

环形天线结构的复杂动力学研究*

马文赛¹ 吕书锋^{1†} 杨绍武² 张伟³

(1. 内蒙古工业大学 理学院,呼和浩特 010051) (2. 北京信息科技大学 机电学院,北京 100192)

(3. 北京工业大学 材料与制造学部,北京 100124)

摘要 部分改进高维系统的广义 Melnikov 方法研究含参非线性动力系统的混沌问题,并应用于研究环形天线结构的混沌运动等复杂非线性动力学行为. 通过定义恰当的横截面,发展适用于研究五维含参非线性动力系统的 Melnikov 方法,获得系统发生 Smale 马蹄意义下混沌运动区域及判定定理. 将所得理论结果应用于研究面内激励与横向激励共同作用下环形天线结构的混沌运动,得到系统发生混沌运动的不稳定区域及相应的参数控制条件. 探讨阻尼系数、参数激励对系统动力学行为的影响,并利用数值模拟方法给出其相图构型,验证理论结果的正确性.

关键词 环形天线结构, 非线性系统, 复杂动力学, Melnikov 方法

中图分类号:O322

文献标志码:A

引言

航天技术的迅速发展对新型卫星天线技术提出了更高要求,大口径、高精度、低质量以及高强度等特征已成为大型卫星天线设计的必然趋势. 环形桁架可展开结构具有应用空间大、结构形式简明的特点,天线口径可达 50 米,但质量并没有随口径的增大成正比例增加,也不会改变结构形式,因此环形桁架可展开结构是目前大型卫星天线较为理想的结构形式. 目前,地球观测,陆地遥感以及声控探测等都受益于环型桁架卫星. 然而目前国内对环形桁架可展结构的理论和实践都十分匮乏,因此对环形桁架可展结构在太空条件下振动的理论研究是十分迫切和重要的,它能够为将来实践提供理论基础. 本论文的桁架采用复合材料,通过均匀化理论将环型桁架等效成圆柱壳结构,得到环型桁架的等效刚度,从而将环型桁架等效成圆柱壳.

可展开结构工作过程如下:在航天器发射前处于收拢状态,在发射入轨接受到指令后开始展开,

完成展开后锁定并且保持工作状态. 陈务军等^[1]介绍了大型构架式展开天线关键部件的设计构思,主要包括:天线总体选型及布置,单向折叠展开臂支撑背架,复合剪式铰外环,馈源支架,索网设计与反射面调整,180°能量铰等驱动机构. Li^[2]对环形桁架可展开天线的展开动力学进行了仿真,总结了初始速度、阻尼和重力对展开的影响. 在考虑扭转弹簧刚度、节点阻尼、重力和网架预张力的情况下,对环桁架可展开天线展开动力学进行了分析和控制. Morterolle 等^[3]提出了一种计算测地张力桁架的新方法,既保证了节点的正确定位,又保证了张力的均匀性. You 等^[4]提出了一种考虑系统铰链间隙和反射面柔性影响的卫星天线系统建模与分析方法. Zhang 等^[5]对高波束指向精度网状天线进行了一种两步结构设计. 此外,胡海岩等^[6]综述了大型可展天线研究现状和进展,提出了大型可展天线在结构设计、动力学建模与控制 and 仿真模拟实验中需要注意的问题.

圆柱壳结构的动力学分析对工程设计具有非

2021-04-26 收到第 1 稿,2021-06-11 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(12102207, 11832002, 12002057, 11862020), 2020 年度内蒙古自治区本级引进优秀人才政策项目(DC2100001428)和内蒙古工业大学自然科学基金资助项目(ZY202010)

† 通信作者 E-mail:shufenglu@163.com

常重要的指导意义。在一些实际工程应用中,非线性振动系统会出现在线性系统中不出现的现象,如跳跃、分叉以及混沌运动等。由于不同振动模态之间可能会产生相互作用,从而导致系统振动模态之间出现能量交换,进而产生复杂的非线性动力学问题,因此研究环形桁架等效圆柱壳的非线性内部共振及其复杂动力学特性对工程实际问题具有重要的理论指导意义。Liu等^[7]研究了复合材料层合圆柱壳的非线性振动问题。Zhang等^[8]研究了空间环境中圆形网格天线在热激励下的连续模型和非线性动力响应。Yang等^[9]研究了碳纤维增强聚合物(CFRP)层合圆柱壳在1:2内共振、主参数共振和1/2次谐波共振下的非线性振动。Wu等^[10]研究了圆形桁架天线在展开锁定情况下的频率特性。综上所述可以看出,研究环形天线结构等效圆柱壳的全局分叉和多脉冲混沌动力学的文献较少。然而,全局分叉和多脉冲混沌动力学的研究有助于解释环形天线结构等效圆柱壳多脉冲跳跃现象以及混沌现象,从而发现系统不稳定的机理,便于对系统进行有效控制。

在实际工程问题中,高维扰动非线性 Hamilton 系统可以用来描述实际工程所抽象出来的数学模型和动力学方程,并且高维非线性系统的全局分叉和混沌动力学能够揭示系统的运动不稳定性和复杂的动力学行为。对于高维系统,许多学者把 Melnikov 方法和其它摄动方法结合,改进和发展了 Melnikov 方法,使该方法成为了研究混沌运动的解析方法。Camassa等^[11]发展了研究一类四维具有作用-角变量的非线性系统在耗散扰动下系统多脉冲混沌动力学的广义 Melnikov 方法,该方法可以研究各种类型的多脉冲同宿轨道存在的条件。Kovacic 和 Wettergren^[12]利用 Melnikov 方法和几何奇异摄动方法研究了共振受迫耦合双摆的全局动力学。Zhang 和 Chen^[13]应用广义 Melnikov 方法分析了1:2内共振下复合材料层合板的全局分叉和混沌动力学。Wang^[14]应用广义 Melnikov 方法讨论了受迫双层纳米板的同宿现象和多脉冲混沌运动。Zhang等^[15]研究了参数激励与外激励联合作用下偏心旋转桁架天线的多脉冲跳跃双参数混沌动力学。秦琅等人^[16]考虑了一个含小阻尼、受周期激励的单自由度干摩擦振子,运用 Melnikov 方法得到了系统出现马蹄型混沌的参数区域。李海涛

等^[17]对带有非对称势能阱的双稳态能量采集系统开展混沌动力学研究,通过 Melnikov 方法获得发生同宿分叉的阈值,并使用数值方法验证了理论结果的有效性。Nguouabo等^[18]利用 Melnikov 定理研究了静电微电子机械系统的非线性分析问题。此外,李双宝等^[19]将 Melnikov 方法推广到非光滑系统中,且对该方法的应用进行了全面综述和比较。

