

基于 Hamel 形式的柔性集群编队围捕*

张祺 黄彬 史东华[†]

(北京理工大学 数学与统计学院,北京 100081)

摘要 利用弹性体作为虚拟结构建立的集群控制可以实现编队的大规模形变,同时自然满足避碰避撞需求. 通过将集群编队嵌入到几何精确梁中,利用在李代数中对流应变的插值及对编队的虚拟弹性势能的塑形来快速实现编队变换. 在场论 Hamel 形式框架下,建立了集群柔性编队围捕的算法. 其能精确反映集群中个体的位姿以利于工程实现,同时具有坐标选取无关性适于刻画集群大范围运动. 所得算法具有分布式特征,可并行实现从而满足实时控制的需要. 通过模拟仿真验证了所得算法在实际场景中的适用性和有效性.

关键词 集群控制, 柔性编队, Hamel 形式, 集群围捕

中图分类号:O313.7

文献标志码:A

引言

在过去二十年中,集群控制逐渐成为诸多领域研究热点. 与传统的集中式控制系统相比,集群控制系统具有灵活的可扩展性、对个体数量的变化适应性强、运行成本低而不增加整个系统的复杂性等优点. 简单个体之间的协同合作可以提升群体的智能化程度,而得以胜任很多单个体无法完成的工作,往往能带来更加优秀的表现^[1]. 因此,集群系统不仅在理论层面得到了控制学界的关注,而且在特定的场景与任务下得到了广泛的应用. 例如在军事领域,为克服个体作战能力的不足,需要用大量个体通过编队协作,实现复杂的军事任务. 其应用包括无人机群战场侦察^[2]、无人作战集群(UUVs, AUVs)围捕目标^[3,4]等. 在航天领域,通过航天器集群协同去降低任务成本,涌现了卫星编队任务系统^[5,6]、航天器集群深空探测^[7]等相关研究.

集群系统的应用需要实现集群的编队控制,即稳定和保持集群的几何队形,通过形成预期的队形模式完成任务. 合理、高效的编队控制能提高集群系统的性能,如对目标搜索的效率,对目标围捕的

成功率和随机环境干扰的鲁棒性等^[8].

近年来,集群系统的研究对象逐渐由一阶或高阶线性系统,过渡为更具有一般性的高维或无穷维非线性系统,对其已提出多种新颖的控制框架以达成更好的效果. 例如,为实现大规模集群有限时间的布放编队控制,Meurer 等^[9]构造一类非线性时变偏微分方程,通过改变边界条件和方程参数,使得解曲线在二维平面内运动,利用边界控制实现集群编队的运动规划和队形变换. 该方法中方程的空间离散节点对应集群系统的个体,空间离散方式对应集群通信的互联结构,可以适用于大规模集群. 其编队的稳定性直接由偏微分方程性质保证,但控制律的计算涉及复杂的级数表达式,应用中其实时性难以保证. 另一种备受关注的编队控制方法是利用连续介质力学对集群系统建立模型^[10],通过将集群中的个体视为连续体中的质点粒子,将集群的运动过程视为连续体的演化过程(含平移和形变),可以从原理上避免集群内个体间的碰撞,通过控制该连续体的运动实现集群编队控制,同时能有效处理相应的队形变换问题. 这是虚拟结构方法的推广,可以很大程度上避免其不够灵活、刚性过强的

2021-05-25 收到第1稿,2021-06-15 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11872107)

[†] 通信作者 E-mail: dshi@bit.edu.cn

弊端. 但这一方法同样具有计算量大、需要选取主个体等缺点, 依然有进一步完善的空间. Rastgoftar 等^[11]通过在主-从编队控制框架下使用齐性映射, 克服了之前连续体控制模型对通信要求过高的困难, 使得无论在固定通信拓扑还是切换通信拓扑下, 集群都能获得齐性映射所规定的期望位置.

同样, 作为工程中应用极其广泛的典型系统, Euler-Lagrange 系统的集群控制也受到学界的关注. 尤其是处理无人机编队、近地卫星集群等系统时, 系统中个体的动力学特性不能简单忽略, 只考虑线性系统建模是不够的. 为此, Nair 等^[12]考虑了较为简单的沿空间一维曲线分布刚体集群编队, 通过能量塑形为个体构造势能塑形后的 Lagrange 函数实现了刚体集群编队, 并通过航天器集群协调旋转实验表明所得控制可以实现编队同步化.

未来针对集群的研究将更加面向具备非线性动力学特征的实际集群场景和大规模集群编队. 虽然集群编队控制已有较为丰富的控制工具, 但一方面大多数方法将个体视为质点, 只考虑了其位置信息或相对位移, 在无人机编队、潜航器编队等关注姿态的应用场合, 这类方法建立的模型有局限性; 另一方面, 针对数量规模较大的集群, 虚拟结构方法和基于连续体模型的编队方法面临计算复杂度高、难以在线计算等挑战. 为解决这些问题, 我们建立了基于场论的 Hamel 形式的柔性编队控制框架. 场论 Hamel 形式^[13]是将活动标架融入变分原理, 得到的一种描述场论中运动的标准型; 柔性编队是将个体嵌入一个虚拟弹性体, 使得集群中个体自然避撞、运动平滑并保持姿态的一致性, 尤其适用于大规模集群. 本文在场论 Hamel 形式框架基础上, 研究利用柔性编队实施围捕的算法. 其余部分安排如下: 首先, 建立将集群编队嵌入几何精确梁的算法模型; 其次, 用编队平衡对流应变建立虚拟的编队弹性势能, 通过势能塑形控制, 实现编队队形的弹性变换, 藉此建立柔性集群编队围捕的控制算法; 最后, 通过模拟仿真验证围捕算法的有效性, 满足相应类型任务需求.

1 集群系统的 Hamel 形式

考虑沿空间一维曲线均匀分布的集群, 同样的方法也适用于其在空间更高维几何体均匀分布的

情形. 我们将集群个体嵌入到几何精确梁中(见图 1), 得到一类 Hamel 形式的集群编队动力学方程, 并构造编队平衡态势能来控制编队形式.

