

开链机械臂的反馈 Hamel 变分积分子*

沈伟清 王本亮 史东华[†]

(北京理工大学 数学与统计学院, 北京 100081)

摘要 在几何力学框架下,首先,推导了开链机械臂的反馈 Hamel 变分积分子,其中用反馈控制算法实现了 Hamel 积分子的寻根;其次,将上述算法用于计算反应规划的正向动力学,在此基础上将回转力引入传统人工势场法来设计斥力,可以克服传统人工势场法中易陷入势场局部极小的缺点,实现机械臂整臂的实时避障轨迹规划;最后,通过两个数值仿真验证了上述所提算法的有效性.

关键词 几何力学, Hamel 变分积分子, 反应规划, 回转力

中图分类号: TP241

文献标志码: A

引言

机械臂传统运动规划算法大致可分为路径规划和反应规划两种方式. 路径规划通常由随机采样生成树、最优控制等方法得到可行或最优的避障路径,如 Kuffner 和 LaValle 等^[1]提出的快速随机生成树法(Rapid Exploring Random Trees, RRT), Junge 和 Marsden 等^[2]提出的离散力学与最优控制方法(Discrete Mechanics and Optimal Control, DMOC),以及其他学者对上述方法一系列的改进,如 RRT-connect, RRT, Batch Informed Trees 等^[3,4]. 这些算法用于机械臂路径规划时存在难以实时实现,计算复杂度高等缺陷. 反应规划则通常由操作空间中引入的虚拟势场产生的力实现避障,如 Khatib^[5]提出的人工势场法, Chang 和 Marsden 提出的回转力方法^[6],以及改进的人工势场法^[7]等. 这些算法主要应用于移动机器人领域.

机械臂精确高效的反应规划往往要求解正向动力学问题. 即在给定机械臂状态变量以及关节力或力矩的前提下确定其加速度^[8]. 解此问题的多数方法使用 Lagrange 形式,并通过变分原理推导 Euler-Lagrange 方程,由给定初值的微分方程积分得到任意时刻的系统状态. 在需长时间进行高精度控制机械臂场景中,其控制算法如何长时间保持系统

守恒量,进而能定性准确地反应连续系统行为仍然是关键挑战. 对于离散时间仿真,一些先进的微分方程数值算法也会因误差积累使系统产生耗散. 为了解决这一问题, Kane 等^[9]说明了 Newmark 算法在某种意义上是离散力学的变分版本,可以保辛结构和动量,拥有较为出色的全局能量行为. Marsden 和 West^[10]提出了变分积分子(VI),通过对 Lagrange 函数离散变分得到的离散 Euler-Lagrange (DEL)方程进行求解,构造了一种应用广泛的保辛算法. 在此基础上出现的李群/李代数变分积分子已应用于诸多动力学建模与控制研究中^[11-14]. 虽然基于 DEL 方程的变分积分子保辛,但仍然存在一定的计算复杂性. 变分积分子将动力学方程的积分转化为代数方程组寻根,计算复杂性主要体现在计算 DEL 方程和雅可比逆矩阵两方面. 在递归动力学的启发下, Lee 等^[15]提出了多体系统的一种李群变分积分子,将 DEL 的计算转化为求解离散逆动力学问题,并借助铰接体惯性算法(Articulated Body Inertial Algorithm, ABI)近似计算雅可比逆矩阵,得到了一种计算复杂度只有 $O(n)$ 的算法.

通常情况下,机器人最显著的物理特征由几何来自自然描述. Brockett^[16]基于刚体运动的李群结构展示了如何用几何方式来描述运动链. 关于用微分几何和李群语言研究机器人系统的表述参见文献

2021-06-01 收到第1稿,2021-06-08 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11872107)

[†] 通信作者 E-mail: dshi@bit.edu.cn

[8,17]. 本文使用几何力学框架建立开链机械臂动力学模型并处理运动规划问题,建立了适用于开链机械臂多体系统的 Hamel 变分积分子,并引入反馈控制实现 Hamel 积分子寻根计算,使算法计算复杂度为 $O(n)$;此外将上述算法应用于反应规划的正向动力学计算,提出回转力与人工势场法的实时避障轨迹规划算法,可以克服传统人工势场法中易陷入势场局部极小的缺点.

本文其余部分安排如下:首先,利用旋量理论及指数积(Product of Exponentials, POE)公式,对开链机械臂正运动学建模,并在 Lagrange 力学框架下推导了其递归动力学及带反馈的 Hamel 变分积分子;其次,将回转力引入人工势场法中,通过回转力改进势场法中的斥力,实现机械臂整臂的实时避障轨迹规划;最后,通过两个数值仿真验证了上述所提算法的有效性.

1 基于 POE 公式的正运动学建模

本节给出机械臂正运动学建模方法.

