第 20 卷第 4 期
2022 年 8 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 20 No. 4
Aug. 2022

文章编号:1672-6553-2022-20(4)-024-08

DOI:10.6052/1672-6553-2022-008

# 时滞系统重根附近 Puiseux 级数计算中的矛盾现象*

黄丽芹　王在华†

(陆军工程大学 基础部,南京　211101)

**摘要**　Puiseux 级数是研究时滞系统在重特征根附近动力学的一种数学工具,近年来已成为国内外一个研究热点. 本文发现,在某些情况下,利用待定系数法求时滞系统的 Puiseux 级数时会出现矛盾现象,进而给出了产生矛盾的原因和正确应用待定系数法的思路,以及一定条件下的 Puiseux 级数范式.

**关键词**　时滞系统,　重特征根,　Puiseux 级数,　矛盾现象

**中图分类号**:O317;O173　　**文献标志码**:A

## 引言

时滞系统广泛存在于工程技术领域,稳定性是动力学分析与控制设计中的基本问题. 例如,倒立摆作为人体直立姿态平衡的动力学模型是本质不稳定的,必须施加恰当的控制使其稳定在给定的平衡态,当反馈控制环节存在时滞时,就需要研究反馈时滞对倒立摆控制系统平衡点的稳定性. 时滞系统平衡点的(局部)渐近稳定性可由其线性化系统的零解渐近稳定性所确定. 当线性化系统的特征根皆具有负实部时,该系统的平衡点是局部渐近稳定的. 由于时滞系统是无穷维系统,有无穷多个特征根,因而时滞系统的稳定性分析是一个不平凡的问题[1,2].

时滞常常导致系统性能变差,甚至失稳. 例如,老年人随着年龄增加,可出现大脑神经、肌肉神经的反应滞后,从而容易导致摔倒. 因此,时滞常被视为不利因素. 但人们也可以主动利用时滞,使得时滞有利于控制系统的稳定性. 例如,对质量-弹簧-阻尼振动系统施加时滞位移正反馈控制,在一定时滞范围内增加时滞量,可改善系统稳定性,时滞越大,稳定性越好[3]. 因此,在时滞系统稳定性分析中,有必要确定在什么条件下,时滞增加使得稳定性变差,在什么条件下,时滞增加可改善系统的稳定性.

本文仅考察滞后型线性时滞系统,其微分方程可表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,$\tau > 0$ 为时滞. 令 $\boldsymbol{x} = \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{c}$ 为方程(1)的非零解,则常数 $\lambda$ 必满足关于 $\boldsymbol{c}$ 的齐次线性方程组 $\mathrm{e}^{\lambda t}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\boldsymbol{B})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$,它有非零解,从而系数行列式必为零,即

$$|\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}\boldsymbol{B}| = 0 \tag{2}$$

方程(2)称为时滞微分方程(1)的特征方程,其左端函数称为特征函数,记为 $f(\lambda)$,它的零点称为特征根. 时滞微分方程(1)的零解渐近稳定当且仅当其特征方程(2)的所有根都具有负实部. 记 $\Re(\lambda)$ 为复数 $\lambda$ 的实部,$\sigma$ 为最大实部特征根的实部,即

$$\sigma = \max_{\lambda\in\mathbb{C}}\{\Re(\lambda): f(\lambda) = 0\} \tag{3}$$

那么,方程(1)的零解渐近稳定当且仅当 $\sigma < 0$. 当 $\sigma < 0$ 时,在相同初始条件下,$\sigma$ 越小,时滞系统的非零解收敛到零解的速度越快. 因此,对取值连续依赖 $\tau$ 的函数 $\sigma = \sigma(\tau)$,需要确定 $\sigma = \sigma(\tau)$

2021-10-24 收到第 1 稿,2021-11-30 收到修改稿.

*国家自然科学基金资助项目(12072370)

† 通信作者 E-mail:zhwangnj@163.com

在什么情况下递减,在什么情况下递增,在哪些点取极小值或最小值.

为了突出时滞的作用,以下将特征函数 $f(\lambda)$ 改记为 $f(\lambda,\tau)$. 如果存在 $\tau_0>0$ 和实数或复数 $\lambda_0$ 以及正整数 $m(\geqslant 2)$ 使得

$$f(\lambda_0,\tau_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial\lambda}(\lambda_0,\tau_0)=0,$$
$$\cdots,\frac{\partial^{m-1}f}{\partial\lambda^{m-1}}(\lambda_0,\tau_0)=0,\ \frac{\partial^{m}f}{\partial\lambda^{m}}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0 \tag{4}$$

则称 $\lambda_0$ 是一个 $m$ 重特征根. 最近的研究工作表明,可利用参数延拓法得到 $\sigma=\sigma(\tau)$ 随时滞变化的曲线,当 $\sigma=\sigma(\tau)$ 在给定区间内某点 $\tau_0$ 取最小值时,最大实部特征根 $\lambda_0=\sigma(\tau_0)$ 是实数,且为重根. 在 $\tau_0$ 附近,$m$ 重特征根有 $m$ 个不同的特征根分支,皆满足 $\lambda(\tau_0)=\lambda_0$. 由隐函数存在定理可知,此时重特征根 $\lambda$ 不可能展开为 $\tau-\tau_0$ 的 Taylor 级数,而需要利用 Puiseux 级数,$m$ 重特征根正好有 $m$ 个 Puiseux 级数分别表示 $m$ 个特征根分支.