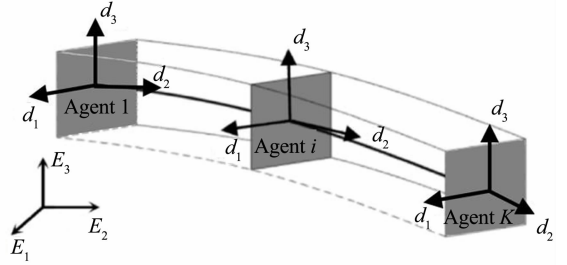


图 1 集群嵌入几何精确梁
Fig. 1 Swarm embedded in a geometrically exact beam

1.1 Hamel 形式集群系统动力学方程

选择几何精确梁作为嵌入的弹性体对象原因在于: 一方面通过其刚体截面描述集群中的个体位置与姿态, 另一方面用其弹性变形的性质可以描述并实现集群编队的大范围运动、队形变换和避撞等. 关于几何精确梁的建模和相关保结构算法详见文献[14]. 长度为 L 的几何精确梁的位形可由映射 $g: [0, L] \times \mathbb{R} \rightarrow SE(3)$ 表示, 其时空自变量分别是 s 和 t . 设集群个体 i 为位于梁沿中线 s_i 处的截面, $0 \leq s_i \leq L$, 其位姿 $g_i = g(s_i, \cdot): [0, T] \rightarrow SE(3)$ 表为

$$g_i(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_i(t) & \phi_i(t) \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, K,$$

其中, $\Lambda_i(t) \in SO(3)$ 为集群个体 i 的姿态, $\phi_i(t)$ 为集群个体 i 的位置, K 为集群中个体总数. 个体 i 的对流速度(体坐标系下的速度) ξ_i 和编队对流应变 γ_i 定义为

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_i &= g_i^{-1} \frac{d}{dt} g_i, \\ \hat{\gamma}_i &= g_i^{-1} \frac{d}{ds} \Big|_{s=s_i} g_i - \bar{\gamma}_i, \end{aligned} \quad (1)$$

这里使用了李代数 $se(3)$ 上帽子映射: $\mathbb{R}^6 \rightarrow se(3)$, 其定义为

$$(\omega, v)^\wedge = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \omega \in so(3), v \in \mathbb{R}^3,$$

而 $\hat{\omega}$ 是李代数 $so(3)$ 中元素 ω 在帽子映射: $\mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$ 下的像, 满足 $\hat{\omega}b = \omega \times b, \forall b \in \mathbb{R}^3$. 式(1)中 $\bar{\gamma}_i$ 为集群编队的平衡对流应变, 其取值与梁平

衡状态时的位形有关. 当集群编队队形处于稳定平衡状态, 即与之对应的几何精确梁处于平衡位形 $\bar{\mathbf{g}}$ 时, 平衡对流应变 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_i$ 为

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}_i = \bar{\mathbf{g}}^{-1} \left. \frac{d\bar{\mathbf{g}}}{ds} \right|_{s=s_i}.$$

由此可得嵌入到几何精确梁集群的 Lagrange 函数:

$$\mathcal{L}: = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K (\langle \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i \rangle - \langle \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2} \rangle),$$

这里括号项 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是李代数 $se(3)$ 上的对偶积, 矩阵 $\mathbf{M}_i = \text{dig}\{\mathbb{M}_i, \mathbb{J}_i\}$ 为集群个体 i 的惯性矩阵, 其中 \mathbb{M}_i 为质量矩阵, \mathbb{J}_i 为转动惯量矩阵, $\mathbf{P}_i = \text{dig}\{\mathbf{P}_i^{(1)}, \mathbf{P}_i^{(2)}\}$ 为编队之间的伪弹性系数矩阵, 矩阵 $\mathbf{P}_i^{(1)}$ 和 $\mathbf{P}_i^{(2)}$ 分别对应个体 i 的姿态和位置. 从而可以定义 $\langle \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i \rangle$ 和 $\langle \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2} \rangle$ 分别为个体 i 的动能和虚拟编队弹性势能. 由 Lagrange-d' Alembert 原理

$$\delta \int_0^T \mathcal{L} dt - \int_0^T \sum_{i=1}^K \mathbf{F}_{i, \text{ext}} \cdot \delta \mathbf{g}_i dt = 0$$

得到集群的 Hamel 方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i - \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_i + [\boldsymbol{\gamma}_i + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i, \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_i]^* - \\ & [\boldsymbol{\xi}_i, \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i]^* = T^* L_{g_i} \cdot \mathbf{F}_{i, \text{ext}} \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $[\cdot, \cdot]^*: \mathbb{R}^6 \times (\mathbb{R}^6)^* \rightarrow (\mathbb{R}^6)^*$ 为李括号 $[\cdot, \cdot]$ 的对偶括号, 其计算公式为:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \right]^* = - \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_1 \times \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

$T^* L_{g_i}$ 为左平移的余切映射, $\mathbf{F}_{i, \text{ext}}$ 为第 i 个体所受外力 (含额外控制力). 集群的 Hamel 方程 (2) 与如下相容性条件^[14]

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\gamma}_i - \frac{\partial}{\partial s} \boldsymbol{\xi}_i = [\boldsymbol{\gamma}_i + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_i, \boldsymbol{\xi}_i], \quad (3)$$

联立可用来求解集群系统的动力学.

1.2 集群系统的 Hamel 形式离散格式

下面给出集群系统的 Hamel 场变分积分分子. 首先将相应的 Lagrange 函数离散化. 考虑集群在 $[0, T]$ 时间段内的运动情况, 其中 $T = N\Delta t, N \in \mathbb{N}, \Delta t$ 为时间步长, 由前文规定的集群个体数量为 K , 个体间距为 Δh , 集群的编队位形可由序列 $\{\mathbf{g}_i^n\}$ 给出, 即用 \mathbf{g}_i^n 表示个体 i ($1 \leq i \leq K$) 在第 n 个时刻的位形. 定义个体 i 的离散对流速度 $\boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}$ 为

$$\mathbf{g}_i^{n+1} = \mathbf{g}_i^n \exp(\Delta t \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}) \quad (4)$$

此处 $\exp: se(3) \rightarrow SE(3)$ 为指数映射. 其局部微分同胚的性质确保了当个体 i 的速度变化不大时, 位

姿随时间的变化率可以用对流速度定义. 类似地, 定义离散对流应变 $\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n$ 为

$$\mathbf{g}_{i+1}^n = \mathbf{g}_i^n \exp(\Delta h \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n)$$

给定个体 i 在第 n 个时刻的期望位形 $\bar{\mathbf{g}}_i^n$, 集群编队的离散平衡对流应变 $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^n$ 由下式给定:

$$\bar{\mathbf{g}}_{i+1}^n = \bar{\mathbf{g}}_i^n \exp(\Delta h \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^n) \quad (5)$$

定义集群系统的离散 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^d(\mathbf{g}_i^n, \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n) = \\ \Delta t \Delta h \mathcal{L}(\mathbf{g}_i^n, \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n) \end{aligned}$$

相应的离散作用量为

$$S^d = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=1}^k \mathcal{L}^d(\mathbf{g}_i^n, \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n)$$

利用离散 Lagrange-d' Alembert 变分原理

$$\begin{aligned} \delta \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^k \mathcal{L}^d(\mathbf{g}_i^n, \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n) - \\ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i=0}^k \mathbf{F}_i^n \delta \mathbf{g}_i^n = 0 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{F}_i^n = \mathbf{F}_{i, \text{ext}}(\mathbf{g}_i^n)$ 是个体 i 在第 n 个时刻所受外力, 利用 $\boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n$ 的变分公式^[14]:

$$\delta \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2} = (\boldsymbol{\eta}_i^{n+1} - \boldsymbol{\eta}_i^n) / \Delta h + [\boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \boldsymbol{\eta}_i^{n+1/2}],$$

$$\delta \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n = \frac{1}{\Delta h} (\boldsymbol{\eta}_{i+1}^n - \boldsymbol{\eta}_i^n) + [\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^n, \boldsymbol{\eta}_i^{n+1/2}].$$

