及其对广义坐标  $\mathbf{q}$  的雅可比矩阵,  $\boldsymbol{\lambda}$  为拉格朗日乘子向量。

对于上述柔性多体系统动力学方程, 通常可采用隐式时间积分算法或者显示时间积分算法求解。鉴于显式时间积分算法的条件收敛特性会限制时间积分步长, 因此对于柔性多体系统动力学问题, 特别是具有大变形和大范围运动的多柔体系统动力学问题, 多采用隐式时间积分算法进行求解。其中在 Newmark 方法基础上发展而来的广义- $\alpha$  方法受到广泛关注。

广义- $\alpha$  方法将指标-3 的方程(45)经过差分直接离散成代数方程进行求解, 其迭代过程如下

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + h \dot{\mathbf{q}}_n + h^2 \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{a}_n + h^2 \beta \mathbf{a}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} = \dot{\mathbf{q}}_n + h(1-\gamma) \mathbf{a}_n + h\gamma \mathbf{a}_{n+1} \end{cases} \quad (46)$$

其中,  $h$  为时间积分步长,  $\beta$  和  $\gamma$  为决定计算精度与效率的算法参数, 式(46)中矢量参数  $\mathbf{a}$  满足如下关系

$$\begin{cases} (1-\alpha_m) \mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m \mathbf{a}_n = (1-\alpha_f) \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} + \alpha_f \ddot{\mathbf{q}}_n \\ \mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (47)$$

上式中各参数的选取方法如下

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{2\tilde{\rho}-1}{\tilde{\rho}+1}, \quad \alpha_f = \frac{\tilde{\rho}+1}{\tilde{\rho}+1}, \\ \beta &= \frac{1}{4}(1+\alpha_f-\alpha_m)^2, \quad \gamma = \frac{1}{2} + \alpha_f - \alpha_m \end{aligned} \quad (48)$$

其中  $\tilde{\rho} \in [0, 1]$  为算法的谱半径, 决定着算法能量耗散分布的频率范围。  $\tilde{\rho}$  取值越大, 则算法产生的能量耗散越小。当  $\tilde{\rho}=1$  时, 广义- $\alpha$  方法将保持系统能量而不产生数值耗散; 当  $\tilde{\rho}=0$  时, 则产生最大的能量耗散。

通过广义- $\alpha$  方法对动力学方程进行离散后, 需要在每个时间步长内采用 Newton-Rapson 迭代求解如下具有稀疏矩阵的大规模线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Phi} \end{bmatrix} \quad (49)$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\beta}} + (\boldsymbol{\lambda} - (\mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))_q - \gamma \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))_i \\ \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}(\mathbf{q}) - \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{cases} \quad (50)$$

$\dot{\boldsymbol{\beta}}, \gamma$  为满足如下关系的算法参数

$$\hat{\beta} = \frac{1 - \alpha_m}{h^2 \beta (1 - \alpha_f)}, \quad \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{h\beta} \quad (51)$$

## 4 数值算例

### 4.1 半圆形悬臂梁弯曲静力学分析

对图 9 所示的半圆形悬臂梁进行弯曲静力学分析。为了对比研究,本算例采用和文献[34]一致的参数进行建模。在初始构型中,该悬臂梁曲率半径  $R=0.5\text{m}$ ,截面半径  $r=0.0173\text{m}$ ,材料的杨氏模量  $E=2.1 \times 10^{10}\text{Pa}$ 。悬臂梁在  $O$  点固支,若在悬臂梁的自由端  $A$  点施加如图方向所示的外力矩  $M = \lambda \pi EI/l$ ,由材料力学可知,当仅发生纯弯曲变形,且  $\lambda=1$  时,该悬臂梁最终将形成一个整圆。本算例分别采用二阶和三阶 NURBS 梁单元以及 ANCF 缩减梁单元对该悬臂梁进行离散。