本文基于坐标变换理论和恰当横截面,发展了高维 Melnikov 理论,使其适用于研究五维含参非线性动力系统,并应用于研究横向激励和面内激励联合作用下环形天线结构的复杂动力学。将环形天线结构的力学模型简化为五维自治非线性动力系统,通过定义恰当横截面,将高维 Melnikov 函数引入四维摄动相空间,证明环形天线系统中存在 Smale 马蹄意义下的混沌运动。以激励系数和阻尼系数作为控制参数,研究系统参数对环形天线系统稳定性和混沌运动的影响。利用相图、庞加莱图,数值模拟给出系统的混沌运动区域,验证理论结果的正确性。

1 五维非线性系统的 Melnikov 方法

文献[11]给出了四维自治 Hamilton 系统的广义 Melnikov 方法,且应用于研究了共振受迫弱非线性耦合摆系统的复杂动力学^[12]。然而,工程系统中的大多问题的数学模型可用高维非自治非线性系统来描述。本文通过引入恰当横截面,部分改进了广义 Melnikov 方法,使其适用于研究直角坐标表示的高维非自治非线性系统。

我们在文献[11]的控制系统上,考虑如下耗散扰动系统:

$$\dot{u} = JD_u H(u, v_1) + \varepsilon g^u(u, v, \phi, \mu) \quad (1a)$$

$$\dot{v}_1 = \varepsilon g^{v_1}(u, v, \phi, \mu) \quad (1b)$$

$$\dot{v}_2 = \Omega(u, v_1) + \varepsilon g^{v_2}(u, v, \phi, \mu) \quad (1c)$$

$$\dot{\phi} = \omega \quad (1d)$$

其中, $(u_1, u_2)^T \in \mathbf{R}^2, (v_1, v_2)^T \in \mathbf{R}^2, 0 < |\varepsilon| < 1$, 且 $\mu \in \mathbf{R}$ 是控制参数。矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

是辛矩阵, $H(u, v_1)$ 是 Hamilton 函数, g^u, g^{v_1}, g^{v_2} 是关于 t 的周期为 2π 的扰动函数且光滑。

当方程(1)中 $\varepsilon = 0$ 时,其未扰动系统为

$$\dot{u} = JD_u H(u, v_1) \quad (3a)$$

$$\dot{v}_1 = 0 \quad (3b)$$

$$\dot{v}_2 = \Omega(u, v_1) \quad (3c)$$

注意到方程(3)中,由于 $\dot{v}_1 = 0$, 所以变量 v_1 为常数. 因此方程(3)是一个解耦的四维非线性动力系统, 现对未扰动系统的几何结构做出如下假设:

假设 1 存在区间 $[L, N]$ 中每一个变量 v_1 , 方程(3a)有双曲不动点 $u = u_0(v_1)$, 并且存在连接不动点 $u = u_0(v_1)$ 的同宿流形 $u = u^h(t, v_1), t \in \mathbb{R}$.

由假设 1 可知, 在四维相空间, 不动点 $u = u_0(v_1)$ 是集合

$$M = \{(u, v) \mid u = u_0(v_1), v_1 \in [L, N], v_2 \in \mathbb{R}\} \quad (4)$$

的二维不变环面.

假设 2 区间 $[L, N]$ 中存在一点 $v_1 = v_1^0$, 使得函数 Ω 满足条件

$$\Omega(u_0(v_1^0), v_1^0) = 0, \left. \frac{d\Omega(u_0(v_1), v_1)}{dv_1} \right|_{v_1=v_1^0} \neq 0 \quad (5)$$

假设 2 意味着当 $v_1 = v_1^0$ 时, 环面 M 上的周期轨道的频率为 0, 此时周期轨道变为不动点的圆^[20], 有如下形式

$$C = \{(u, v_1, v_2) \mid u = u_0(v_1), v_1 = v_1^0, v_2 \in A\} \quad (6)$$

则 C 上任意不动点 p 的坐标可表示为 $(u_0(v_1^0), v_1^0, v_2(p))$, 此时连接 C 上任意两不动点 p_1 和 p_2 的异宿轨道的解析式为

$$\begin{aligned} u &= u^h(t, v_1^0), v_1 = v_1^0 \\ v_2 &= v_2^h(t, v_1^0) + v_2^0(v_1^0) \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $v_2^0(v_1^0) = v_2(v_1^0) - v_2^h(-\infty, v_1^0)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta v_2^0(v_1^0) &= v_2(p_2) - v_2(p_1) = \\ &= v_2^h(+\infty, v_1^0) - v_2^h(-\infty, v_1^0) = \\ &= \int [\Omega(u^h(\tau, v_1), v_1^0) - \Omega(u_0(v_1^0), v_1^0)] d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

由假设 2 可知

$$\Delta v_2^0(v_1^0) = \int \Omega(u^h(\tau, v_1), v_1^0) d\tau \quad (9)$$

如图 1 所示, 流形 M 是具有三维稳定流形 $w^s(M)$ 和不稳定流形 $w^u(M)$ 的局部不变流形. 方程(3)同宿轨道的存在性表明, 稳定流形 $w^s(M)$ 和不稳定流形 $w^u(M)$ 相交于三维同宿流形 Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(u, v) \mid u = u^h(t_0, v_1), v_1 \in [L, N], \\ &v_2 = \int \Omega(u^h, v_1^0) ds + v_2^0\} \end{aligned} \quad (10)$$

方程(10)表明同宿流形 Γ 可由变量 t_0, v_1 和 v_2 参数化.

系统(3)为四维自治系统, 定义法向不变流形 M 可表示为

$$\begin{aligned} M &= \{(u, v) \mid u = u_0(v_1), v_1 \in [L, N], \\ &|v_2| \leq A, \phi = \omega t + \phi_0\} \end{aligned} \quad (11)$$

其中 L, N 和 A 为非负实数.

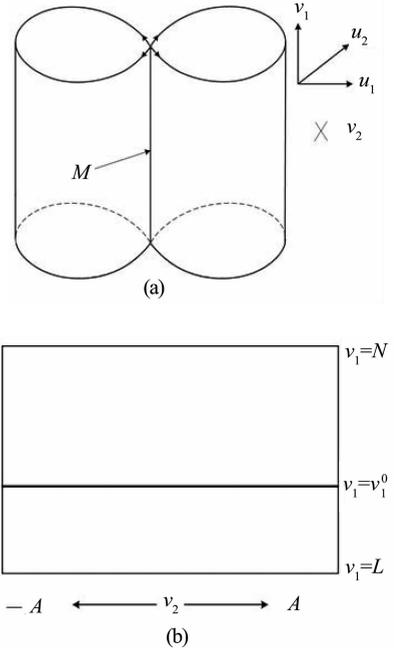


图 1 四维相空间未扰动系统几何结构
Fig. 1 The geometric structure of unperturbed system in four-dimensional phase space

由文献[21]可知, 法向双曲不变流形 $M(\phi)$ 在小扰动维持局部法向双曲不变流形, 可表示为

$$\begin{aligned} m_\varepsilon &= \{(u, v) \mid u = u_0(v_1) + O(\varepsilon), \\ &v_1 \in [L, N], \\ &|v_2| \leq A, \phi = \omega t + \phi_0\} \end{aligned} \quad (12)$$

即扰动系统的法向双曲不变流形 $m_\varepsilon(\phi)$ 是 ε 阶逼近于未扰动系统的法向双曲不变流形 $M(\phi)$.