其中, $\boldsymbol{\eta}_i^n$ 由 $\delta \mathbf{g}_i^n = \mathbf{g}_i^n \boldsymbol{\eta}_i^n$ 定义, $\boldsymbol{\eta}_i^{n+1/2}$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{i+1/2}^n$ 由线性插值 $\boldsymbol{\eta}_i^{n+1/2} = (\boldsymbol{\eta}_i^{n+1} + \boldsymbol{\eta}_i^n) / 2$ 和 $\boldsymbol{\eta}_{i+1/2}^n = (\boldsymbol{\eta}_{i+1}^n + \boldsymbol{\eta}_i^n) / 2$ 所确定. 经直接计算得到集群的离散 Hamel 方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M}_i (\boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2} - \boldsymbol{\xi}_i^{n-1/2}) - \frac{1}{\Delta h} \mathbf{P}_i (\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n - \boldsymbol{\gamma}_{i-1/2}^n) - \\ & \frac{1}{2} ([\boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}, \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}]^* + [\boldsymbol{\xi}_i^{n-1/2}, \mathbf{M}_i \boldsymbol{\xi}_i^{n-1/2}]^*) + \\ & \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^n, \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n]^* + \\ & \frac{1}{2} [\boldsymbol{\gamma}_{i-1/2}^n + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i-1/2}^n, \mathbf{P}_i \boldsymbol{\gamma}_{i-1/2}^n]^* = \boldsymbol{\tau}_i^n \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $\boldsymbol{\tau}_i^n = T^* L_{g_i} \cdot \mathbf{F}_i^n$. 与文献[13]推导类似, 式 (3) 有相应的离散相容性条件:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^{n+1} - \boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n) - \frac{1}{\Delta h} (\boldsymbol{\xi}_{i+1}^{n+1/2} - \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2}) = \\ & \frac{1}{4} [(\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^n + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^n), (\boldsymbol{\xi}_{i+1}^{n+1/2} + \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2})] + \\ & \frac{1}{4} [(\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^{n+1} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^{n+1}), (\boldsymbol{\xi}_{i+1}^{n+1/2} + \boldsymbol{\xi}_i^{n+1/2})] \end{aligned} \quad (7)$$

计算集群系统的动力学需联立离散 Hamel 场方程 (6) 和离散相容性条件 (7), 以及边界条件

$$\boldsymbol{\gamma}_{1/2}^n = \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{1/2}^n, \boldsymbol{\gamma}_{K-1/2}^n = \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{K-1/2}^n$$

和实际的初值条件.

注意到利用离散变分原理得到的 Hamel 场分子(6)联合离散相容性条件(7)恰好形成交错蛙跳格式,由文献[15]可知此格式中涉及集群中个体运动的计算只和相邻的个体有关,故可用分布式的并行计算实现,从而满足实时控制的计算需求.

2 集群系统的编队控制

为实现对目标的围捕,从任务需求来看集群控制需具备两种基本功能:1) 控制编队保持特定队形;2) 实现特定队形变换. 这可通过对集群系统 Hamel 场方程(6)中的外力 τ_i^n 分别采取轨迹跟踪、编队保持控制来实现,以及通过编队势能的塑形来实现编队变换和围捕过程,具体实施过程如下:首先,对群中领导者应用轨迹跟踪控制;其次,对跟随者实施编队保持控制,引导整个集群协作去追击围捕目标;最后,在逼近围捕目标时,通过编队势能的塑形控制进行队形变换来完成围捕.

$$\begin{aligned} f_{i,FF}^n &= -ad_{\xi_i^n}^* M_i Ad_{(g_i^n)^{-1}g_{i,d}^n} \xi_{i,d}^n + M_i Ad_{(g_i^n)^{-1}g_{i,d}^n} \dot{\xi}_{i,d}^n = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_i^n & \hat{v}_i^n \\ \mathbf{0} & \hat{\omega}_i^n \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \mathbb{J}_i(\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} & \mathbf{0} \\ -M_i((\mathbf{A}_i^n)^{-1}\phi_{i,e}^n)^\wedge (\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} & M_i(\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{i,d}^n \\ v_{i,d}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbb{J}_i(\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} & \mathbf{0} \\ -M_i((\mathbf{A}_i^n)^{-1}\phi_{i,e}^n)^\wedge (\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} & M_i(\mathbf{A}_{i,e}^n)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega}_{i,d}^n \\ \dot{v}_{i,d}^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中, $\text{skew}(\mathbf{A}) = (\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top)$, $\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_{p2}, \mathbf{K}_{d1}$ 是三阶自伴(对称)矩阵, \mathbf{K}_{d1} 为三阶正定矩阵, \vee 为帽子映射 \wedge 的逆映射, $\dot{\xi}_{i,d}^n = (\xi_{i,d}^n - \xi_{i,d}^{n-1})/\Delta t$, $\hat{\omega}_{i,d}^n$ 和 $\hat{v}_{i,d}^n$ 定义与之类似. Bullo 等^[16]证明了上述控制律可以使被控刚体的状态收敛于目标状态.

为实现集群队形保持,借鉴几何精确梁的弹性势能能使梁在适当变形后自动恢复至平衡位置的原理,根据集群系统的离散 Hamel 方程(6)式,可以给出集群中个体 i 所需集群编队控制力 $\tau_{i,Form}^n$:

$$\begin{aligned} \tau_{i,Form}^n &= \frac{1}{\Delta h} \mathbf{P}_i (\gamma_{i+1/2}^n - \gamma_{i-1/2}^n) - \\ &\frac{1}{2} [\gamma_{i-1/2}^n + \bar{\gamma}_{i-1/2}^n, \mathbf{P}_i \gamma_{i-1/2}^n]^* - \\ &\frac{1}{2} [\gamma_{i+1/2}^n + \bar{\gamma}_{i+1/2}^n, \mathbf{P}_i \gamma_{i+1/2}^n]^* \end{aligned} \quad (9)$$

通过控制力 $\tau_{i,Form}^n$ 可以实现编队队形的保持.

