

Kopel 系统中 Neimark-Sacker 分岔的不变曲线*

袁利国^{1,2} 魏周超^{3†} 郭军¹

(1.华南农业大学 数学与信息学院,广州 510642)

(2.安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

(3.中国地质大学(武汉) 数学与物理学院,武汉 430074)

摘要 首先阐述了 Kopel 系统的复杂动力学的研究进展.再基于分岔与规范型理论,给出了 Kopel 系统的 Neimark-Sacker(N-S)分岔的一类新证明,并得到 N-S 分岔所产生不变曲线的近似表达式.最后,对 N-S 分岔及不变曲线进行了数值模拟分析,验证了理论推导所得结果,并对 N-S 分岔中的扰动参数与不变曲线的近似表达式中参数之间的相互影响进行了分析.所有这些分析对 Kopel 系统的已有动力学研究是一个补充,对其经济现象的内在规律提供了理论支撑.

关键词 Kopel 系统, Neimark-Sacker 分岔, 不变曲线, 不动点

中图分类号:O193;O317;O322

文献标志码:A

Invariant Curve of Neimark-Sacker Bifurcation in the Kopel System*

Yuan Ligu^{1,2} Wei Zhouchao^{3†} Guo Jun¹

(1. College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China)

(2. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

(3. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences(Wuhan), Wuhan 430074, China)

Abstract Firstly, research progress of complex dynamics of the Kopel system is described. Based on the bifurcation and normal form theory, a new proof of Neimark-Sacker (N-S) bifurcation of Kopel system is given, and approximate expression of the invariant curve generated by N-S bifurcation is obtained. Finally, the N-S bifurcation and invariant curve are numerically simulated, which verifies the theoretical results, and the mutual effect between the perturbation parameters in N-S bifurcation and the parameters in the approximate expression of invariant curve is analyzed. All analyses are supplement to the existing research of the Kopel system and provide a theoretical support for the intrinsic law of economic phenomenon.

Key words Kopel system, Neimark-Sacker bifurcation, invariant curve, fixed point

引言

1996年, Kopel 提出了 Kopel 系统^[1], 它是一个二维离散古诺双寡头模型, 其表达式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\rho)x_n + \rho\mu y_n(1-y_n) \\ y_{n+1} = (1-\rho)y_n + \rho\mu x_n(1-x_n) \end{cases} \quad (1)$$

其中, x_n, y_n 分别为公司 x 和 y 在时间 t 内生产的物资数量, ρ 与 μ 均为正参数, ρ 可以理解为耦合参数, 限制 $0 < \rho < 1$.

现回顾 Kopel 系统的整个研究过程. Kopel 系统最早于 1996 年被提出^[1]. 1999 年, Agiza 分析了其不动点的稳定性、混沌相图、分岔的数值模拟及混沌控制^[2]. 2005 年, Anderson 等分析了该系统的吸引盆问题^[3]. 2006 年, 于晋臣研究了 Kopel 系统的跨临界分岔、倍周期分岔、叉式分岔及 N-S 分岔的数值模拟^[4]. 2008 年, Govaerts 等研究了其不动点及周期轨的稳定性^[5]. 2009 年, 于晋臣等分析了系统的分岔及数值模拟^[6], 同年, 于晋臣等^[7] 给出其倍周期分岔与混沌. 2010 年, 吴文娟等^[8,9] 给出了系统的马蹄混沌、间歇混沌及混沌控制. 2020 年, 李波等^[10] 研究了其双参数分支情形 $-1:4$ 共振. Gao 等^[11-18] 分析了基于 Kopel 系统的推广模型的稳定性、分岔与混沌现象, 这些分岔研究主要基于文献^[23-27] 的方法.

Murakami 提出分析 N-S 分岔的新方法, 并成功得到验证^[19,22]. 现基于此新方法, 再次给出 Kopel 系统(1)的 N-S 分岔的证明, 得到分岔方向及稳定性结果, 并计算出 N-S 分岔所产生的不变曲线的近似表达式, 同时, 对 N-S 分岔的扰动参数与不变曲线中的参数之间的关系进行了分析. 这些是对 Kopel 系统(1)的内在复杂动力学研究的进一步补充完善.