若机械臂末端刚体的体坐标系 $\{T\}$ 相对于惯性坐标系 $\{S\}$ 的初始位形为 $T_{st}(0)$,刚体绕螺旋轴 $S = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathfrak{se}(3) \approx \mathbb{R}^6$ (其中 $\|\boldsymbol{\omega}\|$ 或 $\|\boldsymbol{\nu}\|$ 为 1) 做螺旋运动后, $\{T\}$ 的最终位形 T_{st} 可表示为 θ 的指数形式:

$$T_{st}(\theta) = e^{\hat{S}\theta} T_{st}(0) \quad (1)$$

此处,若 $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$, θ 为绕螺旋轴转动的角度; $\|\boldsymbol{\omega}\| = 0$, θ 为沿螺旋轴移动的距离,“ $\hat{\cdot}$ ”为帽子映射,指数映射

$$e^{\hat{S}\theta} \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} e^{\hat{\omega}\theta} & (I - e^{\hat{\omega}\theta})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) + \theta\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^T\boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega} = 1 \\ \begin{bmatrix} I & \theta\boldsymbol{\nu} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \end{cases}$$

$$e^{\hat{\omega}\theta} = I + \hat{\omega}\sin(\theta) + \hat{\omega}^2(1 - \cos(\theta)) \quad (2)$$

对于 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ 有

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

n 连杆开链机械臂关节空间 Q 是各独立关节变量 $\theta_i (1 \leq i \leq n)$ 所在空间 S^1 的 n 重笛卡尔积 T^n . 各关节螺旋运动加以组合得到机械臂末端正运动学映射 $T_{st}: Q \rightarrow SE(3)$ 如下^[17]:

$$T_{st}(\boldsymbol{\theta}) = e^{S_1\theta_1} e^{S_2\theta_2} \dots e^{S_n\theta_n} T_{st}(0) \quad (3)$$

2 开链机械臂的 Hamel 变分积分子

为模拟开链机械臂多体系统,本节给出开链机械臂的 Hamel 变分积分子,通过建立在每个杆上的活动标架描述运动,并采用变分原理推导开链机械臂 Hamel 方程,由此得出逆动力学方程.最后将上述过程离散化,将正向动力学方程的积分问题转化为 DEL 方程的寻根问题,并将文献[14]中得到的开链机械臂 Hamel 变分积分子进一步简化更新,应用于冗余机械臂路径规划与反应规划中.

首先,我们通过 Lagrange 力学框架推导开链机械臂的递归动力学方程.考虑 n 连杆,关节位形 $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in T^n$. 在第 i 个杆的质心处建立随体标架 $\{i\}$, 记 $\mathbf{g}_{i-1,i} \in SE(3)$ 为标架 $\{i\}$ 相对于标架 $\{i-1\}$ 的位姿表示, $\mathbf{g}_{0,i}$ 简记为 \mathbf{g}_i , 则有

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_{i-1}\mathbf{g}_{i-1,i}, \text{且 } \mathbf{g}_{i-1,i}(\boldsymbol{\theta}_i) = \mathbf{g}_{i-1,i}(0)e^{A_i\theta_i} \quad (4)$$

其中 A_i 为标架 $\{i\}$ 旋量轴在标架 $\{i\}$ 中的表示,它与旋量轴 S_i 关系满足:

$$A_i = Ad_{\mathbf{g}_i^{-1}(0)} S_i.$$

记 $\xi_i \in \mathfrak{se}(3)$ 为第 i 杆在体坐标系下运动旋量(body twist), 则有向前动力学方程:

$$\begin{aligned} \xi_i &= T_{\mathbf{g}_i} L_{\mathbf{g}_i^{-1}} \dot{\mathbf{g}}_i = \mathbf{g}_i^{-1} \dot{\mathbf{g}}_i = \\ & (\mathbf{g}_{i-1}\mathbf{g}_{i-1,i})^{-1} (\dot{\mathbf{g}}_{i-1}\mathbf{g}_{i-1,i} + \mathbf{g}_{i-1}\dot{\mathbf{g}}_{i-1,i}) = \\ & Ad_{\mathbf{g}_{i-1,i}} \xi_{i-1} + A_i \dot{\theta}_i \end{aligned} \quad (5)$$

记 $\boldsymbol{\eta}_i = T_{\mathbf{g}_i} L_{\mathbf{g}_i^{-1}} \delta \mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i^{-1} \delta \mathbf{g}_i$, 则与上式推导类似有

$$\boldsymbol{\eta}_i = Ad_{\mathbf{g}_{i-1,i}} \boldsymbol{\eta}_{i-1} + A_i \delta \theta_i.$$

记 \mathbf{f}_i 为作用在标架 $\{i\}$ 的力,驱动器只需在关节的旋量轴方向上提供标量力或力矩,则加在第 i 关节处的力矩

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{f}_i^T A_i = A_i^T \mathbf{f}_i \quad (6)$$

开链机械臂的 Lagrange 函数为

$$l(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \langle I_i \boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_i \rangle - \sum_{i=1}^n U(\mathbf{g}_i) \quad (7)$$

其中, I_i 为第 i 杆的惯性矩阵, $U(\mathbf{g}_i)$ 为机械臂的势能函数. 令 $\mathbf{e}_3 = [0, 0, -9.81, 0]^T$ 为惯性系下的重力矢量, 则

$$U(\mathbf{g}_i) = \langle m_i \mathbf{e}_3, \mathbf{g}_i \mathbf{r} \rangle,$$

其中 $\mathbf{r} = [0, 0, 0, 1]^T$.