2.2 虚拟弹性势能塑形实现队形变换

通过改变集群系统的 Hamel 形式(6)和相容条件(7)中的对流应变 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}\}_{i=1}^{K-1}$, 来达到塑形弹性势能并实施编队变换. 假定所有的集群个体位姿

2.1 集群的控制

首先考虑对目标的轨迹跟踪控制, Bullo 等^[16]使用几何力学研究了刚体的轨迹跟踪控制. 令 $\mathbf{g}_{i,d}^n = (\mathbf{A}_{i,d}^n, \phi_{i,d}^n) \in SE(3)$ 为个体 i 在 n 时刻的目标位姿, $\mathbf{g}_i^n = (\mathbf{A}_i^n, \phi_i^n) \in SE(3)$ 为个体 i 在 n 时刻的实际位姿, 与其相对应的目标对流速度和实际对流速度分别为 $\xi_{i,d}^n = (\omega_{i,d}^n, v_{i,d}^n)^\top \in \mathbb{R}^6$ 和 $\xi_i^n = (\omega_i^n, v_i^n)^\top \in \mathbb{R}^6$. 则轨迹控制定义为

$$\tau_i^n = f_{i,P}^n + f_{i,D}^n + f_{i,FF}^n \in se(3)^* \quad (8)$$

其中 $f_{i,P}^n, f_{i,D}^n, f_{i,FF}^n$ 都是由一对误差函数 $\mathbf{A}_{i,e}^n = (\mathbf{A}_{i,d}^n)^{-1}\mathbf{A}_i^n$ 和 $\phi_{i,e}^n = \phi_i^n - \phi_{i,d}^n$ 构成的反馈控制, 其中各控制力的计算公式为

$$\begin{aligned} f_{i,P}^n + f_{i,D}^n &= - \begin{pmatrix} \text{skew}(\mathbf{K}_{p1}\mathbf{A}_{i,e}^n)^\vee \\ \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{K}_{p2}\phi_{i,e}^n \end{pmatrix} - \\ &\begin{pmatrix} \text{skew}(\mathbf{K}_{p1}\mathbf{A}_{i,e}^n)^\vee \\ \mathbf{A}_i^{n-1}\mathbf{K}_{p2}\phi_{i,e}^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

和

都在编队稳定平衡状态 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$, 由离散平衡对流应变定义式(5)可知, 存在映射 $\log: \{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K \rightarrow \{\bar{\gamma}_{i+1/2}\}_{i=1}^{K-1}$ 满足: $\bar{\gamma}_{i+1/2} = \log(\bar{\mathbf{g}}_i^{-1}\bar{\mathbf{g}}_{i+1})/\Delta h$, 这里映射 \log 为指数映射 \exp 的逆映射. 注意到指数映射仅是局部微分同胚, 映射 \log 在单位矩阵的邻域内定义, 也即当集群中相邻个体位姿相差较小时成立. 反之, 已知初值 $\bar{\mathbf{g}}_0$ 和 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}\}_{i=1}^{K-1}$ 结合(4)式可重构 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$, 将此映射记为 \mathcal{R} . 对编队势能集合进行塑形可控制集群编队变换. 令编队初始状态编队平衡位姿为 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$, 末态编队平衡位姿为 $\{\bar{\mathbf{h}}_i\}_{i=1}^K$, 与其相关的编队平衡对流应变分别是 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}^0\}_{i=1}^{K-1}$ 和 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}^N\}_{i=1}^{K-1}$, 则有如下交换图成立

$$\begin{array}{ccc} \{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K & \xrightarrow{F} & \{\bar{\mathbf{h}}_i\}_{i=1}^K \\ \mathfrak{R} \updownarrow \Delta \log & & \mathfrak{R} \updownarrow \Delta \log \\ \{\bar{\gamma}_{i+1/2}^0\}_{i=1}^{K-1} & \xrightarrow{f} & \{\bar{\gamma}_{i+1/2}^N\}_{i=1}^{K-1} \end{array}$$

由上图可知: 只要定义由编队变换函数 F 诱导出的

函数 f ,改变位于李代数空间(线性空间)中编队平衡对流应变,就可以改变位于李群空间(非线性空间)中的位形,实现对编队势能的塑形,进而来控制编队队形.在物理上,此过程可解释为通过施加一种场控制来实现集群的编队变换.为简单起见,此处仅考虑一类在对流应变空间 $se(3)$ 中的线性插值函数 $\bar{\gamma}_{i+1/2}(n)\bar{\gamma}_{i+1/2}^n: \{0,1,\dots,N\} \rightarrow \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}^6 \dots \times \mathbb{R}^6$,使得

$$\bar{\gamma}_{i+1/2}(n) = \bar{\gamma}_{i+1/2}^0 + \frac{n\Delta t}{T}(\bar{\gamma}_{i+1/2}^N - \bar{\gamma}_{i+1/2}^0) \quad (10)$$

通过该线性插值过程实现编队势能塑性.

2.3 集群系统编队与围捕算法

为了实现集群围捕任务需求,本文仅考虑对固定目标的围捕,主要通过对编队势能的塑形控制来实现编队变换,建立如下集群围捕控制算法实现集群编队巡航、编队围捕.

算法的输入包括领导者路径规划 $\{g_d^n\}_{n=0}^N$,集群个体初始位形 $\{g_i^0\}$,集群个体初始对流速度 $\{\xi_i^{1/2}\}$,集群之间初始对流应变 $\{\gamma_{i+1/2}^0\}$,以及初始编队平衡对流应变 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}^0\}$ 和末态编队平衡对流应变 $\{\bar{\gamma}_{i+1/2}^N\}$,编队过程与围捕过程切换时间节点 N_c .算法输出为集群中领导者个体的轨迹控制力 $\{\tau_1^n, \tau_2^n, \dots, \tau_K^n\}_{n=1}^N$,以及所有个体的编队控制力 $\{\tau_{1,Form}^n, \tau_{2,Form}^n, \dots, \tau_{K,Form}^n\}_{n=1}^N$.算法的具体流程如图2所示.该算法中对 $\{\xi_i^{n+1/2}\}$ 和 $\{\gamma_{i+1/2}^n\}$ 的交替计算过程体现了其时空交错形式.集群中领导者通过轨迹控制 τ_i^n 追击围捕目标,追随者用编队控制力 $\tau_{i,Form}^n$ 来保持编队;式(10)通过计算编队平衡对流应变 $\bar{\gamma}_{i+1/2}^n$ 来控制编队保持和编队变换,通过两个编队平衡对流应变 $\bar{\gamma}_{i+1/2}^0$ 和 $\bar{\gamma}_{i+1/2}^N$ 之间递进差分来实现编队队形渐变.通过围捕切换节点 N_c ,即编队保持和变换编队的切换点,来决定围捕的时机,其选择与集群和围捕目标的位置关系,以及编队形式有关,可以用运筹学中最优化决策等方法来确定.

3 集群编队与围捕控制仿真

为了验证集群围捕控制算法的有效性,本节针对固定目标进行围捕过程的模拟仿真.仿真中集群将先保持队形进行编队巡航,后用“半圆”和“V”型两种模式对目标展开围捕.