在五维相空间中定义横截面

$$\sum \{(u, v, \phi) \mid \phi = \phi_0\} \quad (13)$$

图 2 为截面 \sum 示意图. 这里先取截面 $\phi = \phi_0$, 这样就可以在四维空间研究系统(14)的非线性动力学特性, 然后 ϕ 从 0 到 2π 变化, 从而跑遍整个环面 S^1 , 进而研究系统(1)的非线性动力学特性.

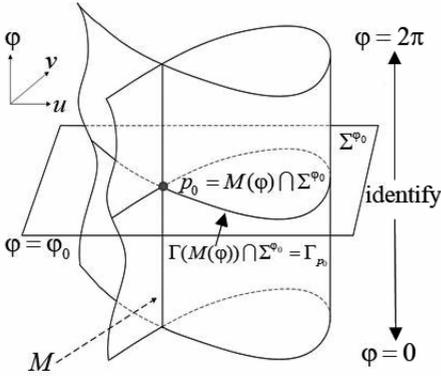


图2 横截面 Σ^{ϕ_0} 的几何结构

Fig.2 The geometric structure of the cross section Σ^{ϕ_0}

$$\dot{u} = JD_u H(u, v_1) + \varepsilon g^u(u, v, \phi_0, \mu) \quad (14a)$$

$$\dot{v}_1 = \varepsilon g^{v_1}(u, v, \phi_0, \mu) \quad (14b)$$

$$\dot{v}_2 = \Omega(u, v_1) + \varepsilon g^{v_2}(u, v, \phi_0, \mu) \quad (14c)$$

现在引入文献[12]中笛卡尔坐标系下 Melnikov 函数的形式

$$M(v_1^0, \phi_0, \mu) = \int \langle n(p^h(t)), g(p^h(t), \omega t + \phi_0, \mu, 0) \rangle dt \quad (15)$$

其中

$$n = (D_u H(u, v_1), D_{v_1} H(u, v_1) - D_{v_1} H(u_0(v_1), v_1, 0)) \quad (16a)$$

$$g = (g^u(u, v, \phi, \mu, 0), g^{v_1}(u, v, \phi, \mu, 0), g^{v_2}(u, v, \phi, \mu, 0)) \quad (16b)$$

$$p^h(t) = (u^h(t, v_1), v_1, v_2^h(t, v_1) + v_2^0) \quad (16c)$$

这里符号 \langle, \rangle 表示内积, 向量 n 是同宿流形 Γ 的法向量.

k 脉冲 Melnikov 函数 $m_k (k = 1, 2, \dots)$ 定义为

$$m_k(v_0, \phi_0, \mu) = \sum_{j=0}^{k-1} M(v_1^0, v_2^0 + j\Delta v_2(v_1^0), \phi_0, \mu) \quad (17)$$

从假设2中可知, 在 $v_1 = v_1^0$ 附近, 流形 M 是慢流形, 而向量 u 是在快流形上. 因此, 由于慢流形 M 没有开折, 所以文献[22]中的非开折条件满足. 根据文献[21]可得法向量 n 的符号函数 σ 为

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle n(p^h(t)), p^h(t) \rangle}{\|D_u H(u^h(t, v_1), v_1)\| \|D_u H(u^h(-t, v_1), v_1)\|} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle D_u H(u^h(t, v_1), v_1), J^T D_u H(u^h(-t, v_1), v_1) \rangle}{\|D_u H(u^h(t, v_1), v_1)\| \|D_u H(u^h(-t, v_1), v_1)\|}$$

其中

$$J^T \text{ 为 } J^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理1 对于整数 k , 若存在 $v_2 = v_2^0$ 和参数 $\mu = \bar{\mu}$, 满足条件

1. k 脉冲 Melnikov 函数存在简单零点, 即

$$m_k(v_1^0, v_2^0, \bar{\phi}_0, \bar{\mu}_0) = 0$$

$$D_{v_2} m_k(v_1^0, v_2^0, \bar{\phi}_0, \bar{\mu}_0) \neq 0$$

2. $m_i(v_1^0, v_2^0, \bar{\phi}_0, \bar{\mu}_0) \neq 0, i = 1, 2, \dots, k-1 (k > 1)$. 则对充分小的 ε , 当 $v_1 \rightarrow v_1^0$ 和 $\mu \rightarrow \bar{\mu}$ 充分接近, 扰动系统的稳定流形 $w^s(m_\varepsilon^{\phi_0})$ 和不稳定流形 $w^u(m_\varepsilon^{\phi_0})$ 横截相交于二维横截面 $\Sigma(v_2^0)$, 并且当 $m_\varepsilon^{\phi_0}$ 在 ε 小邻域外, 横截面 $\Sigma(v_2^0)$ 光滑地逼近于横截面 $\Sigma(v_2^0)$. 此横截面是由同宿流形 Γ 上的同宿轨当 $v_1 = v_1^0$ 和 $v_2 = v_2^0 + j\Delta v_2(v_1^0), i = 1, 2, \dots, k-1$ 时张成的, 这里的 v_2^0 是对应的 k -脉冲 Melnikov 函数 $m_k(v_1^0, v_2^0, \phi_0, \mu) = 0$ 的简单零点.

因为扰动系统的稳定流形与不稳定流形横截相交于曲面 $\Sigma(v_2^0)$ 上的每一个点, 可判断系统存在横截同宿轨, 根据 Smale - Birkhoff 定理知, 横截同宿轨可判断系统存在 Smale 马蹄意义下的混沌. 因此由定理1可判断系统(1)存在混沌运动.