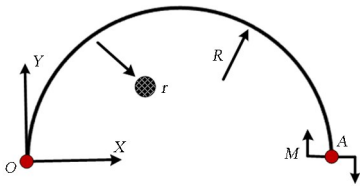


图 9 半圆形悬臂梁初始构形及受力示意图

Fig.9 The diagram of the semicircular cantilever beam

图 10 中给出了采用 128 个三阶 NURBS 梁单元进行离散,悬臂曲梁在不同外力矩作用下的弯曲构形和 Mises 应力分布图。从图中可看出,随着外力矩的增大,悬臂梁所受到的 Mises 应力也逐渐增大,并且应力在悬臂梁上的分布是很均匀的。当  $\lambda=1$  时,悬臂梁几乎弯曲变形为一个整圆。

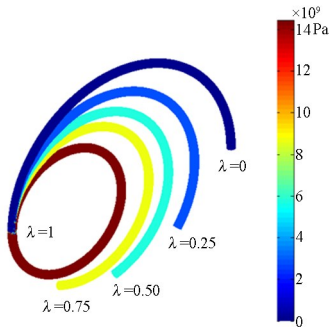


图 10 悬臂曲梁在不同外力矩作用下的弯曲构形和 Mises 应力分布图

Fig.10 The configuration and Mises stress distribution of the cantilever curved beam under different moments

为了和 ANCF 缩减梁单元的计算结果进行对

比,以悬臂曲梁的固支点  $O$  和末端点  $A$  之间的距离来衡量单元的收敛性,得到如图 11 所示的误差收敛曲线图。横坐标为总自由度,纵坐标为平衡之后  $OA$  两点之间的距离。从图中可以看出,NURBS 梁单元的收敛性要优于 ANCF 缩减梁单元,这是因为 NURBS 采用有理多项式进行插值,而 ANCF 是采用三次 Hermite 多项式插值,因而在对半圆形悬臂梁的初始几何描述上 NURBS 单元更加精确。此外,在自由度相同的情况下,和二阶 NURBS 梁相比,三阶 NURBS 单元可以得到更加精确的结果。

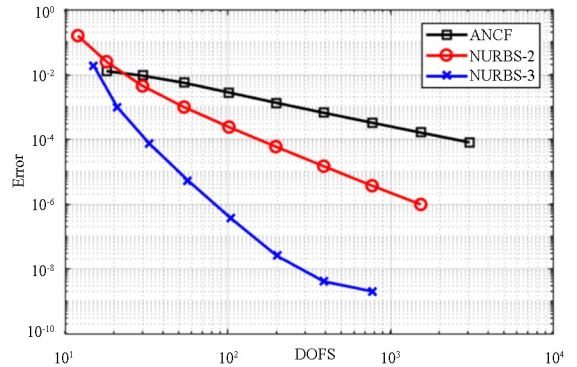


图 11  $OA$  两点的距离随自由度增加的变化曲线

Fig.11 The distance between the points  $O$  and  $A$  under different degree of freedoms

### 4.2 平面四连杆机构动力学分析

如图 12 所示,本节通过由一个曲柄,一个摇杆和一个连杆构成的平面四连杆机构检验提出的 NURBS 梁单元的动力学特性。

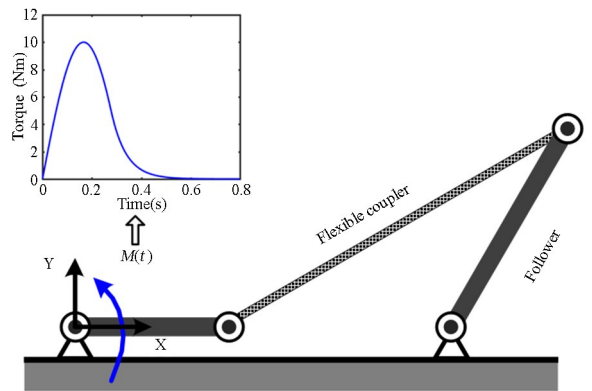


图 12 平面四连杆机构示意图

Fig.12 The diagram of the planar four-bar mechanism

连杆和曲柄以及摇杆之间采用球铰连接,曲柄和摇杆的另一个端点通过转动副固定在地面上。该四连杆机构通过作用在曲柄上的驱动力矩  $M$  进行转动,驱动力矩随时间的变化如下式所示