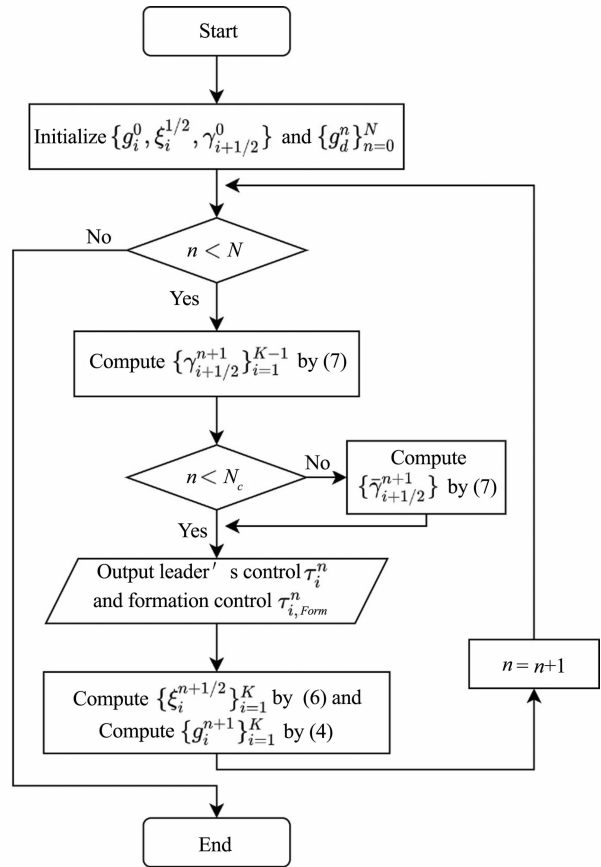


图2 控制算法流程图

Fig.2 Flow chart of control algorithm

3.1 “半圆”型围捕模式

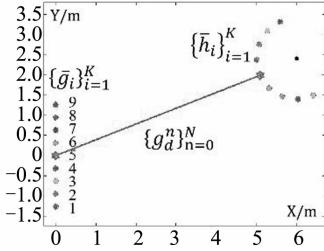
考虑围捕目标位置为 $A = (6, 2.4, 0)^T$,集群初始位置如图3(a)所示,其参数如下:个体总数 $K = 9$,编号5的个体为领导者,初始编队长度 $L = \pi$,惯性矩阵 $M_i = \text{dig}(10, 10, 10, 10, 10, 10)$,伪弹性系数阵 $P_i = \text{dig}(1, 1, 1, 0.6, 0.6, 0.6)$,除了另加声明,本文后续中 $i = 1, 2, \dots, K$.

初值设置:总时间 $T = 200\text{s}$,时间步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$,个体间距 $\Delta h = \pi/10$.编队与围捕切换时间节点 $N_c = 900$,集群个体初始位形 $g_i^0 = (A_i^0, \phi_i^0)$,其中 $A_i^0 = I_3, \phi_i^0 = (0, -L/2 + (i-1) * L/(K+1), 0)^T$.初始编队平衡位形 $\{\bar{g}_i\}_{i=1}^K$ 满足 $\bar{g}_i = g_i^0$,初始对流速度为 $\xi_i^{1/2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$,初始对流应变为 $\gamma_{i+1/2}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.围捕半圆的半径 $R = 1$,围捕编队平衡位形 $\{\bar{h}_i\}_{i=1}^K = \{(\bar{A}_i, \bar{\phi}_i)\}_{i=1}^K$ 满足:

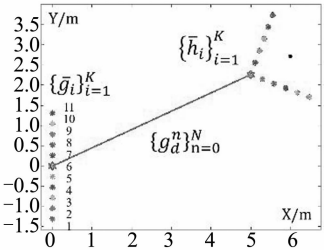
$$\theta_i = -\frac{\pi}{2} + (i-1) \tan^{-1} \frac{A_2 - (\phi_5^0)^2}{A_1 - (\phi_5^0)^1},$$

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta}_i & -\sin\bar{\theta}_i & 0 \\ \sin\bar{\theta}_i & \cos\bar{\theta}_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\phi}_i = \mathbf{A} + \bar{A}_i \cdot (\mathbf{R}, 0, 0)^T.$$



(a) “半圆”型
(a) Semicircle formation



(b) “V”型
(b) V-shape formation

图3 集群编队围捕初始状态示意图

Fig.3 Schematic diagram of initial states of swarm

领导者的路径规划为 $\mathbf{g}_d^n = (\mathbf{A}_d^n, \phi_d^n)$ ，其中

$$\mathbf{A}_d^n = \bar{A}_d,$$

$$\phi_d^n = \begin{cases} (0, \phi_s^0 + \frac{n}{N_c}(\bar{\phi}_s - \bar{\phi}_s^0), 0)^T, & 1 \leq n \leq N_c, \\ (0, \bar{\phi}_s, 0)^T, & N_c < n \leq N. \end{cases}$$

由初始编队模板 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$ 和围捕编队模板 $\{\bar{\mathbf{h}}_i\}_{i=1}^K$ 得初始平衡对流应变和末态平衡对流应变

$$\bar{\mathbf{y}}_{i+1/2}^0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T,$$

$$\bar{\mathbf{y}}_{i+1/2}^N = (0, 0, -1.276, -0.242, -1.218, 0)^T.$$

利用上述初始值作为集群围捕控制算法的输入,用 Matlab 编程进行仿真:平均计算控制响应时间为 1.6ms,远小于时间步长 $\Delta t = 0.1s$. 这表明该算法可以用来在线计算,并实时地控制编队运动过程. 仿真过程可见图 4,其中,图 4(a),图 4(b)和图 4(c)显示集群呈一字型编队巡航,图 4(d),图 4(e)和图 4(f)显示其以半圆型模式围捕目标物. 图 5 展示了集群在围捕过程中每个个体所受到的控制力和力矩,及自身动力学状态随时间的变化情况.

3.2 “V”型围捕模式

此例表明所得算法同样适用于非光滑队形变换. 固定围捕目标位置为 $\mathbf{A} = (6, 2.4, 0)^T$, 集群初始位置如图 3 (b) 所示,其参数如下:编队个数 $K = 11$, 编号 6 的个体为领导者,初始编队长度 L 、惯性矩阵 \mathbf{M}_i 和伪弹性系数矩阵 \mathbf{P}_i 与“半圆”型围捕一致.