Puiseux 级数是 Taylor 级数的推广. 一般地,将一个函数 $g(x)$ 展开为 $x=x_0$ 处的 Puiseux 级数,就是要寻找 $\xi$ 和系数 $c_0,c_1,c_2,\cdots$,使得如下等式成立

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\,(x-x_0)^{k\xi} \tag{5}$$

当 $\xi=1$ 时,Puiseux 级数退化为 Taylor 级数,各系数 $c_k$ 与导数有关系式 $c_k=g^{(k)}(x_0)/k!$. Puiseux 级数中的 $\xi$ 通常是分数,因而又被称为分数幂级数,没有类似 Taylor 级数情形的简单公式来计算各系数,待定系数法是常用计算方法. 利用数学通用软件 Maple 的集成命令,可完成 Puiseux 级数的常规计算.

采用 Puiseux 级数求时滞系统 $m$ 重特征根的各个分支时,首先将特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 近似表示为 $(\lambda_0,\tau_0)$ 处的某个阶次的 Taylor 展开式,得到一个多项式方程,再将 Puiseux 级数展开式代入此多项式方程,比较同次幂系数,即可依次求得各系数 $c_k$. 利用 Puiseux 级数,便可确定在一定条件下,$\sigma=\sigma(\tau_0)$ 在给定的时滞范围内取最小值[4]. 实际上,Puiseux 级数在多项式方程和时滞系统稳定性分析中已有许多应用[5]. 例如,Lloyd 讨论了机械臂运动学的代数结构,运用 Puiseux 级数展开,证实了非冗余串行机器人的平滑空间路径总是可以在具有有限重根运动奇点附近平滑地重新参数化[6];冯二宝在其博士论文中详细讨论了具有有限精度或者数据受到小扰动情况下多项式方程组的交点、拐点、奇异点的数值计算方法,其中包括 Puiseux 级数展开的数值算法[7];Chen 等人提出用 Puiseux 级数研究时滞系统特征根在临界虚根附近的渐近行为[8];Li 等人利用 Puiseux 级数提出一种新的扫频方法研究时滞系统的稳定性[9];蔡迢阳在其博士论文中研究线性时不变含比例时滞系统中多重纯虚特征根的渐近行为对稳定性的影响时,利用不同根轨迹的 Puiseux 级数展开[10]来进行稳定性分析[11]. 有关 Puiseux 级数的进一步介绍与应用可参考文献[12].

由于 Puiseux 级数在标准的数学课程中没有介绍,因而不被广大科技工作者所熟悉,在实际应用中可能造成误解或误用. 本文首先指出,在时滞系统重特征根分析中,如果将式(5)中的 $\xi$ 也当作待定常数,则有可能得到相互矛盾的结论而无法求得重特征根的 Puiseux 级数中的系数. 进而解释了矛盾现象的原因. 最后讨论如何正确运用待定系数法求得 Puiseux 级数.

## 1　求多项式方程在重根附近的 Puiseux 级数的待定系数法

Puiseux 级数的作用是确定由多项式方程确定的隐函数在重根附近的近似显式函数关系. 以二元多项式为例,假设多项式方程为

$$A_0(x)y^n+A_1(x)y^{n-1}+A_2(x)y^{n-2}+\cdots+A_{n-1}(x)y^1+A_n(x)y^0=0 \tag{6}$$

其中各系数 $A_i(x)$ 都是 $x$ 的多项式,最低次方为 $u_i$,即 $A_i(x)=\alpha_i x^{u_i}+\mathrm{h.o.t}$,其中 h. o. t 表示关于 $x$ 的高次项. 假设由此确定的函数在 $x=x_0:=0$ 处有一个重根 $y=y_0:=0$,那么在 $x=x_0$ 附近,Puiseux 级数的每一个分支具有形式

$$y=c_1x^{\xi}+c_2x^{2\xi}+c_3x^{3\xi}+c_4x^{4\xi}+\mathrm{h.o.t} \tag{7}$$

在重根的一个小邻域附近,可假设 $x$ 的绝对值是小量,次数越高的项对上式左端数值的影响越小. 待定系数法就是要选取恰当的 $\xi$ 值,通过由低向高依次消去各低次项而求得各系数 $c_i$ 的值. 为此,将式(7)代入式(6)并加以整理,只保留各个最低次方

项的式(6)化为

$$\alpha_n x^{u_n+n\xi}+\cdots+\alpha_{n-1}x^{u_{n-1}+(n-1)\xi}+\cdots+\alpha_1 x^{u_1+\xi}+\cdots+\alpha_0 x^{u_0}+\cdots=0 \tag{8}$$