$$M(t) = \begin{cases} 10.00\sin(3\pi t) & 0 \leq t \leq 0.2778 \\ 465.88e^{-16.32t} & t > 0.2778 \end{cases} \quad (52)$$

该模型是一个典型的多系统动力学模型.其中各构件的几何和材料参数如表 1 所示.

表 1 四连杆机构的几何和材料参数

Table 1 Geometric and material parameters of the four-bar mechanism

Characteristic	Crank	Link rod	Jointed arm
Length/m	0.2	0.9	0.5196174
Mass/kg	0.6811	0.4740	1.4700
Tensile stiffness EA/N	$1.257 \times 10^6$	$7.854 \times 10^3$	$3.534 \times 10^5$
Bending stiffness EI/N·m <sup>2</sup>	$1.257 \times 10^2$	$1.534 \times 10^0$	$1.984 \times 10^1$
Young's modulus /Pa	$1.000 \times 10^9$	$1.000 \times 10^8$	$5.000 \times 10^8$

为了进行单元的收敛性测试,分别采用 68 个(曲柄:12,连杆:32,摇杆:24)三阶 NURBS 梁单元对该四连杆机构进行离散,同时采用 68 个和 136 个 ANCF 缩减梁单元进行动力学计算,得到的连杆中点在空间中的位置随时间变化曲线如图 13 所示.从图中可以看出 68 个三阶 NURBS 梁单元计算结果和 136 个 ANCF 缩减梁单元计算结果吻合良好,当采用 68 个 ANCF 单元离散时计算结果并没有收敛.

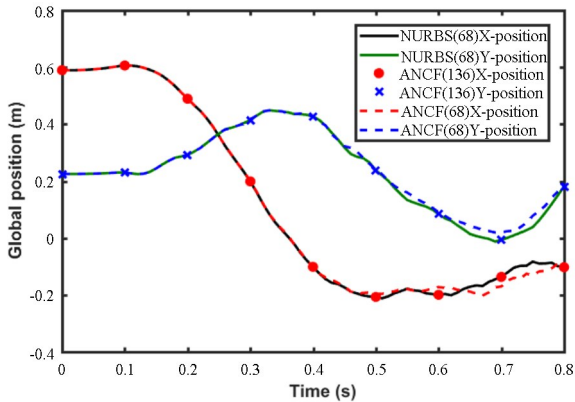


图 13 连杆中点在空间中的位置随时间变化曲线

Fig.13 The position of the rod midpoint at different time

为了对比 NURBS 梁单元的计算效率,本算例的计算在一台 16 核(主频为 2.90GHz)、64GB 内存的工作站上进行,其中计算步长取为  $5.0 \times 10^{-4}$  s,容许误差设为  $1.0 \times 10^{-6}$ .表 2 给出了划分不同单元数目采用 ANCF 单元和 NURBS 单元进行离散的模型所消耗的 CPU 时间.从表中可看出,计算所需时间随着单元数目增多而增加.当采用相同单元数目进行离散,NURBS 消耗的 CPU 时间比 AN-

CF 消耗的 CPU 时间要少,当单元足够多时,这种优势更加明显.