1 Kopel 系统的 N-S 分岔及不变曲线

由离散系统的不动点定义, 令

$$\begin{cases} (1-\rho)x_n + \rho\mu y_n(1-y_n) = x_n, \\ (1-\rho)y_n + \rho\mu x_n(1-x_n) = y_n, \end{cases}$$

得 Kopel 系统的四个非负不动点^[1-8], 分别记为

$$P_1(x^*, y^*) = (0, 0),$$

$$P_2(x^*, y^*) = \left(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu} \right), \mu > 1,$$

$$P_3(x^*, y^*) = (P_{31}, P_{32}),$$

其中,

$$P_{31} = \frac{\mu+1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu},$$

$$P_{32} = \frac{\mu+1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu},$$

$\mu \geq 3$, 不动点 P_4 与 P_3 关于直线 $x=y$ 对称. 文献^[4,6] 取定一组特殊参数值, 给出了 P_3 不动点处的 N-S 分岔数值模拟, 但对此系统 N-S 分岔的不变曲线的研究仍未涉及.

系统(1)在不动点处的雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho\mu - 2\rho\mu y \\ \rho\mu - 2\rho\mu x & 1-\rho \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)} \quad (2)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - 2(1-\rho)\lambda + (1-\rho)^2 - (\rho\mu - 2\rho\mu x^*)(\rho\mu - 2\rho\mu y^*) = 0$$

则特征值

$$\lambda_{1,2} \Big|_{(x^*, y^*)} = (1-\rho) \pm \rho\mu \sqrt{(1-2x^*)(1-2y^*)}.$$

现在分析 P_3 处的 N-S 分岔及分岔所产生的不变曲线的近似表达式.

引理 1^[22] 给定二维方阵 A , 如果迹 $\text{tr}A$ 及行列式 $\det A$ 满足 $|\text{tr}A| - 1 \leq \det A = 1$, 则 A 的特征值为 $\lambda = e^{\pm i\omega}$, 其中 $\omega = \cos^{-1}(\text{tr}A/2)$, i 为虚数单位.

引理 2 如果 $0 < \rho < 1, \mu > 1 + \sqrt{6}$, 则当 $\rho = 2/(\mu^2 - 2\mu - 3)$ 时, 系统(1)在不动点 P_3 处的雅可比矩阵有一对共轭纯虚数特征值 $\lambda = e^{\pm i\omega}$, 其中, $\omega = \cos^{-1}(1-\rho)$, 并且 λ 满足

$$(i) \lambda^j \neq 1 (j = 1, 2, 3, 4)$$

$$(ii) \frac{d|\lambda|}{d\rho} \Big|_{\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}} = 1 > 0.$$

证明: (i) Kopel 系统(1)在不动点 P_3 处的雅可比矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1-\rho & A_{12} \\ A_{21} & 1-\rho \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中

$$A_{12} = -\rho[1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}],$$

$$A_{21} = -\rho[1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}],$$

则 $\text{tr}A = 2(1-\rho), \det A = (\mu^2 - 2\mu - 3)\rho^2 - 2\rho + 1$, 由 $0 < \rho < 1$ 及 $\rho = 2/(\mu^2 - 2\mu - 3)$, 故 $|\text{tr}A| - 1 \leq 1$, 且 $\det A = 1$, 又 $\mu > 1 + \sqrt{6}$, 也保证了 $0 < \rho$

< 1 , 即此引理的三个条件是不冲突的, 是相容的. 因此, 由引理 1, 系统(1)在 P_3 处的雅可比矩阵有一对共轭纯虚数特征值 $\lambda = e^{\pm i\omega}$, 其中 $\omega = \cos^{-1}(1 - \rho)$, 又 $\lambda^j = (e^{\pm i\omega})^j = \cos(j\omega) \pm i\sin(j\omega)$, 因 $0 < \cos \omega = 1 - \rho < 1$, 故 $\omega \neq 0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$, 从而 $\cos(j\omega) \neq 1$, 得 $\lambda^j \neq 1 (j = 1, 2, 3, 4)$.

(ii) $\lambda = e^{\pm i\omega}$ 是一对共轭纯虚数, 故 $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = \det \mathbf{A}$, 得 $|\lambda| = (\det \mathbf{A})^{\frac{1}{2}}$, 又当 $\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}$

时, $\det \mathbf{A} = 1$. 又

$$\det \mathbf{A} = (\mu^2 - 2\mu - 3)\rho^2 - 2\rho + 1$$

故 $\frac{d}{d\rho}(\det \mathbf{A}) = 2(\mu^2 - 2\mu - 3)\rho - 2$, 从而

$$\frac{d|\lambda|}{d\rho} \Big|_{\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}} = \frac{1}{2} (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{2}} \times (\det \mathbf{A})' \Big|_{\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}} = 1 \neq 0$$

(4)

证毕.