2 环形天线结构等效圆柱壳动力学方程

考虑圆柱壳中面半径为 R , 轴向长度为 L , 沿径向壳的厚度为 h . 假定圆柱壳的铺设层数为 N_s , 铺设顺序为 (45-45)s. 曲线坐标位于壳体的中面, 圆柱壳内任一点的位移 u, v, w 分别沿 x, θ, z 方向. 同时环形天线结构等效圆柱壳处于一个均布的热环境中, 此环形天线结构等效圆柱壳受到边界上的一个径向线载荷 $f = F \cos(\Omega_1 t)$ 和一个轴向载荷 $p = p_0 + p_1 \cos(\Omega_2 t)$ 的共同作用, p_0 为面内预紧力, 如图3所示. 无量纲后的两自由度环形天线结构等效圆柱壳系统控制运动方程为^[9]

$$\begin{aligned} \ddot{w}_1 + \mu_1 \dot{w}_1 + \omega_1^2 w_1 + m_2 w_1^2 + m_3 w_1 w_2 + m_4 w_2^2 + m_5 w_3^3 + m_6 w_1^2 w_2 + m_7 w_1 w_2^2 + m_8 w_3^3 + m_9 w_1 (p_1 \cos(\Omega_2 t)) = m_{10} F_1 \cos(\Omega_1 t) \end{aligned} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w}_2 + \mu_2 \dot{w}_2 + \omega_2^2 w_2 + n_2 w_1^2 + n_3 w_1 w_2 + n_4 w_2^2 + n_5 w_1^3 + n_6 w_1^2 w_2 + n_7 w_1 w_2^2 + n_8 w_3^3 + n_9 w_2 (p_1 \cos(\Omega_2 t)) = \end{aligned}$$

$$n_{10}F_2 \cos(\Omega_1 t) \quad (18b)$$

这里, $\omega_1^2 = m_1 + mp_0$, $\omega_2^2 = n_1 + np_0$, ω_1, ω_2 是相应线性系统的第一二阶固有频率, μ_1, μ_2 是第一二阶模态的阻尼系数, $m_i, n_i (i = 2, 3, \dots, 10)$ 表示无量纲化系数, 其它参数可见参考文献[9].

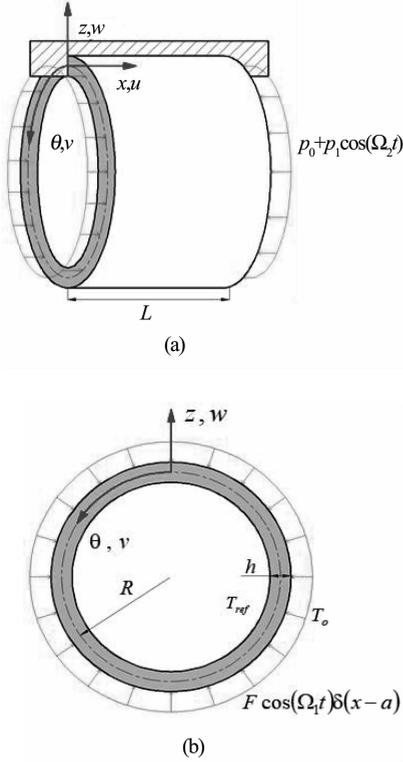


图3 环形天线结构等效圆柱壳模型
Fig. 3 Equivalent cylindrical shell model of a ring antenna structure

为了方便应用广义 Melnikov 方法研究两自由度环形天线结构等效圆柱壳复杂动力学, 这里主要研究主参数共振, 引入以下坐标变换

$$\Omega = \Omega_1 = \Omega_2, \phi = \Omega t,$$

$$x_1 = w_1, x_2 = \dot{w}_1, x_3 = w_2, x_4 = \dot{w}_2$$

则系统(18)等价形式为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\mu_1 x_2 - \omega_1^2 x_1 - m_2 x_1^2 - m_3 x_1 x_3 - \\ & m_4 x_3^2 - m_5 x_1^3 - m_6 x_1^2 x_3 - m_7 x_1 x_3^2 - \\ & m_8 x_3^3 + m_9 (p_1 \cos \phi) x_1 + m_{10} F_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (19b)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (19c)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -\mu_2 x_4 - \omega_2^2 x_1 - n_2 x_1^2 - n_3 x_1 x_3 - n_4 x_3^2 - \\ & n_5 x_1^3 - n_6 x_1^2 x_3 - n_7 x_1 x_3^2 - n_8 x_3^3 + \\ & n_9 (p_1 \cos \phi) x_3 + n_{10} F_2 \cos \phi \end{aligned} \quad (19d)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (19e)$$

将阻尼系数 μ_1 和 μ_2 , 激励幅值 p_1, p_2, F_1 和 F_2 , 以及参数 m_6, m_8, n_5 和 n_7 视为开折系数, 在开折系数前面加上小扰动 ε , 并引入以下坐标变换

$$u_1 = x_1 + \frac{m_2}{3m_5} x_2, u_2 = x_2,$$

$$v_1 = x_3, v_2 = \frac{1}{\mu_2} x_4 - v_1$$

得到系统(19)的等价形式为

$$\dot{u}_1 = u_2 \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 = & s_1 u_1 + \left(\varepsilon \frac{2m_2 m_6}{3m_5} - m_3 \right) u_1 v_1 - m_7 u_1 v_1^2 - \\ & m_5 u_1^3 + \left(\frac{m_2 m_3}{3m_5} - \varepsilon \frac{m_2^2 m_6}{9m_5^2} \right) v_1 + \frac{m_2 m_7}{3m_5} v_1^2 - \\ & (m_4 + \varepsilon m_8) v_1^3 - \frac{2m_2^3}{27m_5^2} + \frac{m_2 \omega_1^2}{3m_5} - \\ & \varepsilon \mu_1 u_2 - \varepsilon m_6 u_1^2 v_1 - \varepsilon m_9 u_1 p_1 \cos \phi + \\ & \varepsilon \frac{m_9 m_2}{3m_5} \cos \phi + \varepsilon m_{10} F_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (20b)$$

$$\dot{v}_1 = \varepsilon \mu_2 v_1 + \varepsilon \mu_2 v_2 \quad (20c)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_2 = & s_1 v_1 + \frac{n_3}{\mu_2} u_1 v_1 + \left(\frac{2m_2 n_2}{3m_5 \mu_2} - \varepsilon \frac{m_2^2 n_5}{9m_5^2 \mu_2} \right) u_1 + \\ & \left(\varepsilon \frac{m_2 n_5}{m_5 \mu_2} - \frac{n_2}{\mu_2} \right) u_1^2 - \frac{n_6}{\mu_2} u_1^2 v_1 - \frac{n_8}{\mu_2} v_1^3 + \\ & \left(\varepsilon \frac{m_2 n_7}{3m_5 \mu_2} - \frac{n_4}{\mu_2} \right) v_1^2 - \varepsilon \frac{n_7}{\mu_2} v_1^2 u_1 - \varepsilon \frac{n_5}{\mu_2} u_1^3 - \\ & 2\varepsilon \mu_2 v_1 + \frac{m_2^2 n_2}{9m_5^2 \mu_2} + \varepsilon \frac{m_5 m_2^3}{27m_5^2 \mu_2} - \end{aligned}$$

$$\varepsilon \frac{n_9 v_1}{\mu_2} p_1 \cos \phi + \varepsilon \frac{n_{10}}{\mu_2} F_2 \cos \phi \quad (20d)$$

$$\dot{\phi} = \Omega \quad (20e)$$

其中

$$s_1 = \frac{2m_2^2}{3m_5} - m_2 - \omega_1^2$$

$$s_2 = \frac{\omega_2^2}{\mu_2} + 2\mu_2 - \frac{m_2 n_3}{3m_5 \mu_2} + \frac{m_2^2 n_6}{9m_5^2 \mu_2}$$