其中的省略号皆表示 h. o. t . 由此可知,消去最低次项就是要求最低次方 $\min\{u_n+n\xi,u_{n-1}+(n-1)\xi,\cdots,u_1+\xi,u_0\}$ 在式(8)中出现两次. 例如,对多项式方程

$$y^3+(2+3x)y^2+(4x^2)y+5x^3=0$$

其中,各系数多项式关于 $x$ 的最低次幂分别是 $u_0=0,u_1=0,u_2=2,u_3=3$. 记此多项式为 $p(x,y)$,那么 $p(0,0)=p_y(0,0)=0,p_{yy}(0,0)\neq 0$,即 $x=0$ 时有二重根 $y=0$. 为了确定 Puiseux 级数的主要项,最低次方 $\min\{0+3\xi,0+2\xi,2+\xi,3\}=\min\{2\xi,2+\xi,3\}$ 要出现两次. 在三个正数 $2\xi,2+\xi,3$ 中利用两两相等关系有:或者(i) $2\xi=2+\xi$,或者(ii) $2\xi=3$,或者(iii) $2+\xi=3$. 在情形(i),次数 $2\xi=2+\xi=4>3$ 不是最低,与消项目标不符;在情形(iii),次数 $2+\xi=3$ 高于最低次方 $2\xi=2$,与最低次方为 3 次的假设矛盾;只有在情形(ii),$2\xi=3$ 且取最小值,符合最低次数要求,由此求得 $\xi=3/2$. 进而由最低次方项(三次方项)的系数等于零,即 $2c_1^2+5=0$,求得 Puisuex 级数的首项系数 $c_1$ 的值为

$$c_1=\pm\sqrt{-\frac{5}{2}}$$

再由消去次最低次方项等还可确定其他系数 $c_2$,$c_3$,… . 这就是由多项式方程利用待定系数法求 Puiseux 级数的基本思路和步骤.

## 2 时滞系统在重根附近 Puiseux 级数系数计算中的矛盾现象及产生原因

对时滞微分方程,它的特征方程 $f(\lambda,\tau)=0$ 是含有指数函数的超越方程. 假设在 $\tau=\tau_0$ 时,特征方程有一个二重根 $\lambda=\lambda_0$,为了求得重特征根的显式表达式,需要先将特征函数在重根附近用 Taylor 展开式作近似替代. 为此,令 $L=\lambda-\lambda_0$,$T=\tau-\tau_0$,那么,在 $\tau=\tau_0$ 附近,$f(\lambda,\tau)$ 可用一个 $p(\geqslant 2)$ 阶 Taylor 展开式来代替. 在一些问题中,$p=2$ 即可. 为避免重复表述,下面取 $p=3$,则特征方程 $f(\lambda,\tau)=0$ 可化为如下近似形式

$$aL^3+bL^2T+cLT^2+dT^3+eL^2+fLT+gT^2+hT+\text{h. o. t}=0 \tag{9}$$

这里,在二重根情形下,常数项 $f(\lambda_0,\tau_0)=0$ 以及关于 $\lambda$ 的一阶导数 $f_\lambda(\lambda_0,\tau_0)=0$,而关于 $\lambda$ 的二阶导数 $f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$,从而等式(9)左边不含常数项和 $L$ 的一次方项,但一定有 $L$ 的二次方项,其系数 $e\neq 0$. 但是,沿着上一节介绍的针对多项式待定系数法求解思路,可能出现矛盾的结论而无法确定二重根附近的 Puiseux 级数的系数.

**例 1** 考虑某时滞系统的特征函数 $f(\lambda,\tau)=e^{-3\lambda\tau}-3e^{-2\lambda\tau}+3e^{-\lambda\tau}+\lambda^4+2\lambda^2$,当 $\tau_0=2\pi$ 时,$\lambda_0=\mathrm{i}$ 是一个二重根,满足条件

$$f(\mathrm{i},2\pi)=0,\ f_\lambda(\mathrm{i},2\pi)=0$$

其中 $\mathrm{i}^2=-1$. 另外,直接计算可知此特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 还满足

$$f_\tau(\mathrm{i},2\pi)=0,\ f_{\tau\tau}(\mathrm{i},2\pi)=0,\ f_{\lambda\tau}(\mathrm{i},2\pi)=0 \tag{10}$$

于是二阶 Taylor 展开式只有一个平方项,无法确定特征根与时滞的关系. 利用三阶 Taylor 展开式,重根附近的特征方程可近似表示为如下形式(按 $L$ 的升幂顺序排列)

$$(\mathrm{i}T^3)L^0+(6\pi T^2)L-(4+12\pi^2\mathrm{i}T)L^2+4(-2\pi^3+\mathrm{i})L^3+\text{h. o. t}=0 \tag{11}$$

上式各系数关于 $T$ 的最低次幂分别是 3,2,0,0. $L=\lambda-\mathrm{i},T=\tau-2\pi$. 在 $(\lambda,\tau)=(\mathrm{i},2\pi)$ 附近,假设特征根的 Puiseux 级数为

$$L=c_1T^\xi+c_2T^{2\xi}+c_3T^{3\xi}+c_4T^{4\xi}+\text{h. o. t} \tag{12}$$

将式(12)代入式(11)后化为只有 $T$ 的表达式,$0+3\xi,0+2\xi,2+\xi,3+0$ 是各项中所有可能的最低次数. 由于 $3\xi\geqslant 2\xi$,所以所有可能的最低次数是 $2\xi,2+\xi,3$. 由上一节讨论可知,此时必有 $2\xi=3$,即 $\xi=3/2$,且展开式(11)化为

$$(\mathrm{i}-4c_1^2)T^3+6\pi c_1T^{7/2}-12\mathrm{i}\pi^2c_1^2T^4+4[(\mathrm{i}-2\pi^3)c_1^3-2c_1c_2]T^{9/2}+\text{h. o. t}=0 \tag{13}$$

通过令 $-4c_1^2+\mathrm{i}=0$ 可知 $c_1\neq 0$. 但 $T^{7/2}$ 的系数 $6\pi c_1$ 只与 $c_1$ 有关,为了依次消除最低次方项的作用,必须有 $c_1=0$,否则此项的作用无法消除. 前后两个结论 $c_1\neq 0$ 与 $c_1=0$ 相互矛盾.