表 2 不同单元数目所消耗的 CPU 时间(单位:s)  
Table 2 CPU time consumed by different elements (unit:s)

Number of elements	ANCF	NURBS
17	5.98	4.44
34	13.01	8.00
68	28.68	15.20
136	62.16	30.25

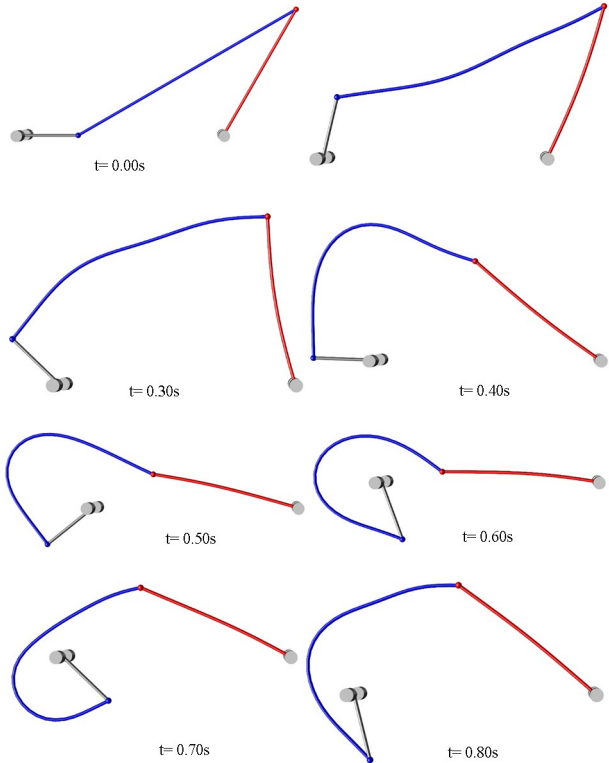


图 14 四连杆机构在不同时刻的构型图

Fig.14 The diagram of four-bar mechanism at different times

通过以上的对比可以发现 NURBS 单元的收敛性明显优于 ANCF 缩减梁单元,同时 NURBS 单元的计算效率也更高.这是因为采用三阶 NURBS 离散,单元之间是 C2 连续的,而 ANCF 缩减梁单元之间只能保证 C1 连续,造成单元节点处弯曲应变的不连续.此外,NURBS 梁单元的节点坐标只有控制点,而 ANCF 缩减梁单元的节点坐标除了节点位置以外还有节点处的斜率矢量,这导致在相同单元总数情况下,采用 NURBS 离散系统自由度更少,因而计算效率更高.该系统采用 136 个单元离散时,NURBS 单元建模求解所消耗的 CPU 时间仅为 ANCF 建模的 48.7%.在 NURBS 单元建

模中,NURBS 插值、单元组装和动力学方程求解三部分消耗的 CPU 时间占比约为 13.5%、18.7% 和 67.8%。

最后给出了四连杆机构的在驱动力矩作用下 8 个不同时刻的构型图,如图 14 所示.从图中可以看出,四连杆结构在转动过程中连杆发生了很大变形,在  $t > 0.5s$  之后,驱动力矩逐渐衰减到 0,可以观察到曲柄发生了回弹。

### 4.3 圆柱壳在集中力作用下的静力学分析

本节采用文献[18]中圆柱壳的拉伸静力学算例来验证提出的 NURBS 薄壳单元的正确性,并将结果与该文献进行比较.如图 15 所示,一个无约束的圆柱壳在 A、E 两点受到一对大小相等、方向相反的集中力  $F=40kN$  的作用,其中 A 点为圆柱体上母线的中点,E 点为下母线的中点.圆柱壳的长度  $L$  为 10.35mm,内径  $R$  与厚度  $h$  分别为 4.953mm 与 0.094mm,材料杨氏模量  $E=10.5 \times 106MPa$ ,泊松比  $\nu=0.3125$ 。