定义五维相空间中系统(20)的关于 ϕ 的截面

$$\Sigma^{\phi_0} = \{ (u_1, u_2, v_1, v_2, \phi) \mid \phi = \phi_0 \}$$

令 $\varepsilon = 0$, 则系统(20)中 v_1 是一个常数, 因此系统(20)的未扰动系统是一个解耦的四维系统. 若满足条件

$$m_5 > 0 \quad (21a)$$

$$s_3 = s_1 - m_3 v_1 - m_7 v_1^2 > 0 \quad (21b)$$

$$\frac{m_2 m_3}{3m_5} v_1 + \frac{m_2 m_7}{3m_5} v_1^2 - m_4 v_1^3 - \frac{2m_2^3}{27m_5^2} + \frac{m_2 \omega_1^2}{3m_5} = 0 \quad (21c)$$

则前两维系统中存在三个平衡点, 其中一个平衡点是不稳定的鞍点 $(u_1, u_2) = (0, 0)$, 另两个平衡点是中心点 $(u_1, u_2) = (\sqrt{\frac{s_3}{m_5}}, 0)$. 且前两维可以写成 Hamilton 函数的形式

$$H = \frac{1}{2} \mu_2^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2m_2^2}{3m_5} - m_2 - \omega_1^2 \right) u_1^2 + \frac{1}{2} m_3 u_1^2 v_1 + \frac{1}{2} m_7 u_1^2 v_1^2 + \frac{1}{4} m_5 u_1^4 \quad (22)$$

由 Hamilton 函数(22) 可以求得连接鞍点 $(u_1, u_2) = (0, 0)$ 的同宿轨道的解析式

$$u_1^h = \pm \sqrt{\frac{2s_3}{m_5}} \operatorname{sech} \sqrt{s_3} t \quad (23a)$$

$$u_2^h = \mp \sqrt{\frac{2}{m_5}} s_3 \operatorname{sech} \sqrt{s_3} t \tanh \sqrt{s_3} t \quad (23b)$$

3 系统的混沌运动分析及数值模拟

由方程(4) 和方程(21b) 可以定义环形天线结构等效圆柱壳系统的部分法向双曲不变流形

$$M = \{ (u_1, u_2, v_1, v_2) \mid u_1 = u_2 = 0, v_1 \in \left(\frac{-m_3 - \sqrt{s_4}}{2m_7}, \frac{-m_3 + \sqrt{s_4}}{2m_7} \right), |v_2| < A \} \quad (24)$$

其中 $s_4 = m_3^2 - 4m_7(s_3 - s_1) > 0$. 由方程(10), 定义环形天线结构等效圆柱壳系统三维不变流形

$$\Gamma = \{ (u_1, u_2, v_1, v_2) \mid u_1^h, u_2^h, v_1 \in \left(\frac{-m_3 - \sqrt{s_4}}{2m_7}, \frac{-m_3 + \sqrt{s_4}}{2m_7} \right), v_2 = \int \Omega \left(u_1^h, u_2^h, \pm \sqrt{\frac{s_3}{m_5}} \right) ds + v_2^0 \}$$

环形天线结构等效圆柱壳系统相位漂移角为

$$\Delta v_2 = \int \left(\frac{n_3}{\mu_2} u_1 v_1 + \frac{2m_2 n_2}{3m_5 \mu_2} u_1 - \frac{n_2}{\mu_2} u_1^2 - \frac{n_6}{\mu_2} u_1^2 v_1 \right) dt = \pi \sqrt{\frac{2}{m_5}} \left(\frac{n_3}{\mu_2} v_1^0 + \frac{2m_2 n_2}{3m_5 \mu_2} \right) - \frac{4}{m_5} \sqrt{\frac{s_3}{m_5}} \left(\frac{n_6}{\mu_2} v_1^0 + \frac{n_2}{\mu_2} \right) \quad (25)$$

这里的 v_1^0 需满足条件(21).

由方程(15) 可得环形天线结构等效圆柱壳单脉冲 Melnikov 函数为

$$M = \int u_2 \left(\frac{2m_2 m_6}{3m_5} u_1 v_1 - \frac{2m_2^2 m_6}{3m_5^2} v_1 - m_6 u_1^2 v_1 + (-m_9 u_1 p_1 + \frac{m_9 m_2}{3m_5} + m_{10} F_1) \cos(\Omega t + \phi_0) - m_8 v_1^3 - \mu_1 u_2 \right) + \mu_2 (v_1 + v_2) (-s_2 v_1 + \frac{n_3 u_1 v_1}{\mu_2} + \frac{2m_2 n_2}{3m_5 \mu_2} u_1 - \frac{n_2}{\mu_2} u_1^2 - \frac{n_6}{\mu_2} u_1^2 v_1 - \frac{n_4}{\mu_2} v_1^2 - \frac{n_8}{\mu_2} v_1^3 + \frac{n_2 m_2^2}{9\mu_2 m_5^2}) dt = (T_1 + T_2) \sin \phi_0 + T_3 + T_4 \quad (26)$$

其中

$$T_1 = - \left(m_1 F_1 + \frac{m_9 p_1 m_2}{3m_5} v_1^0 \right) \frac{\sqrt{2 s_1} \pi \Omega}{\sqrt{m_5}} \operatorname{sech} \frac{\pi \Omega}{2 \sqrt{s_1}}$$

$$T_2 = \frac{m_9 p_1}{m_5} \pi \Omega^2 \operatorname{csch} \frac{\pi \Omega}{2 \sqrt{s_1}}$$

$$T_3 = \mu_2 \Delta v_2 (v_1^0 + v_2^0)$$

$$T_4 = - \frac{4}{3} \mu_1 s_1^{\frac{3}{2}}$$

由方程(17) 可得环形天线结构等效圆柱壳的 k -脉冲 Melnikov 函数为

$$m_k = k(T_1 + T_2) \sin \phi_0 + kT_3 + k \left(T_4 + \frac{k-1}{2} \mu_2 \Delta v_2 \right) \Delta v_2 \quad (27)$$

其中, $v_1 = v_1^0, v_2 = \int D_{v_1} H(u_1^h, u_2^h, v_1^0) ds + v_2^0$.