由文献[24]的定理 3.5.2 可知, 当 $0 < \rho < 1$, $\mu > 1 + \sqrt{6}$ 及 $\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}$ 时, Kopel 系统(1)在不动点 P_3 处已经满足了文献[24]的定理 3.5.2 的(SH1)与(SH2)条件, 现 Kopel 系统(1)可能会发生 N-S 分岔. 同时, 存在光滑的坐标变换 h , 采用文献[24]的记号, 使得系统(1)可转化为极坐标形式 $(r + d(\mu - \mu_0)r + ar^3, \theta + c + br^2) +$ 高阶项.

还需验证条件(SH3): r^3 的系数 $a \neq 0$. 当 $0 < \rho < 1, \mu > 1 + \sqrt{6}$ 及 $\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}$ 时, 对 μ 与 ρ 取一般值, 由文献[23, 24]的方法或文献[19, 22]的方法计算 a , 即使利用 Mathematica 软件计算 r^3 的系数都非常困难. 下面将在一组特殊参数下, 利用文献[19, 22]新方法分析 N-S 分岔并给出不变曲线的近似表达式, 有别于文献[23, 24]的方法.

引理 3 如果 $\rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3}$, 则系统(1)在不动点 P_3 处的雅可比矩阵的特征值 $\lambda = e^{\pm i\omega}$ 所对应的特征向量为

$$\mathbf{q} = \left(-\frac{i\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 4}}{1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}, 1 \right)^T$$

$$\mathbf{p} = \left(\frac{i\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 4}}{-1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}, 1 \right)^T \quad (5)$$

且 \mathbf{q} 与 \mathbf{p} 满足 $\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}, \mathbf{p}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{p}\mathbf{q} = 2, \omega = \cos^{-1}(1 - \rho)$.

证明: 矩阵 \mathbf{A} 的特征方程

$$\lambda^2 - 2(1 - \rho)\lambda + (\mu^2 - 2\mu - 3)\rho^2 - 2\rho + 1 = 0, \text{ 其中}$$

$$\begin{aligned} \lambda = e^{i\omega} &= \cos(\omega) + i\sin(\omega) = \\ &(1 - \rho) + i\sqrt{1 - (1 - \rho)^2} = \\ &\frac{\mu^2 - 2\mu - 5 + 2i\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 4}}{\mu^2 - 2\mu - 3}, \end{aligned}$$

易验证 $\mathbf{A}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{q}, \mathbf{p}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{p}$ 且 ρ . 此处 ρ 与 ρ 分别是 \mathbf{A} 的右特征向量与左特征向量. 证毕.

现基于文献[19, 22]的新方法, 选取 $\mu = 5, \rho = \frac{2}{\mu^2 - 2\mu - 3} = \frac{1}{6}$ 的特殊情形进行分析. 此组参数情形下, 引理 2 与引理 3 仍是成立的.

定理 1 当 $\rho = \frac{1}{6}$ 且 $\mu = 5$ 时, 系统(1)在不动

点 P_3 处发生 N-S 分岔. 对参数 ρ 进行扰动 $\rho + \epsilon_1$, ϵ_1 是充分小的扰动参数, 那么, 当 $\epsilon_1 > 0$ 时, 存在一个稳定的闭不变曲线, 且其近似表达式为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + 2r_0 \operatorname{Re}(\mathbf{q}e^{i\theta}) + \\ &r_0^2 (\operatorname{Re}(\mathbf{K}_{20}e^{2i\theta}) + \mathbf{K}_{11}) \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3 + \sqrt{3}}{5} \\ \frac{3 - \sqrt{3}}{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{1 + 2\sqrt{3}}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{7.1851}},$$

$\mathbf{K}_{20} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{5(171 + 23\sqrt{3} + (45\sqrt{11} + 35\sqrt{33})i)}{48(13 + 4\sqrt{3})} \\ \frac{5(-177 - 35\sqrt{3} + (25\sqrt{33} - 15\sqrt{11})i)}{48(13 + 4\sqrt{3})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{5 + 65\sqrt{3}}{-39 - 12\sqrt{3}} \\ \frac{65 + 75\sqrt{3}}{39 + 12\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

ε 是一个适当小的正数, θ 为旋转角度.

证明: 由于 $\rho = \frac{1}{6}$ 且 $\mu = 5$, 因此, 引理 2 及引理 3 的结论都成立. 现在进一步分析 N-S 分岔及分岔所产生的不变曲线的近似表达式.