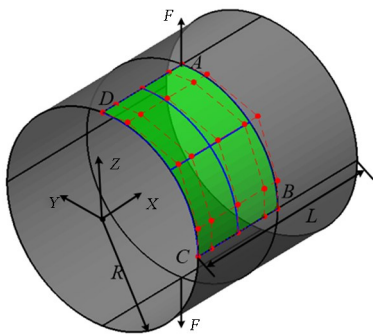


图 15 圆柱壳初始构型及受力示意图  
Fig.15 The configuration of the cylindrical shell

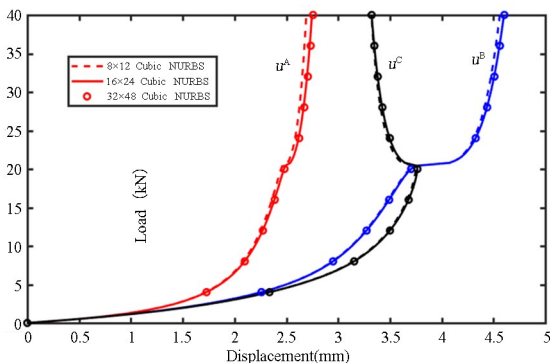


图 16 圆柱壳上 A、B、C 点的位移  
Fig.16 The displacements of the points A, B and C on the cylindrical shell

考虑到圆柱壳模型的对称性,本节仅对该模型上半部分的四分之一(ABCD)进行建模,同时在边

AB、AD 和 BC 上施加对称边界条件.现在在圆柱壳上施加外力  $F$  的过程平均分成 10 个增量步,并设静力学迭代容许误差为  $1.0 \times 10^{-6}$ .图 16 中给出了分别采用  $8 \times 12$ 、 $16 \times 24$  以及  $32 \times 48$  的三次 NURBS 对八分之一圆柱壳进行离散时,壳体上 A、B 和 C 三点的位移随外力增加的变化曲线.从图中可看出,采用  $16 \times 24$  的网格离散可得到收敛的结果。

当集中力  $F=40kN$  时,壳的变形达到最大,为了进行收敛性的对比,给出采用相同单元数进行离散,三阶 NURBS 和 ANCF 缩减壳单元计算结果,如表 3 所示.将有限元软件 ABAQUS 采用  $64 \times 96$  的 S4R 单元的计算结果作为参考值,从该表可以看出 NURBS 单元的收敛性明显优于 ANCF。

表 3 三阶 NURBS 和 ANCF 缩减壳单元离散 A 点位移 (单位:mm)

Table 3 Displacements of the point A modeling with NURBS and ANCF shell elements (unit: mm)		
Number of elements	ANCF	NURBS
$8 \times 12$	2.654	2.705
$16 \times 24$	2.694	2.745
$32 \times 48$	2.755	2.761
Reference	2.760	2.760

图 17 给出了圆柱壳在不同外力作用下的变形构型图.从该图可以看出,圆柱壳的变形可明显地分为两部分.当拉力小于 20kN 时,圆柱壳发生以弯曲变形为主的大变形.当拉力继续增大,圆柱壳几乎不再增加 Z 方向的位移,而以发生拉伸变形为主,并发生了一定程度的屈曲变形。

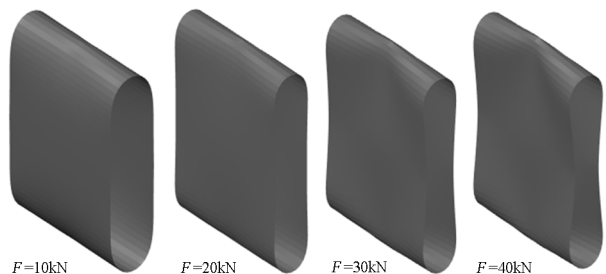


图 17 圆柱壳在不同外力作用下的变形构型图  
Fig.17 The diagram of the cylindrical shell under different external forces

### 4.4 矩形单摆的动力学分析

本节通过由矩形薄板的单摆模型检验

NURBS薄壳单元的动力学特性,如图18所示, $O$ 点采用球铰进行固定.其中材料杨氏模量 $E=1.0 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,泊松比 $\nu=0.3$ ,密度 $\rho=1800 \text{ kg/m}^3$ .薄板的几何尺寸为: $a \times b \times h=0.3 \times 0.3 \times 0.001 \text{ m}^3$ .本节研究该单摆模型在重力作用下的动力学响应,其中重力加速度为 $G=9.81 \text{ m/s}^2$ .