这表明,采用针对多项式方程提出的求 Puiseux 级数的标准待定系数法在这里失效了,我们无法用待定系数法确定相应的时滞系统的重特征根的 Puiseux 级数展开式(12)的高次项.

上述求解过程失效的根本原因是忽略了该特征函数由于满足式(10)而具有的固有特点,即

$$h = f_\tau(\mathrm{i},2\pi) = 0,\ g = f_{\tau\tau}(\mathrm{i},2\pi)/2! = 0,\ f = f_{\lambda\tau}(\mathrm{i},2\pi) = 0$$

也就是说,Taylor 展开式(11)中不显含 $T,T^2,LT$ 的系项. 由下列引理 1 可知,具有这几个特点的时滞系统都会出现这样的矛盾现象.

**引理 1**　设 $\tau = \tau_0$ 时,时滞系统特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 有二重根 $\lambda = \lambda_0$. 如果

$$h = f_\tau(\lambda_0,\tau_0) = 0,\ g = \frac{1}{2!}f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0,\ f = f_{\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0$$

并且

$$c = \frac{3}{3!}f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0,\ d = \frac{1}{3!}f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0$$

则沿用上述做法求 Puiseux 级数会导致错误结论.

事实上,$f(\lambda,\tau)$ 的三阶 Taylor 展开式简化为 $f(\lambda,\tau) = aL^3 + (e + bT)L^2 + cT^2L + \mathrm{d}T^3L^0 + \mathrm{h.o.t}$,其中由二重根的假设有 $e \neq 0$. 假设其 Puiseux 级数如式(12),则如前面分析的那样,必有 $\xi = 3/2$. 故

$$f(\lambda,\tau) = (ec_1^2 + \mathrm{d})T^3 + cc_1T^{7/2} + \mathrm{h.o.t}$$

于是,为了消除最低次项,就得到如下矛盾结论:

$$c_1 = \pm\sqrt{-\frac{d}{e}} \neq 0,\ c_1 = 0$$

类似地,对于二重根处更高次偏导数项等于 0,给出另一个充分条件,即为引理 2. 为说明方便,下面取 $p = 5$,则特征方程 $f(\lambda,\tau) = 0$ 可化为如下近似形式:

$$\begin{aligned}&pL^5 + qL^4T + rL^3T^2 + sL^2T^3 + tLT^4 + uT^5 +\\&AL^4 + BL^3T + DL^2T^2 + ELT^3 + FT^4 +\\&aL^3 + bL^2T + cLT^2 + dT^3 + eL^2 + fLT +\\&gT^2 + hT + \mathrm{h.o.t} = 0\end{aligned} \tag{14}$$

**引理 2**　设 $\tau = \tau_0$ 时,时滞系统特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 有二重根 $\lambda = \lambda_0$. 如果

$$h = f_\tau(\lambda_0,\tau_0) = 0, g = \frac{1}{2!}f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0, f = f_{\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0, d = \frac{1}{3!}f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0,\ c = \frac{3}{3!}f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0,\ F = \frac{1}{4!}f_{\tau^4}(\lambda_0,\tau_0) = 0,$$

且

$$E = \frac{4}{4!}f_{\lambda\tau^3}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0, u = \frac{1}{5!}f_{\tau^5}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0$$

则沿用上述做法求 Puiseux 级数会导致错误的结论.

事实上,此时特征函数的五阶 Taylor 展开式简化为

$$\begin{aligned}f(\lambda,\tau) = &(a + BT + rT^2)L^3 +\\&(e + bT + DT^2 + sT^3)L^2 + (ET^3 + tT^4)L +\\&uT^5L^0 + \mathrm{h.o.t}\end{aligned} \tag{15}$$

其中各系数关于 $T$ 的最低次幂分别是 0,0,3,5. 利用待定系数法,将式(12)代入式(15)后化为只有 $T$ 的表达式,$0 + 3\xi, 0 + 2\xi, 3 + \xi, 5 + 0$ 是各项中可能的最低次数. 由于 $3\xi \geqslant 2\xi$,所以可能的最低次数是 $2\xi, 3 + \xi, 5$. 由上一节类似讨论可知,此时必有 $2\xi = 5$,即 $\xi = 5/2$,且展开式(15)化为

$$f(\lambda,\tau) = (ec_1^2 + u)T^5 + Ec_1T^{11/2} + \mathrm{h.o.t}$$

于是,为了消除最低次项,就得到如下矛盾结论:

$$c_1 = \pm\sqrt{-\frac{u}{e}} \neq 0,\ c_1 = 0$$

实际上,上述矛盾现象在时滞系统重特征根的 Puiseux 级数计算中普遍存在. 只要 $f(\lambda,\tau)$ 关于 $\tau$ 的某阶导数在重根处等于零,则在用待定系数法直接由显式 Taylor 展开式求 Puiseux 级数的近似表达式时,就容易忽视 $T$ 的某些整数次方项系数等于零的事实,从而出现与上述情况类似的矛盾现象.