接下来主要分析环形天线结构等效圆柱壳 k -脉冲 Melnikov 函数 m_k 简单零点的存在性, 如果 m_k 存在简单零点, 则

$$m_k = 0 \quad (28)$$

且满足条件

$$D_{v_2} m_k = \mu_2 \Delta^2 v_2^0 \quad (29)$$

由方程(27) 可以解出

$$k = - \left[(T_1 + T_2) \sin \phi_0 + T_3 + T_4 \right] \mu_2^{-1} \Delta^{-2} v_2 + 1 \quad (30)$$

$$\left| \frac{T_3 + \left(T_4 + \frac{k-1}{2} \mu_2 \Delta v_2 \right) \Delta v_2}{|T_1 + T_2|} \right| < 1 \quad (31)$$

因此, 我们可以选取适当的参数使得等式(28) 和等式(29) 成立, 从而使得 k -脉冲 Melnikov 函数存在简单零点.

现在求解可能存在的脉冲数 k , 有条件(21a),

可令 $m_5 = 1$; 由条件(21b)和条件(24)可求得 $v_1^0 \in (-1, 1)$, 且 m_2 和 ω_1 有如图4的关系。

即当参数满足 $m_2 \in (-\infty, 3)$ 、 $\omega_1 \in (-3, 3)$ 或 $m_2 \in (-3, 0)$ 、 $\omega_1 \in (-3, 0)$ 时, 有 $s_1 > 0$. 取 $m_2 = -1$, $v_1^0 = \frac{1}{2}$, $\omega_1^2 = \frac{2}{3}$, 由条件(21c)可得 $m_4 = \frac{1}{27}[18(-2m_3 - m_7) - 80]$. 令 $\phi_0 = n\pi$, $n \in Z$, 取 $n_2 = \frac{1}{4}$, $n_3 = \frac{1}{3}$, $n_3 = -\frac{1}{3}$, 则有

$$k = 24\mu_1\mu_2^{-1} \left(1 - \frac{1}{2}m_3 - \frac{1}{4}m_7\right)^{-1} \quad (32)$$

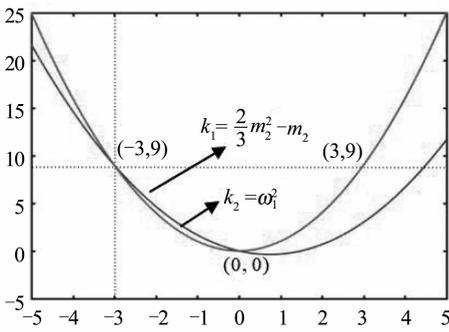


图4 m_2 和 ω_1 的取值关系

Fig. 4 The relationship between m_2 and ω_1 is given

且

$$\Delta v_2 = -\frac{\sqrt{3}}{18}\mu_2^{-1} \quad (33)$$

图5为相位漂移角与二阶模态阻尼系数之间的关系, 从图中可以看出, 当阻尼系数变大时, 相位漂移角逐渐变小, 即随着阻尼系数的增大, 环形天线结构等效圆柱壳系统可能由多脉冲跳跃变为单脉冲跳跃, 最后不发生跳跃。

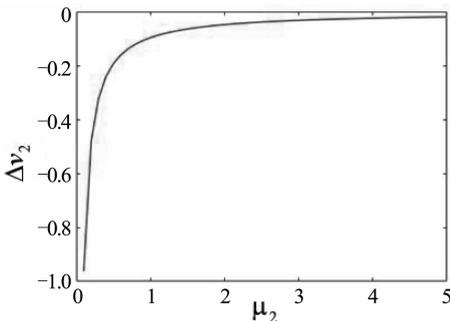


图5 Δv_2 和 μ_2 的取值关系

Fig. 5 The relationship between Δv_2 and μ_2 is given

因此, 适当地选取 μ_1 、 μ_2 、 m_3 和 m_7 可以使得 $k \geq 1$ 且 $k \in z^+$. 根据定理1, 系统(18)的稳定流形 $w^s(M)$ 和不稳定流形 $w^u(M)$ 横截相交, 说明环形天线结构等效圆柱壳系统存在横截同宿轨道, 既存

在 k -脉冲的混沌运动。

应用四阶 Runge - Kutta 算法和 Matlab 软件对系统(18)进行数值模拟, 验证环形天线结构等效圆柱壳存在混沌运动等复杂的非线性动力学行为。

根据前面的理论分析, 分别取如下参数

$$m_2 = -1, m_3 = \frac{1}{2}, m_5 = 1, m_7 = -1,$$

$$m_9 = 3, m_{10} = \frac{1}{2}, n_2 = \frac{1}{4}, n_3 = \frac{1}{3},$$

$$n_6 = -\frac{1}{3}, v_1^0 = \frac{1}{2}, v_2^0 = -2, \omega_1^2 = \frac{2}{3},$$

$$x_{10} = 0.5, x_{20} = 0.2, x_{30} = 0.6, x_{40} = 0.46$$

当 $\mu_1 = \frac{1}{2}$, $\mu_2 = \frac{1}{3}$, 此时 $k = 4$, 由不等式

(31) 可以得到环形天线结构等效圆柱壳发生混沌运动的阈值曲面, 如图6所示。

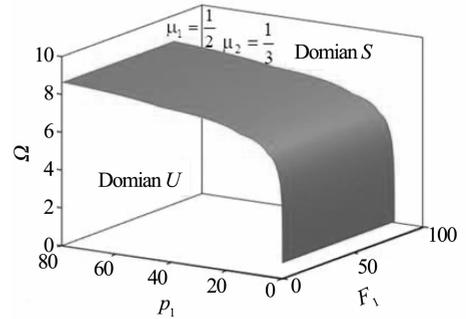


图6 阈值曲面及其两个参数空间

Fig. 6 Threshold surface and its two parameter spaces

图6表明, 当阻尼系数 μ_1 和 μ_2 , 以及激励频率 Ω 给定, 激励幅值 F_1 和 p_1 位于阈值曲面的下方时, 满足高维非自治非线性动力系统的横截相交条件, 即环形天线结构等效圆柱壳可能发生混沌运动。

图7为不同阻尼参数下的阈值曲面. 图(7a)中固定 $\mu_2 = \frac{1}{3}$, μ_1 分别取 $\mu_{11} = \frac{1}{2}$, $\mu_{12} = \frac{3}{4}$, $\mu_{13} = 1$. 从图(7a)中可以观察到随着阻尼系数 μ_1 的增大, 稳定流形和不稳定流形横截相交的区域逐渐变小, 即环形天线结构等效圆柱壳混沌发生的区域逐渐变小; 图(7b)中固定 $\mu_1 = \frac{1}{2}$, μ_2 分别取 $\mu_{21} =$

$\frac{1}{3}$, $\mu_{22} = \frac{1}{2}$, $\mu_{23} = \frac{2}{3}$. 从图(7b)中同样可以观察到随着阻尼系数 μ_2 的增大, 环形天线结构等效圆柱壳混沌发生的区域逐渐变小。

相图、庞加莱截面可以描述系统几何结构在相空间中的变化情况, 这些不同的指标可以看作是混

沌运动出现的证据. 接下来将从这两个方面对环形天线结构等效圆柱壳的动力学进行分析.