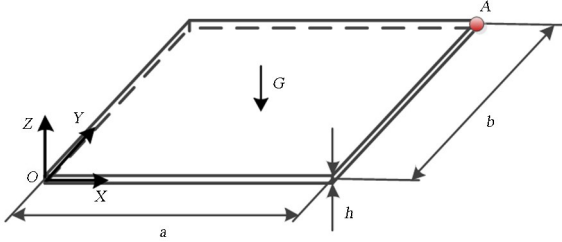


图 18 矩形薄板单摆系统

Fig.18 The pendulum of the rectangular thin plate

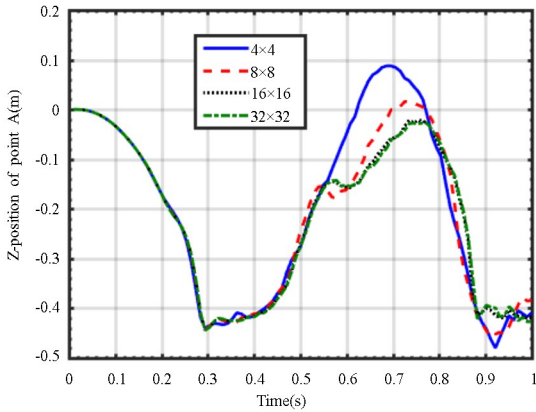


图 19 由不同单元得到单摆模型点 A 沿 Z 方向的位移曲线

Fig.19 The displacements of the point A in Z direction with different elements

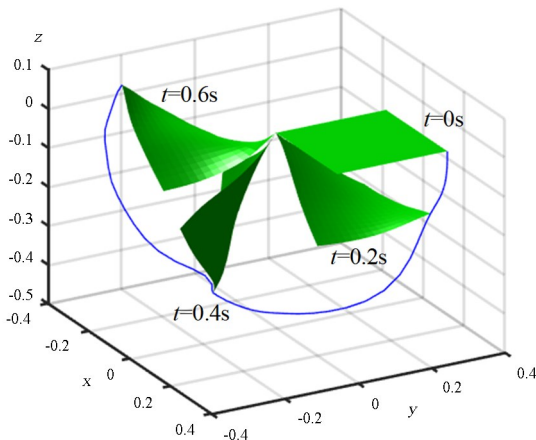


图 20 单摆模型在不同时刻的变形构形图

Fig.20 The diagram of the pendulum at different times

为了进行单元的收敛性测试,分别采用三阶 NURBS 单元将薄板离散为  $4 \times 4$ 、 $8 \times 8$ 、 $16 \times 16$  和

$32 \times 32$  个单元.图 19 中给出了不同单元数目下单摆模型中的 A 点沿 Z 方向的位移时间历程曲线.从图中可看出,前 0.3s 内不同单元离散模型计算得到的动力学响应类似.随后,单摆变形进一步增大,需要离散为  $16 \times 16$  个单元才能得到收敛的数值结果.图 20 给出了 4 个不同时刻双摆的构形图.此外给出了三阶 NURBS 单元和 ANCF 缩减壳单元的计算效率的对比,如表 4 所示.当单元总数相同时,采用三阶 NURBS 壳单元离散时系统自由度大大小于 ANCF 缩减壳单元,因而计算效率得以提高.