根据 Lagrange-d'Alembert 原理:

$$\delta \int_a^b l(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) dt + \sum_{i=1}^n \int_a^b \langle \boldsymbol{\tau}_i, \delta \theta_i \rangle dt = 0$$

以及变分公式^[13]

$$\delta \xi = \dot{\boldsymbol{\eta}} + [\xi, \boldsymbol{\eta}]$$

得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \delta \int_a^b \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{I}_i \xi_i, \xi_i \rangle - U(\mathbf{g}_i) \right] dt + \\ &\sum_{i=1}^n \delta \int_a^b \langle \boldsymbol{\tau}_i, \boldsymbol{\theta}_i \rangle dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b \langle -\mathbf{I}_i \dot{\xi}_i + \\ &[\xi_i, \mathbf{I}_i \xi_i]^* - T^* L_{g_i} dU(\mathbf{g}_i) + \mathbf{f}_i, \boldsymbol{\eta}_i \rangle dt + \\ &\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b \langle -Ad_{g_{i+1}}^* \mathbf{f}_{i+1}, \boldsymbol{\eta}_i \rangle dt, \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_i$ 的任意性, 可得开链机械臂的向后动力学方程:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i &= Ad_{g_{i+1}}^* \mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{I}_i \dot{\xi}_i - [\xi_i, \mathbf{I}_i \xi_i]^* + \\ &T^* L_{g_i} dU(\mathbf{g}_i) \end{aligned} \quad (8)$$

离散情形 下面给出开链机械臂的 Hamel 变分积分分子. 记 $\{\mathbf{g}_i^k\}$ 为第 k 时刻的第 i 个杆的位形, Δt 为时间步长. 离散时间网格如图 1 所示.

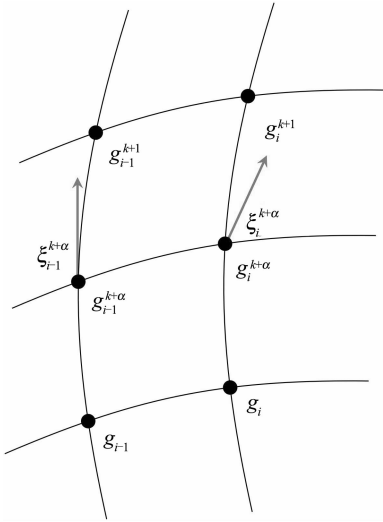


图1 离散积分分子网格

Fig.1 Discrete-time integrator grids

引理 1 对于 $\alpha \in [0, 1]$, 由 $\mathbf{g}_i^{k+1} = \mathbf{g}_i^k \exp(\Delta t \xi_i^{k+\alpha})$ 定义对流速度 $\xi_i^{k+\alpha}$ 满足

$$\xi_i^{k+\alpha} = Ad_{g_{i-1}^k} \xi_{i-1}^{k+\alpha} + \mathbf{A}_i \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} - \boldsymbol{\theta}_i^k}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (9)$$

证明 由 $\mathbf{g}_i^{k+1} = \mathbf{g}_{i-1}^{k+1} \mathbf{g}_{i-1,i}^{k+1}$ 结合 $\xi_i^{k+\alpha}$ 定义有 $\mathbf{g}_i^k \exp(\Delta t \xi_i^{k+\alpha}) = \mathbf{g}_{i-1}^k \exp(\Delta t \xi_{i-1}^{k+\alpha}) \mathbf{g}_{i-1,i}^{k+1}$, 故

$$\begin{aligned} \exp(\Delta t \xi_i^{k+\alpha}) &= \mathbf{g}_{i-1,i}^{-k} \exp(\Delta t \xi_{i-1}^{k+\alpha}) \mathbf{g}_{i-1,i}^k \mathbf{g}_{i-1,i}^{-k} \mathbf{g}_{i-1,i}^{k+1} \\ &= Ad_{g_{i-1,i}^k} \exp(\Delta t \xi_{i-1}^{k+\alpha}) e^{-A_i \theta_i^k} \mathbf{g}_{i-1,i}^{-1}(\mathbf{0}) \mathbf{g}_{i-1,i}(\mathbf{0}) e^{A_i \theta_i^{k+1}} = \end{aligned}$$

$$\exp(Ad_{g_{i-1,i}^k} \Delta t \xi_{i-1}^{k+\alpha}) \cdot \exp(\mathbf{A}_i (\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} - \boldsymbol{\theta}_i^k))$$

由 BCH 公式^[18]可得式 (9). 证毕.