图8和图9表示环形天线结构等效圆柱壳系统在平面 (x_1, x_2) 上的相图和平面 (x_1, x_2) 上的庞加莱截面图.

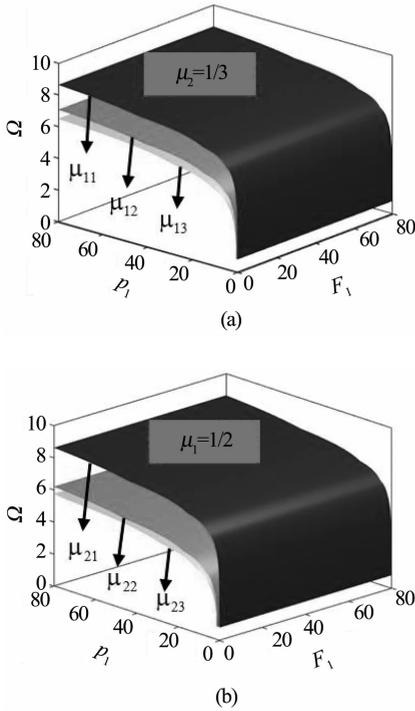


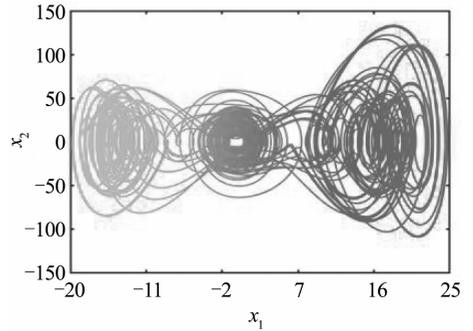
图7 不同阻尼参数 μ_i ($i=1, 2$) 下的阈值曲面
Fig. 7 The chaotic threshold surfaces are obtained with different damping parameters μ_i ($i=1, 2$)

首先,根据前面的参数选取可知晓 $m_4 = -\frac{80}{27}$,

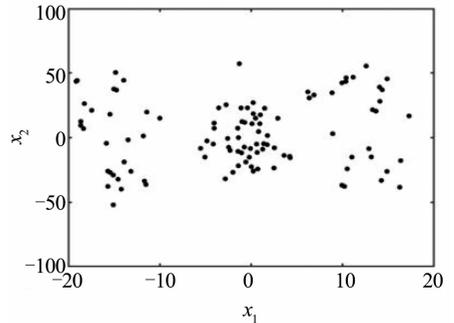
其它参数以及阈值曲面下方取外激励分别为
 $m_6 = 0.2, m_8 = 0.7, \omega_2^2 = 2, n_4 = 1.6,$
 $n_5 = 0.1, n_7 = 0.8, n_8 = 1.5, n_9 = 1,$
 $n_{10} = 0.5, p_1 = 40, F_1 = 70$

由图8可知,系统发生了混沌运动,且系统存在三个混沌吸引子,经计算,此时 $k = 4$.

图9为外激励幅值 $F_1 = 100$ 时,系统在平面 (x_1, x_2) 上的相图和庞加莱截面图. 从图9可以看出系统一阶模态的振动幅度随着外激励的增大而增大. 同样,由相图可以看出振幅在三个区域跳跃,天线整体等效圆柱壳结构在做呼吸形式的振动,且在正平衡点处的振幅大于负平衡点处的振幅,说明呼吸振动时天线结构的膨胀幅度大于收缩幅度.

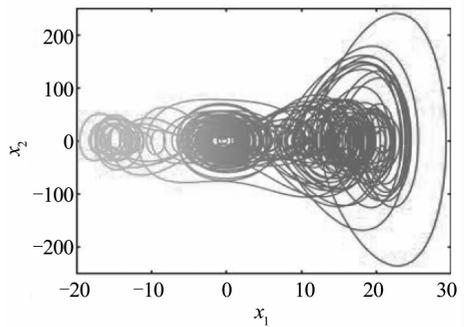


(a) 平面 (x_1, x_2) 上的相图
(a) The phase portrait on plane (x_1, x_2)

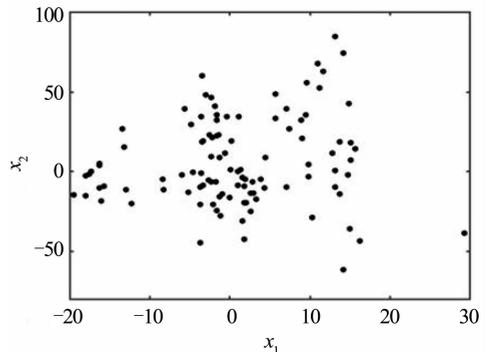


(b) 平面 (x_1, x_2) 上的庞加莱截面图
(b) The Poincaré section on plane (x_1, x_2)

图8 外激励 $F_1 = 70$ 时,系统的多脉冲混沌运动图
Fig. 8 Multi-pulse chaotic motion diagrams of the system when external excitation $F_1 = 70$



(a) 平面 (x_1, x_2) 上的相图
(a) The phase portrait on plane (x_1, x_2)



(b) 平面 (x_1, x_2) 上的庞加莱截面图
(b) The Poincaré section on plane (x_1, x_2)

图9 外激励 $F_1 = 100$ 时,系统的多脉冲混沌运动图
Fig. 9 Multi-pulse chaotic motion diagrams of the system when external excitation $F_1 = 100$

4 结论

本章给出了改进的高维非线性系统广义 Melnikov 理论,并直接应用于环形天线结构等效圆柱壳高维非线性系统复杂动力学的分析,省略了通过奇异摄动法和规范型理论对系统方程化简的过程,使得理论分析结果更加接近原系统的性质。

应用广义 Melnikov 方法得到了参数激励和面内激励联合作用下环形天线结构等效圆柱壳发生混沌的条件。解析地研究了环形天线结构等效圆柱壳的全局分叉和 Smale 马蹄意义下的混沌运动,并且得到了环形天线结构等效圆柱壳可能发生混沌运动的参数域,为圆柱壳稳定性控制提供了有价值的参数指导。数值模拟进一步表明:

(1) 环形天线结构等效圆柱壳发生混沌的参数域随着阻尼系数的增大而减小,说明环形天线结构等效圆柱壳在相对较小的阻尼下,更易发生 Shilnikov 型的脉冲混沌运动;