**例 2**　设特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 在 $\tau_0$ 处有三重根 $\lambda_0$,即 $f_\lambda(\lambda_0,\tau_0) = f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0) = 0, f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0$,且部分偏导数的值满足下面的条件:

$$f_\tau(\lambda_0,\tau_0) = 0,\ f_{\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0) = 0$$

以及

$$f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0, f_{\lambda\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0) \neq 0$$

也就是 $e = 0, f = 0, h = 0, a \neq 0, g \neq 0, b \neq 0$,则对于上述类型的的特征函数,按照例 1 中确定 Puiseux 级数最低次方项的做法会导致矛盾结论.

事实上,此时在重根处的三阶 Taylor 展开式可化为

$$\begin{aligned}f(\lambda,\tau) = &aL^3 + (bT)L^2 + (cT^2)L +\\&(gT^2 + dT^3)L^0 + \mathrm{h.o.t}\end{aligned} \tag{16}$$

按照 $L$ 降幂排列,各系数关于 $T$ 的最低次幂分别是 0,1,2,2. 利用待定系数法,假设三重特征根 $\lambda_0$ 在 $\tau_0$ 附近的 Puiseux 级数仍然为式(12),将式(12)代入式(16),最低次幂可能的次数为 $0 + 3\xi, 1 + 2\xi, 2 + \xi, 2$. 经过比较可知,为了消去最低次方项中的两项,只可能是 $3\xi = 2$,即 $\xi = 2/3$,此时

$$f(\lambda,\tau)=(g+ac_1^3)T^2+bc_1^2T^{7/3}+\mathrm{h.o.t}$$

令其中的系数等于零即可得到矛盾结论：

$$c_1=\sqrt[3]{-\frac{g}{a}}\neq 0,\ c_1=\sqrt[3]{-\frac{g}{a}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\neq 0;$$

$$c_1=0$$

类似地，对于三重根处更高次偏导数项等于0，给出另一个充分条件，即为引理3.

**引理 3** 设 $\tau=\tau_0$ 时，时滞系统特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 有三重根 $\lambda=\lambda_0$. 如果

$$f_\tau(\lambda_0,\tau_0)=f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)=0,$$

$$f_{\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\lambda\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0)=0$$

且

$$f_{\tau\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0,\ f_{\lambda\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$$

也就是 $e=0,f=0,c=0,b=0,h=0,g=0,d=0,a\neq 0,F\neq 0,E\neq 0$，则对于上述类型的的特征函数，按照例2中确定 Puiseux 级数最低次方项的做法会导致矛盾结论.

这是因为，此时在重根处的五阶 Taylor 展开式可化为

$$\begin{aligned}f(\lambda,\tau)=&(a+BT+rT^2)L^3+\\&(DT^2+sT^3)L^2+(ET^3+tT^4)L+\\&(FT^4+uT^5)L^0+\mathrm{h.o.t}\end{aligned}\tag{17}$$

按照 $L$ 降幂排列，各系数关于 $T$ 的最低次幂分别是 $0,2,3,4$. 利用待定系数法，假设三重特征根 $\lambda_0$ 在 $\tau_0$ 附近的 Puiseux 级数仍然为式(12)，将式(12)代入式(17)，最低次幂只可能是次数为 $0+3\xi,2+2\xi,3+\xi,4$. 经过比较分析可知，为了消去最低次方项中的两项，和前面的分析类似，为了消去最低次方项中的两项，只可能是 $3\xi=4$，即 $\xi=4/3$，此时

$$f(\lambda,\tau)=(F+ac_1^3)T^4+Ec_1T^{13/3}+\mathrm{h.o.t}$$

令其中的系数等于零即可得到矛盾结论：

$$c_1=\sqrt[3]{-\frac{F}{a}}\neq 0,c_1=\sqrt[3]{-\frac{F}{a}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\neq 0;$$

$$c_1=0$$

**定理 1** 设有不可约正整数 $n>1$ 和 $m>1$，使得在 $\tau_0$ 处，时滞方程有 $m$ 重特征根 $\lambda_0$，满足条件

$$\begin{aligned}f_\lambda(\lambda_0,\tau_0)&=f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)=\cdots\\&=f_{\lambda^{m-1}}(\lambda_0,\tau_0)=0,\ f_{\lambda^m}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_\tau(\lambda_0,\tau_0)&=f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)=\cdots\\&=f_{\tau^{n-1}}(\lambda_0,\tau_0)=0,\ f_{\tau^n}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0\end{aligned}$$

其中 $f_{\tau^{n-1}}(\lambda_0,\tau_0),f_{\tau^n}(\lambda_0,\tau_0)$ 分别表示对 $\tau$ 的 $n-1$ 阶偏导数与 $n$ 阶偏导数. 如果存在正整数 $u,p,v,q$ 满足 $1\leqslant u\leqslant m,1\leqslant p\leqslant n,v<u$ 使得

$$\begin{aligned}f_{\lambda^u\tau}(\lambda_0,\tau_0)&=f_{\lambda^u\tau^2}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\lambda^u\tau^3}(\lambda_0,\tau_0)=\cdots\\&=f_{\lambda^u\tau^{p-1}}(\lambda_0,\tau_0)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{\lambda\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)&=f_{\lambda^2\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)=f_{\lambda^3\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)=\cdots\\&=f_{\lambda^{u-1}\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)=0,\end{aligned}$$

且满足不等式 $(u-v)n+(p+q)m<pm+un$ 的项

$$f_{\lambda^{u-v}\tau^{p+q}}(\lambda_0,\tau_0)=0,\ f_{\lambda^u\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$$

其中 $pm+un=mn+1$，则沿用前面的方法确定 Puiseux 级数最低次方项的做法会导致矛盾结论.