首先, 把不动点 P_3 平移到原点, 作变换 $u_n = x_n - x^*$, $v_n = y_n - y^*$, 且

$$\begin{cases} (1-\rho)x^* + \rho\mu y^*(1-y^*) = x^*, \\ (1-\rho)y^* + \rho\mu x^*(1-x^*) = y^*. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\rho)u_n + \rho\mu(1-2y^*)v_n - \rho\mu v_n^2 \\ v_{n+1} = (1-\rho)v_n + \rho\mu(1-2x^*)u_n - \rho\mu u_n^2 \end{cases} \quad (7)$$

由引理 2 及分岔理论, 系统(7)可转化为规范型

$$z_{n+1} = \lambda(\varepsilon)z_n + c(\varepsilon)z_n^2\bar{z} + O(4) \quad (8)$$

在极坐标下, 式(8)可写成

$$\begin{cases} r_{n+1} = |\lambda(\varepsilon)|r_n + a(\varepsilon)r_n^3 + O(4) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \arg \lambda(\varepsilon) + b(\varepsilon)r_n^3 + O(4) \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$a(\varepsilon) = \operatorname{Re} \left(\frac{c(\varepsilon)}{a(\varepsilon)} \right), \quad b(\varepsilon) = \operatorname{Im} \left(\frac{c(\varepsilon)}{a(\varepsilon)} \right).$$

对(9)式的第一个方程的系数在 $\varepsilon = 0$ 处进行 Taylor 展开, 得

$$r_{n+1} = (1 + d\varepsilon)r_n + a(0)r_n^3 + O(4) \quad (10)$$

下面计算立方项的系数 $a(0)$, 判定其正负. 记(7)式的非线性项为

$$\mathbf{F} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\mu v^2 \\ -\rho\mu u^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

则(7)式可简记为

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \mathbf{F} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-\rho & \rho\mu(1-2y^*) \\ \rho\mu(1-2x^*) & 1-\rho \end{pmatrix}$.

定义矩阵 $\Phi = (q, \bar{q})$, 作变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_{11} \\ z + \bar{z} \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中

$$\Phi_{11} = \frac{-iz\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 4} + i\bar{z}\sqrt{\mu^2 - 2\mu - 4}}{1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}.$$

把(13)式代入(11)式, 当 $z = 0$ 时, 也有

$$\mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\rho\mu[z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2] \\ F_{21} \end{pmatrix}$$

得

$$\mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -\rho\mu[z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2] \\ F_{21} \end{pmatrix} \quad (14)$$

其中

$$F_{21} = \rho\mu \frac{(\mu^2 - 2\mu - 4)[z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2]}{[1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}]^2}$$

因此

$$f_{20} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right) \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} \frac{-4\mu}{-3 - 2\mu + \mu^2} \\ f_{201} \end{pmatrix} \quad (15)$$

其中

$$f_{201} = \frac{4\mu(-4 - 2\mu + \mu^2)}{(-3 + \mu)(1 + \mu)(1 + \sqrt{(-3 + \mu)(1 + \mu)})^2}$$

又

$$f_{11} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right) \Big|_{z=0} = \begin{pmatrix} \frac{-4\mu}{-3 - 2\mu + \mu^2} \\ f_{112} \end{pmatrix} \quad (16)$$

其中

$$f_{112} = \frac{-4\mu(-4 - 2\mu + \mu^2)}{(-3 + \mu)(1 + \mu)(1 + \sqrt{(-3 + \mu)(1 + \mu)})^2}$$

且

$$f_{21} = \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \right) + \frac{K_{20}z^2}{2} + K_{11}z\bar{z} + \frac{K_{02}\bar{z}^2}{2} \Big|_{z=0}$$

现可计算

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{20} &= (\lambda^2 I - \mathbf{A})^{-1} f_{20} \\ \mathbf{K}_{11} &= (I - \mathbf{A})^{-1} f_{11} \\ \mathbf{K}_{02} &= (\bar{\lambda}^2 I - \mathbf{A})^{-1} f_{02} \end{aligned} \quad (17)$$

得

$$f_{21} =$$

$$\frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}_{20} z^2}{2} + \mathbf{K}_{11} z \bar{z} + \frac{\mathbf{K}_{02} \bar{z}^2}{2} \right) \Big|_{z=0} \quad (18)$$