(2) 从图 8 和图 9 的相图和庞加莱截面可以判断系统在正负以及原点三个平衡点处存在三个混沌吸引子,从而以这三个混沌吸引子为中心构成三个吸引域。从图 8(b) 和图 9(b) 轨线穿过庞加莱截面打点的位置可判断出随着外激励幅值的增大,一阶模态的正平衡点处吸引域增大,负平衡点处吸引域变小。

参 考 文 献

- 1 陈务军, 关富玲, 陈向阳, 等. 大型构架式可展开折叠天线结构设计方案研究(一). 空间结构, 1998, 4(3): 37~42, 25 (Chen W J, Guan F L, Chen X Y, et al. Study on project of large deployable retractable truss antenna(I). *Spatial Structures*, 1998, 4(3): 37~42, 25 (in Chinese))
- 2 Li T. Deployment analysis and control of deployable space antenna. *Aerospace Science and Technology*, 2012, 18(1): 42~47
- 3 Morterolle S, Maurin B, Quirant J, et al. Numerical form-finding of geotensoid tension truss for mesh reflector. *Acta Astronautica*, 2012, 76(4): 154~163
- 4 You B D, Zhang H B, Li W B, et al. Dynamic analysis of satellite antenna system with joint clearance and reflector flexibility. *Journal of Aerospace Engineering*, 2012, 27(2): 297~307
- 5 Zhang S X, Du J L, Wang W. Two-step structural design of mesh antennas for high beam pointing accuracy. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 30: 604~613
- 6 胡海岩, 田强, 张伟, 等. 大型网架式可展开空间结构的非线性动力学与控制. 力学进展, 2013, 43: 390~414 (Hu H Y, Tian Q, Zhang W, et al. Nonlinear dynamics and control of large deployable space structures composed of trusses and meshes. *Advances in Mechanics*, 2013, 43(4): 390~414 (in Chinese))
- 7 Liu T, Zhang W, Wang J F. Nonlinear dynamics of composite laminated circular cylindrical shell clamped along a generatrix and with membranes at both ends. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(2): 1393~1417
- 8 Zhang W, Chen J, Zhang Y F, et al. Continuous model and nonlinear dynamic responses of circular mesh antenna clamped at one side. *Engineering Structures*, 2017, 151: 115~135
- 9 Yang S W, Zhang W, Mao J J. Nonlinear vibrations of carbon fiber reinforced polymer laminated cylindrical shell under non-normal boundary conditions with 1: 2 internal resonance. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2019, 74: 317~336
- 10 Wu R Q, Zhang W, Behdinan K. Vibration frequency analysis of beam-ring structure for circular deployable truss antenna. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2019, 19(2): 1950012
- 11 Camassa R, Kovacic G, Tin S K. A Melnikov method for homoclinic orbits with many pulses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1998, 143: 105~193
- 12 Kovacic G, Wettergren T A. Homoclinic orbits in the dynamics of resonantly driven coupled pendula. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1996, 47(2): 221~264
- 13 Zhang L, Chen F Q. Global bifurcations of symmetric cross-ply composite laminated plates with 1: 2 internal resonance. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, 98(3): 474~490
- 14 Wang Y, Li F M, Shu H S. Nonlocal nonlinear chaotic and homoclinic analysis of double layered forced viscoelastic nanoplates. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 122: 537~554
- 15 Zhang W, Zheng Y, Liu T, et al. Multi-pulse jumping double-parameter chaotic dynamics of eccentric rotating ring truss antenna under combined parametric and external excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(1): 761~800
- 16 秦琅, 谢建华. 基于 Melnikov 方法的单自由度干摩擦振子的混沌分析. 动力学与控制学报, 2018, 16(3): 239

- ~ 243 (Qin L, Xie J H. Chaos analysis of a single-degree-of-freedom dry friction oscillator based on Melnikov method. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(3): 239 ~ 243 (in Chinese))
- 17 李海涛, 丁虎, 陈立群. 带有非对称势能阱特性的双稳态能量采集系统混沌动力学分析. *振动与冲击*, 2020, 39(18): 55 ~ 59, 69 (Li H T, Ding H, Chen L Q. Chaotic dynamics of a bi-stable energy harvesting system with asymmetric potential well characteristics. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(18): 55 ~ 59, 69 (in Chinese))
- 18 Ngouabo U G, Tuwa P R N, Noubissie S, et al. Nonlinear analysis of electrostatic micro-electro-mechanical systems resonators subject to delayed proportional-derivative controller. *Journal of Vibration and Control*, 2021, 27(1-2): 220 ~ 233
- 19 李双宝, 马茜茜, 张伟. 非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展. *动力学与控制学报*, 2020, 18(2): 9 ~ 20 (Li S B, Ma X X, Zhang W. Research progress in Melnikov method for global dynamics of non-smooth systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(2): 9 ~ 20 (in Chinese))
- 20 Govacic G. Dissipative dynamics of orbits homoclinic to a resonance band. *Physics Letters A*, 1992, 167: 143 ~ 150
- 21 Jones C K R T. Geometric singular perturbation theory. Berlin; Springer, 1995: 44 ~ 118
- 22 Yagasaki K. The method of Melnikov for perturbations of multi-degree-of-freedom Hamiltonian systems. *Nonlinearity*, 1999, 12: 799 ~ 822

RESEARCH ON COMPLEX DYNAMICS OF A CIRCULAR ANTENNA STRUCTURE*

Ma Wensai¹ Lü Shufeng^{1†} Yang Shaowu² Zhang Wei³

(1. School of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

(2. College of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, China)

(3. Faculty of Materials and Manufacturing, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract Partial improved high-dimensional generalized Melnikov method is developed to study chaotic motions of a nonlinear dynamical system, and applied to investigate complex nonlinear dynamical behaviors, i. e., chaotic motions of a circular antenna structure. By defining appropriate cross-sections, the Melnikov function is developed for studying five dimensional parametric autonomous nonlinear dynamical systems, with the region of multi-pulse chaotic motion in the sense of Smale horseshoe and the judgement theorem being obtained. The theoretical results are applied to study chaotic motion of the circular antenna structure under combined in-plane excitation and transverse excitation. The unstable region of the system with multi-pulse chaotic vibration and the corresponding parameter conditions are derived. The influence of damping and parameter excitation coefficients on the dynamic behavior of the system are discussed. Phase diagrams are given by numerical simulation to verify the theoretical results.

Key words circular antenna structure, nonlinear system, complex dynamics, Melnikov method

Received 26 April 2021, Revised 11 June 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (12102207, 11832002, 12002057, 11862020), 2020 Policy Project of Introducing Excellent Talents at the Same Level of Inner Mongolia Autonomous Region (DC2100001428) and Natural Science Foundation of Inner Mongolia University of Technology (ZY202010).

† Corresponding author E-mail: shufenglu@163.com