事实上，$f(\lambda,\tau)$ 的 $m$ 阶 Taylor 展开式按 $L$ 的降序排列可记为

$$\begin{aligned}f(\lambda,\tau)=&A_0(T)L^m+A_1(T)L^{m-1}+\\&A_2(T)L^{m-2}+\cdots+A_{m-1}(T)L+A_m(T)L^0+\\&\mathrm{h.o.t}\end{aligned}$$

由假设条件，在 $L^m$ 的系数 $A_0(T)$ 中，最低次方项系数为 $\alpha=\frac{1}{m!}f_{\lambda^m}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$，在 $L^0$ 的系数 $A_m(T)$ 中，最低次方项系数为 $\beta=\frac{1}{n!}f_{\tau^n}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$，故 $f(\lambda,\tau)$ 的 $m$ 阶 Taylor 展开式具有形式

$$\begin{aligned}f(\lambda,\tau)=&(\alpha+\cdots)L^m+\cdots+\\&\left[\frac{C_{u+1}^{u}}{(u+1)!}f_{\lambda^u\tau}(\lambda_0,\tau_0)T+\cdots+\right.\\&\left.\frac{C_{u+p}^{u}}{(u+p)!}f_{\lambda^u\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)T^p+\cdots\right]L^u+\\&\left[\frac{C_u^{u-1}}{u!}f_{\lambda^{u-1}\tau}(\lambda_0,\tau_0)T+\cdots+\right.\\&\frac{C_{u-1+p}^{u-1}}{(u-1+p)!}f_{\lambda^{u-1}\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)T^p+\\&\left.\frac{C_{u+p}^{u-1}}{(u+p)!}f_{\lambda^{u-1}\tau^{p+1}}(\lambda_0,\tau_0)T^{p+1}+\cdots\right]L^{u-1}+\cdots\\&+\left[\frac{C_{u-v+p+q}^{u-v}}{(u-v+p+q)!}f_{\lambda^{u-v}\tau^{p+q}}(\lambda_0,\tau_0)T^{p+q}+\right.\\&\frac{C_{u-v+p+q+1}^{u-v}}{(u-v+p+q+1)!}f_{\lambda^{u-v}\tau^{p+q+1}}(\lambda_0,\tau_0)\\&\left.T^{p+q+1}+\cdots\right]L^{u-v}+\cdots+(\beta T^n+\cdots)L^0+\\&\mathrm{h.o.t}\end{aligned}$$

其中括号内的省略号表示关于 $T$ 的高次方项，且省略号中关于 $T$ 的次数至少是一次. 上式中为了消

去最低次方项中的两项,只可能是 $m\xi = n$ ,故 $\xi = n/m$ . 又由上述定理条件知 $f(\lambda,\tau)$ 可化简为

$$(\alpha+\cdots)L^m+\cdots+[\frac{C_{u+p}^u}{(u+p)!}f_{\lambda^u\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)T^p+\cdots]L^u+[\frac{C_{u-v+p+q+1}^{u-v}}{(u-v+p+q+1)!}f_{\lambda^{u-v}\tau^{p+q+1}}(\lambda_0,\tau_0)T^{p+q+1}+\cdots]L^{u-v}+\cdots+(\beta T^n+\cdots)L^0+\text{h.o.t}$$

由上式可知,混合偏导数项最低次为含有系数 $f_{\lambda^u\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)$ 的项,此时

$$f(\lambda,\tau)=(\beta+\alpha c_1^m)T^n+\gamma c_1^u T^{(mn+1)/m}+\text{h.o.t}$$

其中 $\gamma=\dfrac{C_{u+p}^u}{(u+p)!}f_{\lambda^u\tau^p}(\lambda_0,\tau_0)\neq 0$ . 令上式中前两项的系数同时等于零即可得到矛盾结论.

## 3　待定系数法的正确应用

为了避免上一节讨论的矛盾现象,在求重根附近的 Puiseux 级数时,需要保留除了重根条件之外的其余所有偏导数对应的项. 例如,设在 $\tau=\tau_0$ 处有二重根 $\lambda=\lambda_0$ ,如果利用特征函数 $f(\lambda,\tau)$ 在 $(\lambda_0,\tau_0)$ 处的三阶 Taylor 展开式来近似替代 $f(\lambda,\tau)$ . 将二重根时的三阶 Taylor 展开式(9)按 $L$ 升幂排列表示为

$$(dT^3+gT^2+hT)L^0+(fT+cT^2)L+(e+bT)L^2+aL^3+\text{h.o.t}=0 \tag{18}$$

假设 Puiseux 级数为

$$L=c_1T^{\xi}+c_2T^{2\xi}+c_3T^{3\xi}+c_4T^{4\xi}+c_5T^{5\xi}+c_6T^{6\xi}+\text{h.o.t} \tag{19}$$

那么,式(18)可变为

$$(hT+\cdots)+(fc_1T^{1+\xi}+\cdots)+(ec_1^2T^{2\xi}+\cdots)+ac_1^3T^{3\xi}+\cdots=0$$