由于 $f_{21}/2$ 是(15)式

$$\mathbf{F} \left(\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}_{20} z^2}{2} + \mathbf{K}_{11} z \bar{z} + \frac{\mathbf{K}_{02} \bar{z}^2}{2} \right)$$

在 $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ 处展开式 $z^2 \bar{z}$ 的系数,因此实际计算过程中,取

$$f_{21} = \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \mathbf{F} \left[\Phi \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{K}_{20} z^2}{2} + \mathbf{K}_{11} z \bar{z} \right] \Big|_{z=0} \quad (19)$$

把 $\mu = 5, \rho = \frac{1}{6}$ 代入(7)式、(8)式及(11)~(19)式,得

$$f_{21} = \begin{pmatrix} \frac{25(-239 - 445\sqrt{3} + (15\sqrt{11} - 25\sqrt{33})i)}{144(13 + 4\sqrt{3})} \\ \frac{25(495 + 385\sqrt{3} - (203\sqrt{11} + 439\sqrt{33})i)}{144(37 + 30\sqrt{3})} \end{pmatrix}$$

因此有

$$c(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{pq} p f_{21} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} p f_{21} = \frac{125(90 + 37\sqrt{3})(55 - 89\sqrt{11}i)}{792(217 + 104\sqrt{3})}$$

得

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{c(0)}{\lambda} \right) = -\frac{500(90 + 37\sqrt{3})}{5859 + 2808\sqrt{3}} \approx -7.1851 < 0 \quad (20)$$

因此,由引理 2 及(20)式,结合文献[19, 22]的定理,Kopel 系统(1)在不动点 P_3 处发生 N-S 分岔.对充分小的扰动 $\epsilon_1 > 0$,存在稳定的不变曲线,且不动点 P_3 是渐近稳定的.

基于以上分析及文献[19, 22]的结论,得 N-S 分岔的不变曲线的近似表达式为

$$\begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \\ \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} + 2r_0 \operatorname{Re}(q e^{i\theta}) + r_0^2 (\operatorname{Re}(\mathbf{K}_{20} e^{2i\theta}) + \mathbf{K}_{11}) \end{pmatrix} \quad (21)$$

当取参数 $\mu = 5, \rho = 1/6$ 时,计算可得

$$r_0 = \sqrt{-\frac{d\epsilon}{\alpha(0)}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{7.1851}},$$

$$q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{1 + 2\sqrt{3}}i \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{20} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5(171 + 23\sqrt{3} + (45\sqrt{11} + 35\sqrt{33})i)}{48(13 + 4\sqrt{3})} \\ \frac{5(-177 - 35\sqrt{3} + (25\sqrt{33} - 15\sqrt{11})i)}{48(13 + 4\sqrt{3})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{5 + 65\sqrt{3}}{-39 - 12\sqrt{3}} \\ \frac{65 + 75\sqrt{3}}{39 + 12\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \theta \text{ 为旋转角度,存在一}$$

个适当小的正数 ϵ ,从而得到 N-S 分岔的不变曲线的具体近似表达式(6).证毕.

注:闭不变曲线的近似表达式(6)中的 ϵ 是一个适当小的正数,它不一定等于扰动参数 ϵ_1 .

2 数值模拟

现对 N-S 分岔进行数值模拟,当取 $\mu = 5, \epsilon_1 = 0.001$,则扰动后 $\rho = 1/6 + \epsilon_1$, (6)式中的 $\epsilon = \epsilon_1 = 0.001$,初始值取 $\epsilon = \epsilon_1 = 0.001$,初始值的选取不能远离不动点 P_3 ,迭代次数 2000 次,去掉部分暂态数据,得 N-S 分岔图及近似不变曲线,如图 1 所示,其中心的星号表示 P_3 不动点.近似不变曲线为闭虚线,有很好的近似效果.

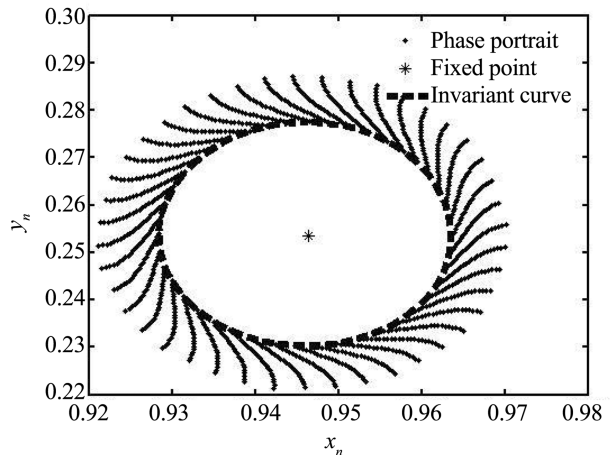


图 1 $\epsilon = \epsilon_1 = 0.001$ 的情形
Fig.1 The case of $\epsilon = \epsilon_1 = 0.001$