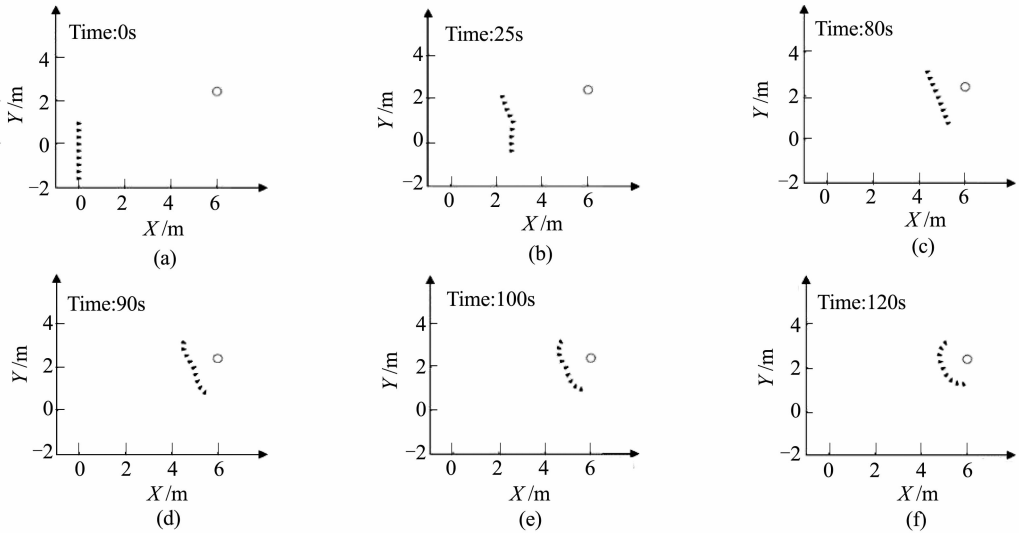


图4 集群编队“半圆”型围捕的模拟仿真

Fig.4 Simulation of target-capturing in “Semicircle” shape

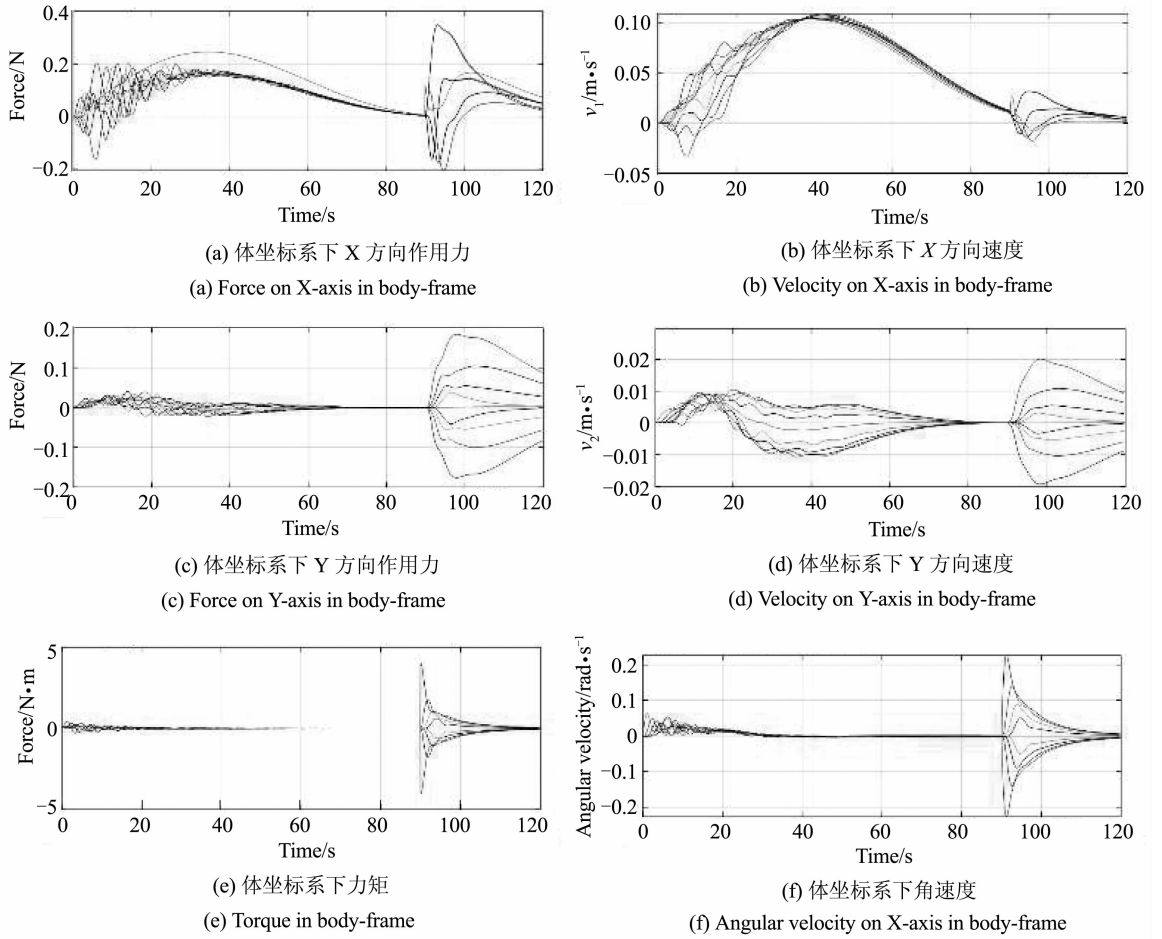


图5 集群编队围捕实时控制和速度

Fig.5 Real-time controls and velocities of the swarm

围捕条件选择为总时间 $T = 300\text{s}$, 时间步长 $\Delta t = 0.1\text{s}$, 个体间距 $\Delta h = \pi/12$. 编队与围捕切换时间节点 $N_c = 1500$, 集群个体初始位形 $\mathbf{g}_i^0 = (\mathbf{A}_i^0, \boldsymbol{\phi}_i^0)$, 其中 $\mathbf{A}_i^0 = \mathbf{I}_3, \boldsymbol{\phi}_i^0 = (0, -L/2 + (i-1) * L/(K+1), 0)^T$. 令初始编队模板为 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$, 且满足 $\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i^0$, 初始对流速度为 $\boldsymbol{\xi}_i^{1/2} = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ 以及初始对流应变为 $\boldsymbol{\gamma}_{i+1/2}^0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. 令围捕的目标队形“V”字形的张开角度 $\alpha = \pi/2$, 可定义围捕编队平衡位形 $\{\bar{\mathbf{h}}_i\}_{i=1}^K = \{(\bar{\mathbf{A}}_i, \bar{\boldsymbol{\phi}}_i)\}_{i=1}^K$:

$$\bar{\mathbf{A}}_i = \mathbf{I}_3, l = \frac{L}{K-1},$$

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} (6-i) * l * \cos(-\alpha/2) \\ (6-i) * l * \sin(-\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix}, & i = 1, 2, \dots, 6, \\ \begin{pmatrix} (i-6) * l * \cos(\alpha/2) \\ (i-6) * l * \sin(\alpha/2) \\ 0 \end{pmatrix}, & i = 7, 8, \dots, 11. \end{cases}$$