为了消去最低次方项,选择 $\xi$ 使得 $\min(1,1+\xi,2\xi,3\xi)=\min(1,2\xi)$ 出现两次,从而有 $2\xi=1$ ,即 $\xi=1/2$ . 依次消去最低次方项 $T,T^{3/2},T^2,T^{5/2}$ 可得

$$\begin{cases}ec_1^2+h=0\\(ac_1^2+ec_2f)c_1=0\\3ac_1^2c_2+bc_1^2+2ec_1c_3+ec_2^2+fc_2+g=0\\3ac_1^2c_4+6ac_1c_2c_3+ac_2^3+2bc_1c_3+bc_2^2+2ec_2c_4+ec_3^2+cc_2+fc_4+d=0\\6ac_1c_2c_4+3ac_1c_3^2+3ac_2^2c_3+2bc_1c_4+2bc_2c_3+2ec_3c_4+cc_3=0\end{cases} \tag{20}$$

由于 $e\neq 0$ ,所以由第一个等式可求得

$$c_1=\pm\sqrt{-\frac{h}{e}}$$

进而依次求得其他各系数.

对例 1 有 $h=f_\tau(\mathrm{i},2\pi)=0$, $g=f_{\tau\tau}(\mathrm{i},2\pi)/2!=0$, $f=f_{\lambda\tau}(\mathrm{i},2\pi)=0$ ,从而 $c_1=0$ . 代入式(20)中的第三个等式得到 $ec_2^2+fc_2+g=0$ ,故有 $c_2=0$ . 再由式(20)中的第四个等式可得 $ec_3^2+d=0$ ,由此求得

$$c_3=\pm\sqrt{-\frac{d}{e}}=\pm\sqrt{-\frac{\frac{C_3^3}{3!}f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{\frac{C_2^0}{2!}f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}=\pm\sqrt{-\frac{f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{3f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}$$

再由式(20)的第五个等式得到 $2ec_3c_4+cc_3=0$ . 由于 $c_3\neq 0$ ,所以

$$c_4=-\frac{c}{2e}=-\frac{\frac{C_3^2}{3!}f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2\times\frac{C_2^0}{2!}f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}=-\frac{f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}$$

从而 Puiseux 级数的范式为

$$L=c_3T^{\frac{3}{2}}+c_4T^2+\text{h.o.t}=\pm\sqrt{-\frac{f_{\tau\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{3f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}T^{\frac{3}{2}}-\frac{f_{\lambda\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}T^2+\text{h.o.t} \tag{21}$$

这样,上述矛盾现象得以避免. 但要注意的是,式(21)第二项是 $T^2$ 项,不是 $T^{2(3/2)}=T^3$ 项.

对于二重根的另一个充分条件引理 2,类似于例 1 的讨论得到 Puiseux 级数的范式为

$$L=c_5T^{\frac{5}{2}}+c_6T^3+\text{h.o.t}=\pm\sqrt{-\frac{2!f_{\tau^5}(\lambda_0,\tau_0)}{5!f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}T^{\frac{5}{2}}-$$

$$\frac{f_{\lambda\tau^3}(\lambda_0,\tau_0)}{3!f_{\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}T^3+\text{h.o.t}$$

当 $\lambda_0$ 是三重根时,类似于前面的做法,将三重根时的三阶 Taylor 展开式(9)按 $L$ 升幂排列表示为

$$\begin{aligned}&(dT^3+gT^2+hT)L^0+(fT+cT^2)L+\\&bTL^2+aL^3+\text{h.o.t}=0\end{aligned}\tag{22}$$

将式(19)代入式(22)可变为

$$(hT+\cdots)+(fc_1T^{1+\xi}+\cdots)+(bc_1^2T^{2\xi+1}+\cdots)+ac_1^3T^{3\xi}+\cdots=0$$

为了消去最低次方项,选择 $\xi$ 使得最小值 $\min(1,1+\xi,2\xi+1,3\xi)=\min(1,3\xi)$ 出现两次,从而有 $3\xi=1$,即 $\xi=1/3$. 对例2有 $e=0,f=0,h=0$, $a\neq0,g\neq0$,消去最低次方项 $T$ 的系数 $ac_1^3=0$,从而 $c_1=0$,再依次消去后面的低次方项 $T^2,T^{7/3}$,可得

$$\begin{cases}g+ac_2^3=0\\3ac_2^2c_3+bc_2^2=0\end{cases}\tag{23}$$

由方程组(23)得到

$$c_2=\sqrt[3]{-\frac{g}{a}},\sqrt[3]{-\frac{g}{a}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}},\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$$

$$c_3=-\frac{b}{3a}=-\frac{f_{\lambda\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}$$

即得 Puiseux 级数的范式为

$$L=c_2T^{\frac{2}{3}}+c_3T+\text{h.o.t}=\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}T^{\frac{2}{3}}-\frac{f_{\lambda\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}T+\text{h.o.t}$$

或

$$L=c_2T^{\frac{2}{3}}+c_3T+\text{h.o.t}=\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{2!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)T^{\frac{2}{3}}-\frac{f_{\lambda\lambda\tau}(\lambda_0,\tau_0)}{f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}T+\text{h.o.t}$$