表 4 不同单元数目所消耗的 CPU 时间 (单位:s)

Table 4 CPU time consumed by different elements (unit:s)

Number of elements	ANCF	NURBS
$4 \times 4$	54	42
$8 \times 8$	253	186
$16 \times 16$	623	404
$32 \times 32$	3623	2545

## 5 结论

本文基于 NURBS 曲线和张量积 NURBS 曲面在等几何分析框架下分别提出了 Euler-Bernoulli 梁单元和 Kirchhoff-Love 壳单元,为柔性多体系统细长梁和薄板壳结构提供了两类精确、高效的建模方法.同时在完全拉格朗日格式下,根据 Green 应变张量对单元变形进行描述,结合第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量给出单元应变能公式,从而推导了单元的弹性力和弹性力雅可比矩阵表达式.最后通过静力学及动力学数值算例对提出的两类单元的性能进行对比和验证.表明提出的等几何单元不仅能精确描述柔性构件的几何特征,而且能精确描述柔性构件的大转动、大变形耦合动力学特性,还具有单元自由度少和收敛性高的特性,为柔性多体系统建模提供了一种高效、精确的新单元.

## 参考文献

- [1] 李培. 大型星载环形桁架天线展开动力学研究 [D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- LI P. Deployment dynamics of the large-scale hoop truss antenna of satellite [D]. Beijing: Beijing Insti-



- tute of Technology, 2016. (in Chinese)
- [2] 田强, 刘铖, 李培, 等. 多柔体系统动力学研究进展与挑战 [J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(5): 385—405.  
TIAN Q, LIU C, LI P, et al. Advances and challenges in dynamics of flexible multibody systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(5): 385—405. (in Chinese)
- [3] SHABANA A A. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation [J]. Multibody System Dynamics, 1997, 1(3): 339—348.
- [4] COTTRELL J A, HUGHES T J R, BAZILEVS Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA [M]. Wiley Publishing, 2009.
- [5] HUGHES T J R, COTTRELL J A, BAZILEVS Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(39): 4135—4195.
- [6] WEEGER O, WEVER U, SIMEON B. Isogeometric analysis of nonlinear Euler-Bernoulli beam vibrations [J]. Nonlinear Dynamics, 2013, 72(4): 813—835.
- [7] BOUCLIER R, ELGUEDJ T, COMBESCURE A. Locking free isogeometric formulations of curved thick beams [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2012, 245-246: 144—162.
- [8] SANG J L, PARK K S. Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(22): 9174—9190.
- [9] LUU A T, KIM N I, LEE J. Isogeometric vibration analysis of free-form Timoshenko curved beams [J]. Meccanica, 2015, 50(50): 169—187.
- [10] BORKOVICAB A, MARUSSIGA B, RADENKOVICBC G. Geometrically exact static isogeometric analysis of an arbitrarily curved spatial Bernoulli-Euler beam [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2022, 390: 114447.
- [11] 陈明飞, 靳国永, 张艳涛, 等. 弹性约束的功能梯度曲梁等几何振动分析 [J]. 振动工程学报, 2020, 33(5): 930—939.  
CHEN M F, JIN G Y, ZHANG Y T, et al. Isogeometric vibration analysis of functionally graded curved beams with elastic restraints [J]. Journal of Vibration Engineering, 2020, 33(5): 930—939. (in Chinese)
- [12] 夏阳, 廖科. 复杂三维曲梁结构的无闭锁等几何分析算法研究 [J]. 工程力学, 2018, 35(11): 17—25.  
XIA Y, LIAO K. Locking-free Isogeometric analysis of complex three-dimensional beam structures [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(11): 17—25. (in Chinese)
- [13] KIENDL J, BLETZINGER K U, LINHARD J, et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(49): 3902—3914.
- [14] CHEN L, NGUYEN-THANH N, NGUYEN-XUAN H, et al. Explicit finite deformation analysis of isogeometric membranes [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2014, 277(277): 104—130.
- [15] BENSON D J, BAZILEVS Y, HSU M C, et al. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200(13-16): 1367—1378.
- [16] ECHTER R. Isogeometric analysis of shells [D]. Stuttgart: Universität Stuttgart, 2013.
- [17] 王悦, 崔雅琦, 於祖庆, 等. 基于 T 样条的变网格等几何薄板动力学分析 [J]. 力学学报, 2021, 53(8): 2323—2335.  
WANG Y, CUI Y Q, YU Z Q, et al. Dynamic analysis of variable mesh isogeometric thin plate based on T-spline [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(8): 2323—2335 (in Chinese)
- [18] 刘涛, 汪超, 刘庆运, 等. 基于等几何方法的压电功能梯度板动力学及主动振动控制分析 [J]. 工程力学, 2020, 37(12): 228—242.  
LIU T, WANG C, LIU Q Y, et al. Analysis for dynamic and active vibration control of piezoelectric functionally graded plates based on isogeometric method [J]. Engineering Mechanics, 2020, 37(12): 228—242. (in Chinese)
- [19] 陈龙, 郝婵娟, 汪中厚, 等. 单齿啮合的齿轮接触等几何分析 [J]. 机械工程学报, 2021, 57(3): 107—115.  
CHEN L, HAO C J, WANG Z H, et al. Isogeometric analysis of gear with single tooth contact [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(3): 107—115. (in Chinese)
- [20] 荣吉利, 熊丽园, 刘铖, 等. 基于 HB 样条的平面大