记 $\boldsymbol{\eta}_i^{k+\alpha} = \alpha \boldsymbol{\eta}_i^{k+1} + (1-\alpha) \boldsymbol{\eta}_i^k$, 我们不加证明给出引理^[14]:

引理 2 如下离散变分公式成立:

$$\delta \xi_i^{k+\alpha} = [\xi_i^{k+\alpha}, \boldsymbol{\eta}_i^{k+\alpha}] + \frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\eta}_i^{k+1} - \boldsymbol{\eta}_i^k) \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_i \delta \boldsymbol{\theta}_i^k = \boldsymbol{\eta}_i^k - Ad_{g_{i-1,i}^k} \boldsymbol{\eta}_{i-1}^k \quad (11)$$

记离散 Lagrange 函数

$$l_d = \Delta t \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} \langle \mathbf{I}_i \xi_i^{k+\alpha}, \xi_i^{k+\alpha} \rangle - U(\mathbf{g}_i^k) \right] \quad (12)$$

则有如下定理:

定理 1 下面陈述是等价的:

1. 开链机械臂的离散运动方程

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^k &= Ad_{g_{i+1}^k}^* \mathbf{f}_{i+1}^k - (1-\alpha) [\xi_i^{k+\alpha}, \mathbf{I}_i \xi_i^{k+\alpha}]^* - \\ &\alpha [\xi_i^{k-1+\alpha}, \mathbf{I}_i \xi_i^{k-1+\alpha}]^* + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I}_i \xi_i^{k+\alpha} - \\ &\frac{1}{\Delta t} \mathbf{I}_i \xi_i^{k-1+\alpha} + T^* L_{g_i^k} dU(\mathbf{g}_i^k) \end{aligned} \quad (13)$$

成立, 其中 $i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N-1$.

2. 对于任意 i , 离散 Lagrange-d'Alembert 原理

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} l_d(\mathbf{g}_i^{k+\alpha}, \mathbf{g}_i^{k+\alpha}) + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=1}^n \langle \boldsymbol{\tau}_i^k, \delta \boldsymbol{\theta}_i^k \rangle = 0 \quad (14)$$

成立, 其中 $\delta \xi_i^{k+\alpha}$ 满足式 (10), $\boldsymbol{\eta}_i^0 = \boldsymbol{\eta}_i^N = \mathbf{0}$.

证明 由引理 2 及离散变分原理, 用边界条件 $\boldsymbol{\eta}_i^0 = \boldsymbol{\eta}_i^N = \mathbf{0}$, 及 $\boldsymbol{\eta}_i^k, i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, N-1$ 的任意性可得式 (13). 证毕.

注 文献[14]已有上述定理类似的陈述和证明, 本文利用引理 1 对其进行了更新和简化.

由此, 我们给出开链机械臂的离散递归逆动力学算法 I. 逆动力学方程一般用于最优控制问题中力矩约束的计算.

Algorithm 1 Discrete Recursive Inverse Dynamics

Input: Manipulator parameters $S_i, T_{st}(0), \mathbf{I}_i, \mathbf{g}_{i-1,i}(0)$ and $\boldsymbol{\theta}^k$, $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$, time step Δt

Output: moment $\boldsymbol{\tau}$

1: for $i = 1 \rightarrow n$ do

2: $\mathbf{g}_{i-1,i}^k = \mathbf{g}_{i-1,i}^{k+1} e^{A_i \theta_i^k}$

3: $\xi_i^{k+\alpha} = Ad_{g_{i-1,i}^k} \xi_{i-1}^{k+\alpha} + \mathbf{A}_i \cdot \frac{\boldsymbol{\theta}_i^{k+1} - \boldsymbol{\theta}_i^k}{\Delta t}$

4: end for

5: for $i = n \rightarrow 1$ do

6: $\mathbf{f}_i^k \leftarrow$ by formula (13)

7: $\boldsymbol{\tau}_i^k \leftarrow$ by formula (6)

8: end for

3 Hamel 方程寻根过程

本节我们通过反馈控制实现 Hamel 积分分子的寻根计算。

DEL 方程定义了系统的离散演化过程,若已知开链机械臂广义坐标为 θ^k ,为计算下一时刻满足约束流形(13)的解 θ^{k+1} ,从控制观点看^[15,19],可由 DEL 方程所得的 $\tau_e = h(q^k, v^{k+1})$ (由算法 I 定义)作为反馈控制引入机械臂运动方程,若 $\|\tau_e\|$ 小于某收敛阈值 ε ,则将 θ^{k+1} 视为下一时刻满足 DEL 方程的解,否则可利用 τ_e 构造迭代策略更新计算 θ^{k+1} 直到满足 DEL 方程。