对于三重根的另一个充分条件引理3,可以类似例2的讨论得到 Puiseux 级数的范式为

$$L=c_4T^{\frac{4}{3}}+c_5T^{\frac{5}{3}}+\text{h.o.t}=\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau^4}(\lambda_0,\tau_0)}{4!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}T^{\frac{4}{3}}+\text{h.o.t}$$

或

$$L=c_4T^{\frac{4}{3}}+c_5T^{\frac{5}{3}}+\text{h.o.t}=\sqrt[3]{-\frac{3!f_{\tau^4}(\lambda_0,\tau_0)}{4!f_{\lambda\lambda\lambda}(\lambda_0,\tau_0)}}\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)T^{\frac{4}{3}}+\text{h.o.t}$$

一般地,对由时滞系统的特征方程定义的隐函数,在求 $m$ 重根附近特征根各个分支的 Puiseux 级数表达式时,如果不限定最低次方项不等于零,可直接将 Puiseux 展开式各指数幂中的 $\xi$ 取为 $\xi=1/m$. 对于这个问题更详细的介绍与讨论可参考文献[12].

## 4 结论

特征根依赖参数的显式表达式对时滞动力系统的稳定性分析具有重要作用,在重根处附近,可采用 Puiseux 级数展开求得特征根的近似表达式. 和由多项式直接求重根附近的 Puiseux 级数不同,时滞系统的特征函数是含指数函数的超越函数,需要先将特征函数展开为重根附近的 Taylor 级数形式,再由 Taylor 展开式利用待定系数法求 Puiseux 级数. 本文的价值是发现了利用待定系数法求时滞系统 Puiseux 级数展开式时出现的矛盾现象,并给出了产生矛盾的原因以及充分条件,最后归纳出满足一定条件的 Puiseux 级数展开式的范式,为进一步应用提供理论支持.

## 参考文献

1 Pekar L, Gao Q B. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results. *IEEE ACESS*, 2018, 6: 35457 ~ 35491

2 张冬梅, 俞立. 线性时滞系统稳定性分析综述. 控制与决策, 2008, 8: 841 ~ 849 (Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems. *Control and Decision*, 2008, 8: 841 ~ 849 (in Chinese))

3 王在华, 李俊余. 时滞状态正反馈在振动控制中的新特征. 力学学报, 2010, 42(5): 933 ~ 942 (Wang Z H, Li J Y. New features of time-delayed positive feedbacks in vibration control. *Chinese Journal of Theoretical and*

*Applied Mechanics*, 2010, 42(5): 933 ~ 942 (in Chinese))

4 Wang Z H. Criteria for minimization of spectral abscissa of time-delay systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(7): 969 ~ 980

5 李旭光, 张颖伟, 冯琳. 时滞系统的完全稳定性研究综述. 控制与决策, 2018, 33(7):1153 ~ 1170 (Li X G, Zhang Y W, Feng L. Survey on complete stability study for time-delay systems. *Control and Decision*, 2018, 33(7):1153 ~ 1170(in Chinese))

6 Lloyd J E. Desingularization of nonredundant serial manipulator trajectories using Puiseux series. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1998, 14(4): 590 ~ 600

7 冯二宝. 代数曲线基本理论数值化研究[博士学位论文]. 大连:大连理工大学, 2014 (Fen E B. Numericalization research on basic theories of algebraic curves [Ph. D Thesis]. Dalian:Dalian University of Technology, 2014 (in Chinese))

8 Chen J, Fu P L, Niculescu S I, et al. An eigenvalue perturbation approach to stability analysis, Part Ⅱ: When will zeros of time-delay systems cross imaginary axis?. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 2010, 48(8):5583 ~ 5605

9 Li X G, Niculescu S I, Çela A, et al. A frequency-sweeping framework for stability analysis of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(8):3701 ~ 3716

10 Li X G, Niculescu S I, Çela A, et al. On computing Puiseux series for multiple imaginary characteristic roots of LTI delay systems with commensurate delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5):1338 ~ 1343

11 蔡迢阳. 基于 τ 分解方法的几类时滞系统稳定性分析[博士学位论文]. 沈阳:东北大学, 2014 (Cai T Y. Stability analysis of several classes of time delay systems based on the τ decomposition method [Ph. D Thesis]. Shenyang:Northeastern University, 2014 (in Chinese))

12 Li X G, Niculescu S I, Çela A. Analytic curve frequency-sweeping stability tests for systems with commensurate delays. London:Springer, 2015

# CONTRADICTIONS IN CALCULATING THE PUISEUX SERIES EXPANSION OF TIME-DELAY SYSTEMS NEAR A REPEATED CHARACTERISTIC ROOT *

Huang Liqin Wang Zaihua†

(*Department of Basic Courses*, *Army Engineering University of PLA*, *Nanjing* 211101, *China*)

**Abstract** Puiseux series is a mathematical tool for dynamics analysis of time-delay systems near a repeated characteristic root, and it has became a hot research topic in the recent years. This paper presents a new observation that under certain conditions, contradictions occur in calculating the Puiseux series expansion of time-delay systems when the method of undetermined coefficients is used, the reason that leads to contradictions, as well as some normal forms of the correct Puiseux series expansion under some specified conditions, are given.

**Key words** time-delay systems, repeated characteristic root, Puiseux series, contradiction

Received 24 October 2021, revised 30 November 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (12072370)

† Corresponding author E-mail: zhwangnj@163.com