注意到围捕模板对应的平衡对流应变变量具有

左不变性, 即对李群 $SE(3)$ 中的元素左作用在编队模板的位形上, 不会改变该模板的平衡对流应变, 因此上式给出了领导者在原点, 编队方向为沿 x 轴方向的初始位形. 领导者路径规划为 $\mathbf{g}_d^n = (\mathbf{A}_d^n, \boldsymbol{\phi}_d^n)$, 其中

$$\bar{\boldsymbol{\theta}}_i = \tan^{-1} \frac{A^2 - (\phi_6^0)^2}{A^1 - (\phi_6^0)^1},$$

$$\mathbf{A}_d^n = \begin{pmatrix} \cos \bar{\boldsymbol{\theta}}_i & -\sin \bar{\boldsymbol{\theta}}_i & 0 \\ \sin \bar{\boldsymbol{\theta}}_i & \cos \bar{\boldsymbol{\theta}}_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}_d^n = \begin{cases} \phi_6^0 + \frac{n}{N_c} \left(\frac{5}{6} A - \phi_6^0 \right), & 1 < n < N_c, \\ \bar{\boldsymbol{\phi}}_6, & N_c < n < N. \end{cases}$$

由式(7)、初始编队模板 $\{\bar{\mathbf{g}}_i\}_{i=1}^K$ 和围捕编队模板 $\{\bar{\mathbf{h}}_i\}_{i=1}^K$ 得初始平衡对流应变和末态平衡对流应变

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^0 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T, i = 1, 2, \dots, K,$$

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{i+1/2}^N = \begin{cases} (0, 0, 0, -0.849, 0.849, 0)^T, & i = 1, 2, \dots, 5, \\ (0, 0, 0, 0.849, 0.849, 0)^T, & i = 6, 7, \dots, 11. \end{cases}$$

对上述初值仿真结果可见图6,其中,图6(a),图5(b)和图6(c)显示该集群中的11个个体保持一字型编队巡航,图6(d),图6(e)和图6(f)显示集群以“V”型模式围捕目标物.图7展示集群在围捕过

程中每个个体所受到的控制力和力矩,及相应的自身动力学状态.此时每个时间步迭代用时为2.0ms,计算时长小于时间步长,因此满足实时控制的基本需求.