当取 $\mu = 5, \epsilon_1 = 0.0001$,则扰动后 $\rho = 1/6 + \epsilon_1$,

(6)式中的 $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.0001$ 时,初始值取 $(0.3, 0.2)$, 得到数值模拟结果如图 2 所示,此时 $\varepsilon = 0.0001$ 所得的近似不变曲线已经不能近似 N-S 分岔的结果. 而若选取 $\varepsilon_1 = 0.001 \neq \varepsilon$ 时,才能得到图 1 类似的近似效果.

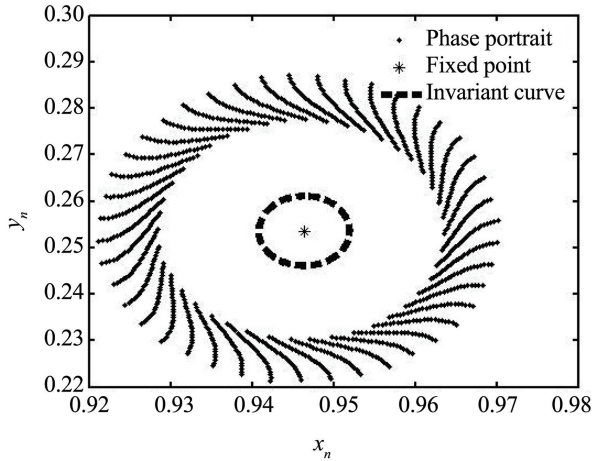


图 2 $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.0001$ 的情形
Fig.2 The case of $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.0001$

图 1 与图 2 两种情形也说明了当系统的参数发生小扰动 ε_1 时,会发生 N-S 分岔, 则存在某个 ε , 可构造 N-S 分岔所产生的不变曲线近似方程(6), 但此处的 ε 不一定是与小扰动参数 ε_1 取同一个值.

现结合文献[22]的定理 4.4 及其第 916 页的数值模拟例子印证以上观点. 文献[22]中所研究的系统为

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n (1 - x_n) - x_n y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{\beta} x_n y_n \end{cases} \quad (22)$$

其不动点 $P_3(\beta, \alpha(1-\beta) - 1)$. 当 $\beta = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})$ 时, 系统(22)将发生 N-S 分岔, 分岔所产生的近似不变曲线的近似表达式为

$$\begin{pmatrix} x_n^* \\ y_n^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha(1-\beta) - 1 \end{pmatrix} + 2\rho_0 \operatorname{Re}(\mathbf{q}e^{i\theta}) + \rho_0^2 (\operatorname{Re}(\mathbf{K}_{20}e^{2i\theta}) + \mathbf{K}_{11}) \quad (23)$$

其中 $\rho_0 = \frac{\sqrt{\mu}}{\alpha_0^2}$, \mathbf{q} , \mathbf{K}_{20} , \mathbf{K}_{11} 等取值情况见文献[22]的定理 4.4.

当 $\alpha = 2.5 + \mu$, 即 $\alpha_0 = 2.5$, 扰动参数 $\mu = 0.1$, $\beta = 0.3$, 取初始值 $(0.6, 0.6)$. 类似前面的处理技巧, 把(23)式的参数 $\rho_0 = \sqrt{\mu}/\alpha_0^2$ 中的 μ 重新记成

μ_1 , 以示区分. 当 $\mu = \mu_1 = 0.1$ 时, 即为文献[22]的定理 4.4 的数值模拟的例子, 所得结果如图 3 所示, (23)式能很好地近似 N-S 分岔所产生的不变曲线.