机械臂封闭形式的动力学为

$$\ddot{\theta}^k = M^{-1}(\theta^k)(-\tau_e - C(\theta^k, \dot{\theta}^k) - P(\theta^k)) \quad (15)$$

其中, $\dot{\theta}^k$ 为关节角速度, $M(\theta^k)$ 为关节空间质量矩阵, $C(\theta^k, \dot{\theta}^k)$ 为科氏力、离心力等, $P(\theta^k)$ 为关节空间重力。

使用二阶中心差分近似 θ^{k+1} :

$$\theta^{k+1} = \Delta t^2 \ddot{\theta}^k + 2\theta^k - \theta^{k-1},$$

记 $k+1$ 时刻位形的第 l 次迭代为 $\theta_{(l)}^{k+1}$, 则

$$\theta_{(l+1)}^{k+1} = \Delta t^2 M^{-1}(\theta^k) \left(-\sum_{j=0}^l \tau_{e(j)} - C(\theta^k, \dot{\theta}^k) - P(\theta^k) \right) + 2\theta^k - \theta^{k-1},$$

从而迭代更新策略为:

$$\theta_{(l+1)}^{k+1} = \theta_{(l)}^{k+1} - \Delta t^2 M^{-1}(\theta^k) \tau_{e(l)} \quad (16)$$

此迭代过程如图 2 所示。

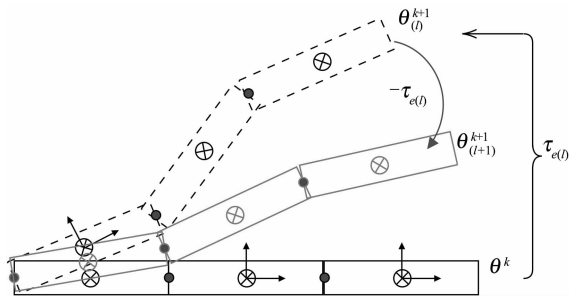


图 2 由反馈 $\tau_{e(l)}$ 进行迭代
Fig. 2 Iteration with feedback $-\tau_{e(l)}$

4 回转力改进人工势场法

直接在关节空间中设计控制律并不直观. 操作空间控制的思想是在需要执行任务的操作空间中设计控制律 f , 由雅可比矩阵将其转化为关节空间力矩 τ .

由 Khatib^[5] 提出的人工势场法常用于机器人操作空间中设计反应控制律,其关键在于将机器人放入一个虚拟的势场中,根据目标点产生的引力 f_{att} 和障碍物产生的斥力 f_{rep} 综合作用在机器人上实现避障目的. 对机械臂而言,考虑机械臂末端位置为 x_e , 目标点位置为 x_d, k_p, k_v 为控制系数,则施加在机械臂末端的引力取为

$$f_{att} = -k_p(x_e - x_d) - k_v \dot{x}_e \quad (17)$$

为简单起见,考虑球形障碍物 O , 当机械臂进入避障范围 ($|\rho| \leq \rho_0$), 假设机械臂连杆 i 距离障碍物最近一点为 $x_i \in \mathbb{R}^3$, 则施加在连杆 i 上的斥力

$$f_{rep, x_i} = \eta \left(\frac{1}{|\rho|} - \frac{1}{\rho_0} \right) \frac{1}{|\rho|^2} \frac{\partial |\rho|}{\partial x_i} \quad (18)$$

其中, η 为增益项, ρ 为 x_i 指向障碍物最近点向量, ρ_0 为安全距离。

若目标点对机械臂的引力与障碍物对机械臂的斥力合力为 0, 那么机械臂将陷入人工势场法的局部极小点. 我们提出一种改进策略如下: 当机械臂进入避障范围 ($|\rho| \leq \rho_0$) 且 $\rho \cdot \dot{x}_i > 0$, 通过引入回转力取代式 (18):

$$f_{rep, x_i}^* = \Gamma(\rho, x_i) \dot{x}_i \quad (19)$$

其中 $\Gamma(s)$ 为待定斜对称矩阵, 有

$$\Gamma(\rho, x_i) = k_{obs} \exp \left\{ \arccos \left(\frac{\rho \cdot \dot{x}_i}{|\rho| |\dot{x}_i|} \right) - 1 \right\} \cdot \frac{1}{|\rho|} \frac{1}{1 + e^{|\rho| - \rho_0}} \cdot \hat{e} \quad (20)$$

这里 k_{obs} 为避障系数, $\hat{e} = \hat{\rho} \dot{x}_i / |\hat{\rho} \dot{x}_i|$ 为速度的旋转轴^[20]. 利用

$$\tau = J_x^T M_x f \quad (21)$$

可将操作空间中的控制律转化为关节空间等效力矩, 其中操作空间惯性矩阵 $M_x = J_x^{-T} M(\theta) J_x^{-1}$, 这里 J_x 为与 f 在同一个标架下描述的雅可比矩阵. 下面给出改进人工势场法算法 II:

Algorithm II Reaction Planning

Input: Manipulator parameters $S_i, \theta_i, T_{st}(0), I_i, g_{i-1,i}(0)$, Obstacle avoidance coefficient $k_p, k_v, \rho_0, k_{obs}$ and Target point x_d

1: while Manipulator end-effector position x_e has not arrived x_d do

2: $\tau_{att} = J_{x_e}^T M_{x_e} [-k_p(x_e - x_d) - k_v \dot{x}_e], \tau_{rep} = 0$

3: if $|\rho| \leq \rho_0$ and $\rho \cdot \dot{x}_i > 0$

4: calculate f_{rep, x_i}^* by formula (20)

5: $\tau_{rep} = \sum_{i=1}^n J_{x_i}^T M_{x_i} f_{rep, x_i}^*, \tau_{att} = 0$

6: $\tau = \tau_{att} + \tau_{rep}$

7: end while

5 数值计算与分析

本节我们通过平面三连杆正向动力学和四连

杆反应规划两个例子验证所提算法.

5.1 正向动力学

考虑除重力作用外不施加额外力矩的平面三连杆,其各关节为旋转关节,每根杆杆长为 0.1m,质心取在各杆的几何中心,惯性矩阵 $\mathbf{I}_i = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1)$, $i = 1, 2, 3$. 初始位形 $\boldsymbol{\theta} = (0, 0, 0)^T$, 重力矢量 $\mathbf{e}_3 = [0, 0, -9.81, 0]^T$, 时间步长 $\Delta t = 0.01\text{s}$. 将标架取在关节质心处描述动力学,采用 Hamel 变分积分,式(16)中初值 $\boldsymbol{\theta}_{(0)}^{k+1}$ 取为 $\boldsymbol{\theta}^k$, ε 取 10^{-8} ,三连杆运动 100s 中各时间步寻根迭代次数及反馈误差力矩 $\boldsymbol{\tau}_e$ 分别如图 5(a) 和图 5(b) 所示,由其可见: Hamel 积分分子寻根计算迭代数小于等于 4,且 $\boldsymbol{\tau}_e$ 一直保持在 10^{-8} 数量级范围内. 三连杆质心轨迹见图 3,末端 y 轴轨迹如图 4 所示,结果表明反馈 Hamel 变分积分与作为基准算法的半隐式欧拉法^[8] 所得轨迹基本一致.

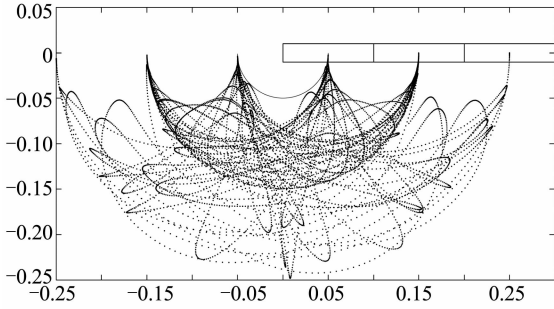


图 3 三连杆各杆质心轨迹

Fig. 3 The trajectory of the center of mass of each link of the three-link manipulator

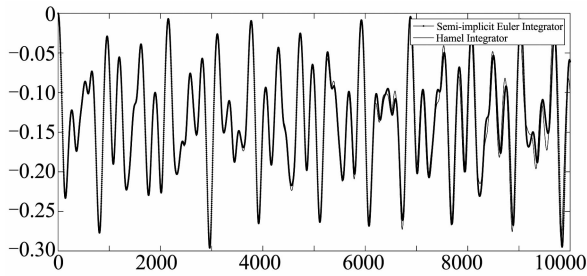


图 4 三连杆末端 y 轴轨迹对比

Fig. 4 Comparison of y position at end-effector of the three-link manipulator

5.2 改进人工势场法

考虑基本参数如表 1 所示的平面四连杆,第 i 杆的旋量轴 S_i :

$$S_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ -\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{q}_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, 4 \quad (22)$$

其中, $\boldsymbol{\omega}_i$ 为旋转轴, \mathbf{q}_i 和 \mathbf{c}_i 分别为关节 i 及质心 i

的位置向量.