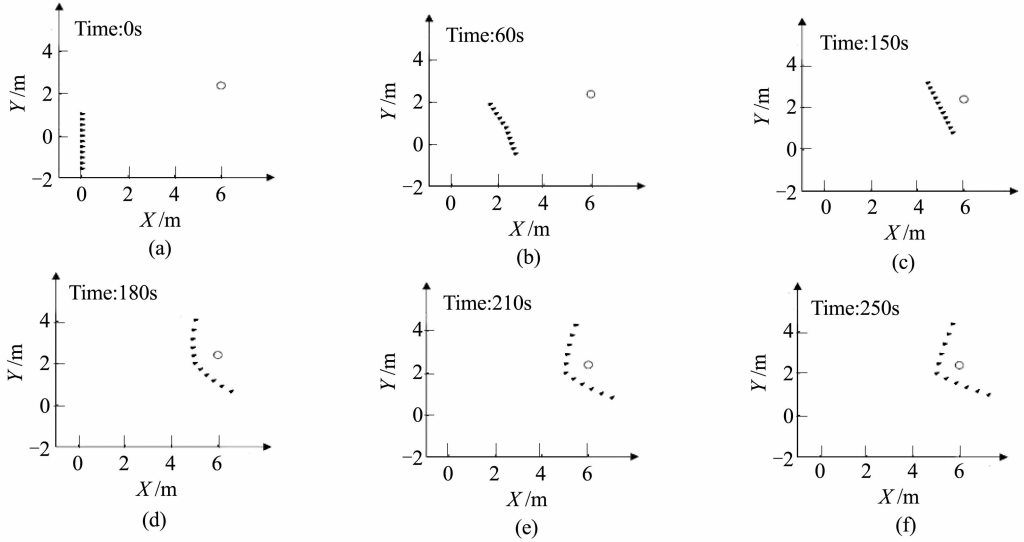


图6 集群编队“V”型围捕的模拟仿真
Fig. 6 Simulation of target-capturing in “V” shape

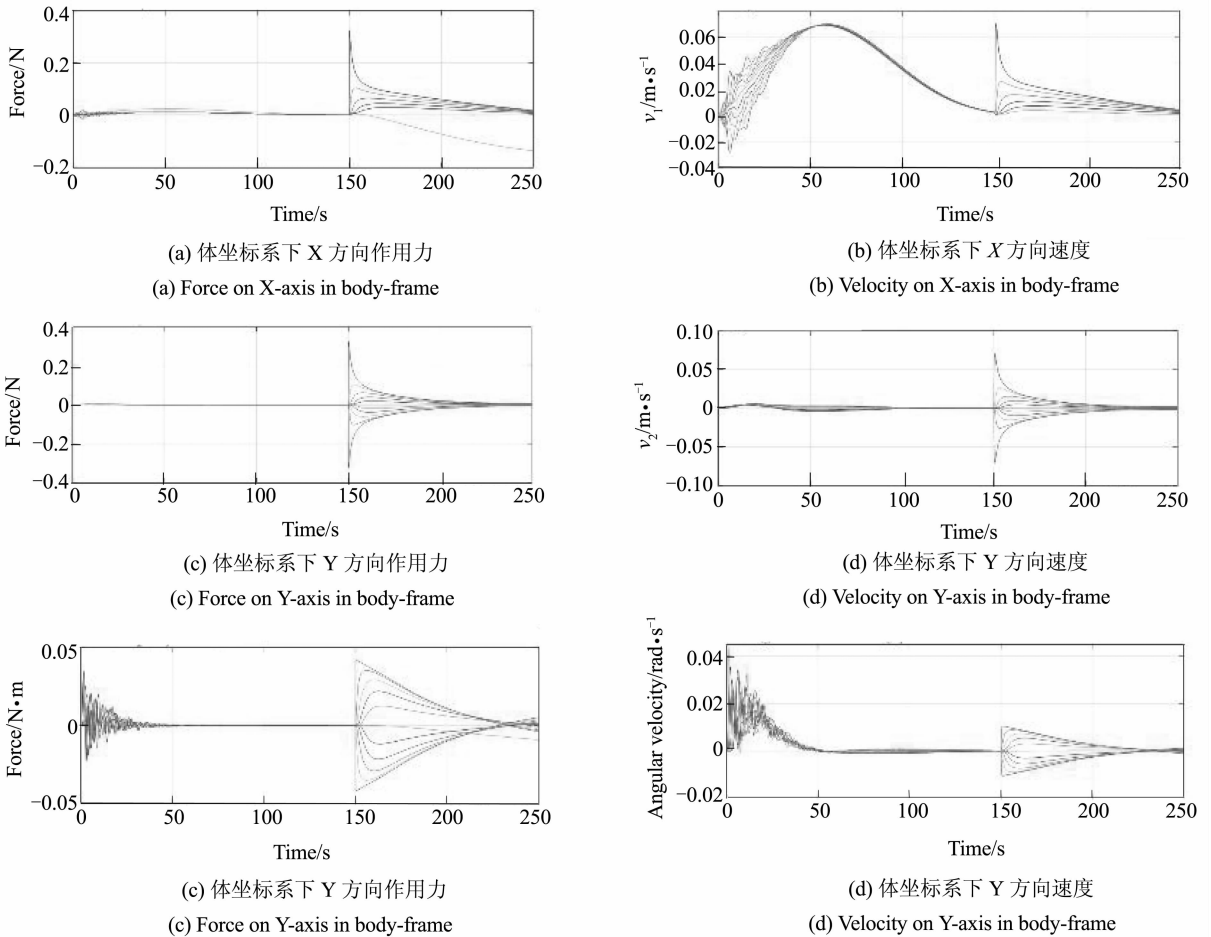


图7 集群编队围捕实时控制和速度
Fig. 7 Real-time controls and velocities of the swarm

从上述两个例子的仿真结果可知:通过改变平衡对流应变 $\bar{\gamma}_{i+1/2}^n$ 可以控制集群编队形成不同的队形,并且这种通过对虚拟弹性势能塑形所实现的队形变换过程自然,只需要在李代数空间线性插值,在编队变换过程中,个体间的虚拟势能可以避免个体间发生碰撞,并能满足实时控制需求.并且本算法可结合各种围捕策略,通过改变 $\bar{\gamma}_{i+1/2}^n$ 来实现不同的围捕队形.

4 结论

本文针对集群系统,提出了一种柔性编队围捕算法.通过离散变分原理,给出了基于几何精确梁Hamel场变分积分的算法实现.与传统方法相比,基于动力学的模型可以综合考虑个体的位置和姿态;由离散变分得到的数值格式结合离散相容性条件,可以分布式计算每个个体的运动状态,其计算速度可满足实时控制需求.特别地,本文构造了编队平衡对流应变,以此实现对编队虚拟弹性势能的塑形,来控制编队队形的弹性变换.通过模拟对固定目标的“半圆”型和“V”型围捕,仿真结果验证了该算法在实际场景中的适应性和有效性.未来的研究将致力于实现不同编队拓扑结构下的控制算法,及对算法收敛性、控制稳定性的理论分析;以及实现对三维空间中目标的围捕、多个活动目标的围捕和带有博弈过程的围捕等.

参 考 文 献

- Cao Y, Stuart D, Ren W, et al. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 19(4): 929 ~ 938
- 王涛, 王维平, 李小波, 等. 一种多无人机集群持续侦察分层控制框架及关键算. 系统仿真学报, 2018, 30(4): 1221 ~ 1228 (Wang T, Wang W P, Li X B, et al. A hierarchical control framework and key algorithms of multi-swarm persistent surveillance. *Journal of System Simulation*, 2018, 30(4): 1221 ~ 1228 (in Chinese))
- Liu Q, Sun B, Zhu D. A multi-AUVs cooperative hunting algorithm for environment with ocean current. In: The 37th Chinese Control Conference (CCC), Wuhan, China: IEEE Press, 2018: 5441 ~ 5444
- Kim T H, Sugie T. Cooperative control for target-capturing task based on a cyclic pursuit strategy. *Automatica*, 2007, 43(8): 1426 ~ 1431
- 赵俊洪, 陈卫东, 余本嵩. 基于刚体卫星绳系编队系统的动力学建模及姿态控制. 动力学与控制学报, 2021, 19(2): 8 ~ 14 (Zhao J Q, Chen W D, Yu B S. Dynamic modeling and attitude control of tether satellite formation system with a rigid body. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(2): 8 ~ 14 (in Chinese))
- 余本嵩, 文浩, 金栋平. 绳系卫星编队动力学及控制研究进展. 动力学与控制学报, 2015, 13(5): 321 ~ 328 (Yu B S, Wen H, Jin D P. Advances in dynamics and control of tethered satellite formations. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(5): 321 ~ 328 (in Chinese))
- 吴立尧, 袁长清. 深空环境下三星库仑编队重构控制研究. 动力学与控制学报, 2017, 15(6): 532 ~ 536 (Wu L Y, Yuan C Q. Research on reconfiguration control for three-craft coulomb formation in the deep space. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(6): 532 ~ 536 (in Chinese))
- Bullo F, Cortés J, Martinez S. Distributed control of robotic networks: a mathematical approach to motion coordination algorithms. USA, Princeton: Princeton University Press, 2009
- Meurer T, Krstic M. Finite-time multi-agent deployment: a nonlinear PDE motion planning approach. *Automatica*, 2011, 47(11): 2534 ~ 2542
- Rastgoftar H. Continuum deformation of multi-agent systems. Switzerland Cham: Springer International Publishing, 2016
- Rastgoftar H, Atkins E M. Continuum deformation of multi-agent systems under directed communication topologies. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2017, 139(1): 1 ~ 11
- Nair S, Leonard N E. Stable synchronization of mechanical system networks. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2008, 47(2): 661 ~ 683
- Shi D, Zenkov D V, Bloch A M. Hamel's formalism for classical field theories. *Journal of Nonlinear Science*, 2020, 30(4): 1307 ~ 1353
- 王亮, 安志朋, 史东华. 几何精确梁的Hamel场变分积分分子. 北京大学学报(自然科学版), 北京大学, 2016, 52(4): 692 ~ 698 (Wang L, An Z P, Shi D H. Hamel's field variational integrator of geometrically exact beam. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016, 52(4): 692 ~ 698 (in Chinese))
- An Z P, Gao S, Shi D H, et al. A variational integrator

for the Chaplygin-Timoshenko sleigh. *Journal of Nonlinear Science*, 2020, 30(4): 1381 ~ 1419

chanical systems: a geometric framework, *Automatica*, 1999, 35(1): 17 ~ 34

16 Bullo F, Murray R M. Tracking for fully actuated me-

TARGET-CAPTURING OF SWARM USING FLEXIBLE FORMATION BASED ON HAMEL'S FORMALISM*

Zhang Qi Huang Bin Shi Donghua[†]

(School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract The swarm control choosing an elastic body as a virtual structure can realize large-scale deformation of formation, and meet the requirements of collision avoidance naturally. Firstly, the swarm is embedded in a geometrically exact beam. By using interpolation of convective strain in Lie algebra, the virtual elastic potential energy of formation is shaped to realize the formation transformation quickly. Secondly, an algorithm of swarm flexible formation for target-capturing is established. It can accurately characterize both positions and attitudes of individuals in the swarm for engineering implementation. Meanwhile, it is independent of coordinate choice and suitable for describing large overall motion of the swarm. The distributed algorithm can be implemented in parallel with a high computational efficiency. Finally, the simulation results demonstrate that the algorithm is applicable and effective in the actual scene.

Key words swarm control, flexible formation, Hamel's formalism, target-capturing

Received 25 May 2021, Revised 15 June 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11872107).

[†] Corresponding author E-mail: dshi@bit.edu.cn