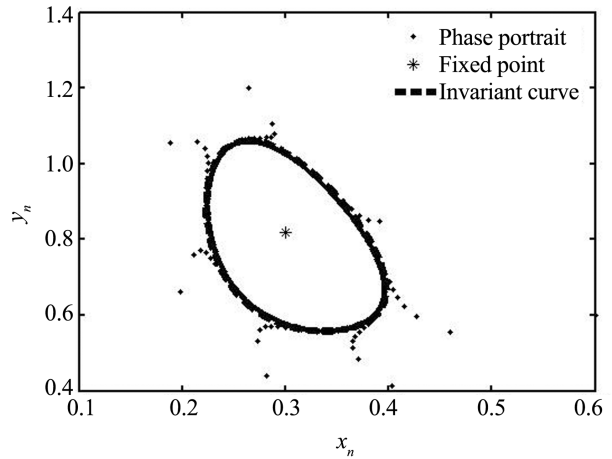


图 3 $\mu = \mu_1 = 0.1$ 的情形
Fig.3 The case of $\mu = \mu_1 = 0.1$

当 $\mu = \mu_1 = 0.001$ 时, 其他参数不变, 去掉部分暂态数据, 此时所得近似效果已较差. 而此时若选择某个恰当的 $\mu_1 = 0.0019$, 则可取得较好的近似效果.

通过以上算例, 文献[19]的推论 2.1 与文献[22]的定理 4.4 中, 不变曲线的近似表达式方程为

$$\begin{aligned} x_n^* &\approx x^* + 2\rho_0 \operatorname{Re}(\mathbf{q}e^{i\theta}) + \\ &\rho_0^2 (\operatorname{Re}(\mathbf{K}_{20}e^{2i\theta}) + \mathbf{K}_{11}) \end{aligned} \quad (24)$$

如果在 N-S 分岔中, 对系统的参数扰动是 μ , 那么近似表达式(24)中 $\rho_0 = \sqrt{-d/a\mu}$ 处的 μ 不一定取参数扰动 μ 相等的值, 而只是存在某个 μ_1 , 使得当 $\rho_0 = \sqrt{-d/a\mu_1}$ 时, 有较好的近似效果, 否则 $\lim_{\mu \rightarrow 0} \rho_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{-d/a\mu_1} = 0$, 其中 a 、 d 是与 μ 无关的固定值. 因此, 由(24)式, 当扰动参数 μ 趋于 0 时, 近似表达式会缩小至不动点 x^* , 而不是 N-S 分岔所产生的不变曲线的近似, 只有找到恰当的 μ_1 才能实现较好的近似.

3 结论

首先阐述了 Kopel 系统的分岔、混沌与稳定性等方面已有的研究成果. 在分岔方面, 由于推导计算的复杂性, 对 N-S 分岔的方向与稳定性的一般性证明仍是公开的问题. 对 N-S 分岔所产生的不变曲线

的研究也没有涉及.因此,本文采用 Murakami K 提出的新方法,分析了 Kopel 系统的 N-S 分岔,给出了部分一般性证明,即引理 2 与引理 3,再分析了一组特殊参数 ($\rho = 1/6, \mu = 5$) 情形下 Kopel 系统的 N-S 分岔.同时,给出了 N-S 分岔所产生的不变曲线的近似表达式,讨论了扰动参数 ϵ_1 与近似表达式(6)中 ϵ 的选取问题.这些研究是对 Kopel 系统的复杂动力学的完善.但对其 N-S 分岔的一般性分析,即 $\rho = 2/(\mu^2 - 2\mu - 3)$ 与 $\mu > 1 + \sqrt{6}$ 时,要克服(17)式、(19)式与(20)式的推导计算的困难,仍是将来需要解决的公开问题.Kopel 系统的高余维分岔也是可研究问题,这些分岔与混沌的研究有助于理解 Kopel 系统的内在复杂动力学与经济现象.