- 变形结构动力学等几何分析 [J]. 北京理工大学学报, 2020, 40(6):592–601.
- RONG J L, XIONG L Y, LIU C, et al. Isogeometric Analysis with Hierarchical B-Splines for Planar Structural Dynamics with Large Deformation [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2020, 40(6):592–601. (in Chinese)
- [21] TOBIAS R, ALEXANDER H, ROBERT S. Flexible multibody impact simulations based on the isogeometric analysis approach [J]. Multibody System Dynamics, 2022, 54: 75–95.
- [22] JIA Y, ZHANG Y, XU G, et al. Reproducing kernel triangular b-spline-based fem for solving PDEs [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2013, 267: 342–358.
- [23] VERSPRILLE K J. Computer-aided design applications of the rational B-spline approximation form [D]. New York: Syracuse University, 1975.
- [24] RIESENFELD R F. Application of B-spline approximation to geometric problems of computer aided design [D]. New York: Syracuse University, 1972.
- [25] 李伟伟. 基于 B 样条及 NURBS 的等几何分析研究 [D]. 长春: 吉林大学, 2013.
- LI W W. Isogeometric analysis based on B-spline and NURBS [D]. Changchun: Jilin University, 2013. (in Chinese)
- [26] COX M G. The numerical evaluation of B-splines [J]. National Physics Laboratory DNAC 4, 1971: 1–12.
- [27] DE BOOR C. On calculation with B-splines [J]. Journal of approximation theory, 1972, 6:50–62.
- [28] LIU C, TIAN Q, HU H Y. New spatial curved beam and cylindrical shell elements of gradient-deficient Absolute Nodal Coordinate Formulation [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(3):1903–1918.
- [29] 刘铖. 基于绝对坐标描述的柔性空间结构展开动力学研究 [D]. 北京: 北京理工大学, 2013.
- LIU C. Deployment dynamics of flexible space structures described by absolute coordinate-based method [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2013. (in Chinese)
- [30] SHABANA A A. Computational continuum mechanics [M]. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [31] LUO K, LIU C, TIAN Q, et al. Nonlinear static and dynamic analysis of hyper-elastic thin shells via the absolute nodal coordinate formulation [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(2):1–23.
- [32] BRONSHTEIN I N, SEMENDYAYEV K A, MUSIOL G, et al. Handbook of mathematics [D]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- [33] CHUNG J, HULBERT G M. A Time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method [J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60(2):371–375.
- [34] SUGIYAMA H, KOYAMA H, YAMASHITA H. Gradient deficient curved beam element using the absolute nodal coordinate formulation [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2010, 5(2):1090–1097.