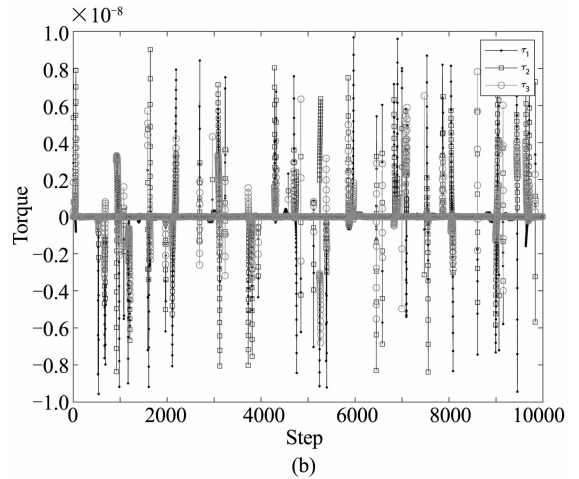
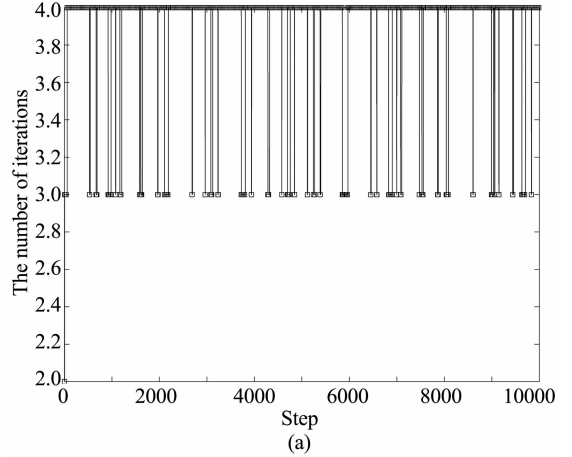


图 5 Hamel 积分分子寻根计算迭代次数及反馈误差力矩 $\boldsymbol{\tau}_e$
Fig. 5 The number of iterations of the root-finding of Hamel's integrators and feedback error $\boldsymbol{\tau}_e$

表 1 平面四连杆旋量参数

Table 1 The screw axes and inertia matrix of the planar four-link manipulator

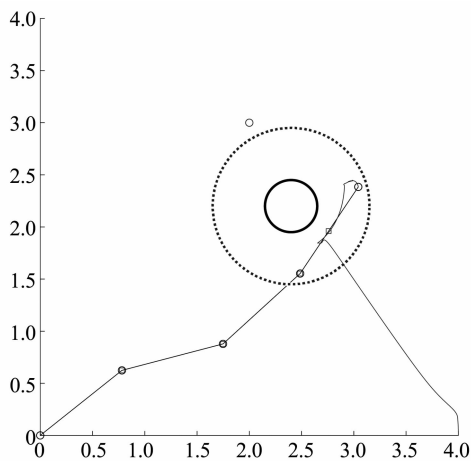
i	$\boldsymbol{\omega}_i$	\mathbf{q}_i	\mathbf{c}_i
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)	(1, 0, 0)
2	(0, 0, 1)	(1, 0, 0)	(2, 0, 0)
3	(0, 0, 1)	(2, 0, 0)	(3, 0, 0)
4	(0, 0, 1)	(3, 0, 0)	(4, 0, 0)
E-E position		(4, 0, 0)	$\mathbf{I}_i = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1)$

平面四连杆初始位姿为

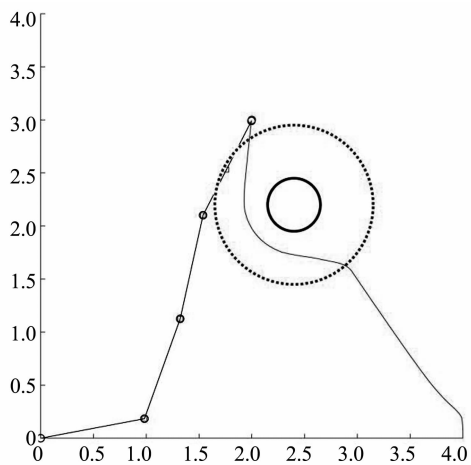
$$\mathbf{T}_{st}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

将标架取在关节质心 \mathbf{c}_i 处描述机械臂动力学,考虑平面四连杆整臂反应规划,用算法 II 所得仿真结果如图 6 所示. 其中位置为 (2.4, 2.2, 0)、半径为 0.25 的内侧圆圈表示障碍物,半径为 0.75 的外侧

虚线圆圈外表示避障的安全区域,位置(2,3,0)的小圆圈表示目标吸引点,曲线为四连杆末端轨迹.当平面四连杆靠近障碍物时,由于传统人工势场法中目标点产生的吸引力和障碍物产生的斥力平衡而使平面四连杆陷入静止.经回转力改进,可使四连杆运动方向偏离障碍物而顺利避障,其轨迹如图6所示.结果表明相比于式(18)中的斥力形式,式(19)在一定程度上可以克服机械臂陷于势场局部极小的缺点.



(a) 人工势场
(a) Artificial potential field method



(b) 回转力
(b) Gyroscopic force

图6 四连杆避障

Fig. 6 Avoidance of planar four-link manipulator

6 总结与展望

本文在 Lagrange 力学框架下推导了机械臂的递归动力学及带反馈的 Hamel 变分积分子,并将回转力引入传统人工势场法中改进斥力设计方式,实

现机械臂整臂的实时避障轨迹规划.下一步将探究 Hamel 变分积分子保动量、保能量等保结构性质,并进一步构造多体系统的 Hamel 场变分积分子,利用场积分子分布式计算特征得到可用于实时并行计算的反应规划算法.