参考文献

- [1] KOPEL M. Simple and complex adjustment dynamics in Cournot duopoly models [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, 7(12): 2031–2048.
- [2] AGIZA H N. On the analysis of stability, bifurcation, chaos and chaos control of Kopel map [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1999, 10(11): 1909–1916.
- [3] ANDERSON D R, MYRAN N G, WHITE D L. Basins of attraction in a Cournot duopoly model of Kopel [J]. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2005, 11(10): 879–887.
- [4] 于晋臣. 非线性动力系统的分岔研究 [D]. 北京:北京交通大学, 2006.
YU J C. Study on bifurcation of nonlinear dynamical system [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2006. (in Chinese)
- [5] GOVAERTS W, GHAZIANI R K. Stable cycles in a cournot duopoly model of Kopel [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 218(2): 247–258.
- [6] 于晋臣, 张彩艳. Kopel 系统的分岔研究 [J]. *山东交通学院学报*, 2009, 17(2): 77–81.
YU J C, ZHANG C Y. Study of bifurcation in Kopel system [J]. *Journal of Shandong Jiaotong University*, 2009, 17(2): 77–81. (in Chinese)
- [7] 于晋臣, 张彩艳, 彭名书. 一类离散动力系统的混沌研究 [J]. *昆明理工大学学报*, 2009, 34(4): 101–104.
YU J C, ZHANG C Y, PENG M S. Chaotic study of a discrete dynamical system [J]. *Journal of Kunming University of Science and Technology*, 2009, 34(4): 101–104. (in Chinese)
- [8] WU W, CHEN Z, LI W H. Complex nonlinear dynamics and controlling chaos in a Cournot duopoly economic model [J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, 11(5): 4363–4377.
- [9] 吴文娟. 复杂混沌系统的存在性及动力学特性分析 [D]. 天津:南开大学, 2010.
WU W J. Existence and dynamic characteristics of complex chaotic systems [D]. Tianjin: Nankai University, 2010. (in Chinese)
- [10] 李波, 何启志. Kopel 寡头博弈模型的演化分析 [J]. *经济数学*, 2020, 37(3): 9–15.
LI B, HE Q Z. Dynamic analysis of Kopel duopoly model [J]. *Journal of Quantitative Economics*, 2020, 37(3): 9–15. (in Chinese)
- [11] GAO Y, LIU B, FENG W. Bifurcations and chaos in a nonlinear discrete time cournot duopoly game [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2014, 30(4): 951–964.
- [12] BISCHI G I, KOPEL M. Equilibrium selection in a nonlinear duopoly game with adaptive expectations [J]. *Journal of Economic Behavior & Organization*, 2001, 46(1): 73–100.
- [13] GAO X, ZHONG W, MEI S. Equilibrium stability of a nonlinear heterogeneous duopoly game with extrapolative foresight [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2012, 82(11): 2069–2078.
- [14] ZHANG Y, GAO X. Equilibrium selection of a homogenous duopoly with extrapolative foresight [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 67: 366–374.
- [15] LI B, HE Q, CHEN R. Neimark - Sacker bifurcation and the generate cases of Kopel oligopoly model with different adjustment speed [J]. *Advances in Difference Equations*, 2020, 2020(1): 1–18.
- [16] CÁNOVAS J S, MUNOZ-GUILLERMO M. On the dynamics of Kopel's cournot duopoly model [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 330: 292–306.
- [17] 姜小霞. 一类经济模型的分岔分析 [D]. 北京:北京交通大学, 2008.
JIANG X X. The analysis of bifurcation of an economic model [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
- [18] 辛宝贵, 马军海. 一个不完全信息古诺博弈动力学

- 模型的构建 [J]. 统计与决策, 2009, (8): 32—33.
- XIN B G, MA J H. Construction of a dynamic model of cournot game with incomplete information [J]. Statistics & Decision, 2009, (8): 32—33. (in Chinese)
- [19] MURAKAMI K. The invariant curve caused by Neimark-Sacker bifurcation [J]. Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series A, 2002, 9: 121—132.
- [20] YUAN L G, YANG Q G. Bifurcation, invariant curve and hybrid control in a discrete-time predator-prey system [J]. Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(8): 2345—2362.
- [21] KHYAT T, KULENOVIC M R S, PILAV E. The invariant curve caused by Neimark-Sacker bifurcation of a perturbed Beverton-Holt difference equation [J]. International Journal of Difference Equations, 2017, 12(2): 267—280.
- [22] MURAKAMI K. Stability and bifurcation in a discrete-time predator-prey model [J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2007, 13(10): 911—925.
- [23] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2004.
- [24] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1983:453.
- [25] 杜文举, 张建刚, 俞建宁, 等. 三维离散类 Lorenz 系统的 Neimark-sacker 分岔 [J]. 四川大学学报, 2015, 52(6): 1297—1302.
- DU W J, ZHANG J G, YU J N, et al. An analysis of Neimark-sacker bifurcation for a new three-dimensional discrete Lorenz-like system [J]. Journal of Sichuan University, 2015, 52 (6): 1297—1302. (in Chinese)
- [26] 陈志强, 王进良, 李由. 二维离散 Duffing-Holmes 系统的分支与混沌研究 [J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(4): 324—329.
- CHEN Z Q, WANG J L, LI Y. Analysis on bifurcation and chaos of two-dimensional discrete Duffing-Holmes system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(4): 324—329. (in Chinese)
- [27] 陈苏, 袁少良, 周慧. 二维离散抛物映射的分支 [J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(2): 97—103.
- CHEN S, YUAN S L, ZHOU H. Bifurcation of a 2-D discrete parabolic map [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(2): 97—103. (in Chinese)