参考文献

- 1 Kuffner J J, LaValle S. RRT-connect: An efficient approach to single-query path planning. In: IEEE International Conferences on Robotics and Automation, San Francisco, CA, 24-28 April, 2000. Piscataway: IEEE, 2000:995 ~ 1001
- 2 Junge O, Marsden J E, Ober-Bilbaum S. Discrete mechanics and optimal control. *ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations*, 2005, 16(2):538 ~ 543
- 3 Karaman S, Frazzoli E. Sampling-based algorithms for optimal motion planning. *The International Journal of Robotics Research*, 2011, 30(7): 846 ~ 894
- 4 Gammell J D, Srinivasa S S, Barfoot T D. Batch informed trees (BIT*): Sampling-based optimal planning via the heuristically guided search of implicit random geometric graphs. In: 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Seattle, 2015. Piscataway: IEEE, 2015: 3067 ~ 3074
- 5 Khatib O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, 1986, 5(1): 90 ~ 98
- 6 Chang D E, Marsden J E. Gyroscopic forces and collision avoidance with convex obstacles. In: Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2003, 295: 145 ~ 160
- 7 Wang W, Zhu M, Wang X, et al. An improved artificial potential field method of trajectory planning and obstacle avoidance for redundant manipulators. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2018, 15(5): 1 ~ 13
- 8 Lynch K M, Park F C. Park. Modern robotics: mechanics, planning, and control. Cambridge: Cambridge University Press, 2017: 269 ~ 298
- 9 Kane C, Marsden J E, Ortiz M, et al. Variational integrators and the newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000, 49(10): 1295 ~ 1325
- 10 Marsden J, West M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001, 10(1): 357 ~ 514
- 11 白龙, 戈新生. 基于球摆模型的离散变分积分子算法研究. *动力学与控制学报*, 2013, 11(4): 295 ~ 300 (Bai L, Ge X S. The discrete variational integrators method of the spherical pendulum. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(4): 295 ~ 300 (in Chinese))
- 12 刘铖, 胡海岩. 基于李群局部标架的多柔体系统动力

- 学建模与计算. 力学学报, 2021, 53(1): 213 ~ 233 (Liu C, Hu H Y. Dynamic modeling and calculation of flexible multibody system based on Lie group local frame. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, 53(1): 213 ~ 233 (in Chinese))
- 13 王亮, 安志朋, 史东华. 几何精确梁的 Hamel 场变分积分子. 北京大学学报(自然科学版), 2016, 52(4): 692 ~ 698 (Wang L, An Z P, Shi D H. Hamel's field variational integrator of geometrically exact beam. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, 2016, 52(4): 692 ~ 698 (in Chinese))
- 14 An Z P, Wu H, Shi D H. Minimum-time optimal control of robotic manipulators based on Hamel's integrators. *Meccanica*, 2019, 54(15): 2521 ~ 2537
- 15 Lee J, Liu C K, Park F C, et al. A linear-time variational integrator for multibody systems. In: *Algorithmic Foundations of Robotics XII*. Berlin: Springer, 2020: 352 ~ 367
- 16 Brockett R W. Robotic manipulators and the product of exponentials formula. In: Fuhrmann P A ed. *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Berlin: Springer, 1984: 120 ~ 129
- 17 Murray R, Li Z, Sastry S. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, 1994: 19 ~ 95
- 18 Michor P W. *Topics in differential geometry*. Washington: American Mathematical Society, 2008: 54 ~ 55
- 19 Chang D E, Jiménez F, Perlmutter M. Feedback integrators. *Journal of Nonlinear Science*, 2016, 26(6): 1693 ~ 1721
- 20 Garimella G, Shekells M, Kobilarov M. A stabilizing gyroscopic obstacle avoidance controller for underactuated systems. In: *2016 IEEE International Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2016*. Piscataway: IEEE, 2016: 5010 ~ 5016

FEEDBACK HAMEL'S VARIATIONAL INTEGRATORS OF OPEN-CHAIN MANIPULATORS*

Shen Weiqing Wang Benliang Shi Donghua[†]

(School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract In this paper, we first derive Hamel's variational integrators for open-chain manipulators in the framework of geometric mechanics, where the roots of Hamel's variational integrators are found by feedback control. Next, we use the above algorithm to solve a forward dynamics problem in reaction planning. As a result, the gyroscopic force is introduced to replace the repulsive force, thus avoiding the local minima dilemma of the artificial potential method, and realizing real-time obstacle avoidance for the whole manipulator. Finally, the effectiveness of the proposed algorithm is illustrated via two numerical examples.

Key words geometric mechanics, Hamel's variational integrators, reaction planning, gyroscopic force

Received 1 June 2021, Revised 8 June 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11872107) .

[†] Corresponding author E-mail: dshi@bit.edu.cn