

(3+1) 维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解*

王双特^{1,2†} 于恒国¹

(1. 温州大学 数理学院, 温州 325035) (2. 乐清市柳市镇第三中学, 温州 325604)

摘要 结合动力系统分支理论, 对一个非线性(3+1)维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程进行理论上的研究. 首先, 根据不同参数值和三次方程判别式分别定性分析了平衡点的类型和相应轨线情况. 其次, 利用 Jacobi 椭圆函数, 从形式上给出了若干有界行波解和同宿轨的公式, 这一结论扩展了已有文献的工作. 最后, 利用 Hamilton 函数法数值地给出了几类多模态近似解, 以此表明有界行波解的周期性.

关键词 (3+1)维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程, 行波解, 平衡点, Hamilton 函数

中图分类号: O415. 6

文献标志码: A

引言

Zakharov-Kuznetsov(ZK)方程作为理论物理学中研究非线性波的一类重要方程, 首先由 Zakharov 和 Kuznetsov 利用磁化等离子体的流体描述得到, 此后 Shivamoggi 等人也得到了 ZK 方程^[1-3]. 一般地, 具有幂律 n 非线性(3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程为

$$u_t + \alpha u^n u_x + (\Delta_{a_1, a_2, a_3} u)_x = 0 \quad (1)$$

其中, α, a_1, a_2, a_3 为实常数, $\Delta_{a_1, a_2, a_3} = a_1 \partial_x^2 + a_2 \partial_x^3 + a_3 \partial_x^4$. 当 $\alpha=0$ 时方程退化为线性的. 当 $a_3=0$ 时认为方程退化为(2+1)维, 若还有 $n=1$, 认为是 KdV 方程的推广形式.

对于 $n=1$, 当 $\Delta_{a_1, a_2, a_3} = \Delta$ (Laplace 算子)时, 文献[4]利用 Extended Simplest Equation 法讨论了一类行波解, 文献[5]利用 F-展开法获得了其它方法不曾给出的形式更丰富的显式行波解, 包括双曲函数解和三角函数解; 当 $a_1=b, a_2=a_3=1$ 时, 文献[6]应用经典李群方法得到了其对称和约化方程, 通过求解约化方程给出原方程的一些精确解; 当 $\alpha=6, a_1=1, a_2=a_3=3$ 时, 文献[7]提出了

Wronski 形式展开法, 通过该方法求出了双孤子解、双三角函数解、Complexiton 解、Matveev 解和 Jacobi 椭圆函数解; 当 $\alpha=1, \Delta_{a_1, a_2, a_3} = \Delta$ 时, 文献[8]证明了相应初值问题解的指数衰减性, 同时指出这个性质与加权 Sobolev 空间中解的持久性及解的唯一连续性相关; 而文献[9, 10]则解决了 $\Delta_{a_1, a_2, a_3} = b\Delta$ 时可能的行波解. 此外文献[11, 12]也进行了深入研究.

对于 $n=2$, 当 $\Delta_{a_1, a_2, a_3} = \Delta$ 时, 文献[13]将其转化为复域中的常微分方程(ODE), 并给出相应亚纯行波解; 文献[14]($\Delta_{a_1, a_2, a_3} = \Delta$)基于交换代数除法定理, 给出了若干首次积分及对应行波解. 对于 n 为正整数, 文献[15, 16]结合动力系统分支理论讨论了一些行波解, 但都取积分常数为零.

基于文献[14~16], 本文定性分析 $n=2$ 和 $\Delta_{a_1, a_2, a_3} = \Delta$ 时的行波解, 即(3+1)维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov(MKdVZK)方程

$$u_t + \alpha u^2 u_x + (\Delta u)_x = 0 \quad (2)$$

假定上述偏微分方程(2)有行波解 $u = u(\xi)$, 化为一个三阶 ODE

$$-cu' + \alpha u^2 u' + 3u''' = 0 \quad (3)$$

其中, $(\dots)'$ 指 $\frac{d}{d\xi}(\dots)$, $\xi = x + y + z - ct$, c 表示波速. 当 $c=0$ 时原方程不显含时间 t . 积分一次得二阶 ODE

$$u'' = \frac{1}{3}cu - \frac{1}{9}\alpha u^3 + C_1 \quad (4)$$

注意 C_1 为积分常数. 引入 $X=u, Y=u'$ 并改写 X 和 Y 为 x 和 y , 得到与式(4)等价的平面三次多项式系统

$$x' = y, y' = \frac{1}{3}cx - \frac{1}{9}\alpha x^3 + C_1 = f(x) \quad (5)$$

由于一个物理系统对于有界行波解具有实际意义, 因此我们常常关注有界解. 设 $\varphi(\xi)$ 是系统(5)的连续解, 且 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \varphi(\xi) = A, \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \varphi(\xi) = B$. 如果: (1) $A=B$, 则称 $\varphi(\xi)$ 为孤立波解; (2) $A \neq B$, 则称 $\varphi(\xi)$ 为扭结波或反扭结波解. 孤立波解对应同宿轨, 扭结或反扭结波解对应异宿轨(连接轨), 周期波解对应周期轨. 因此需利用动力系统分支理论找到系统(5)的同宿轨和周期轨[17, 18]以确定原方程的有界行波解.

一般文献中, 对于 $C_1 \neq 0$ 的情形较少讨论, 故本文对此进一步讨论, 安排如下: 首先分别研究 $C_1 = 0$ 和 $C_1 \neq 0$ 时的相轨线和几类行波解; 其次结合 Hamilton 函数法给出多模态近似解及其数值模拟; 最后总结和讨论.

1 $C_1 = 0$ 的情形

显然地, 当 $C_1 = 0$ 时有平衡点 $O = (0, 0)$ (原点) 和 $E_{1,2} = (x_{1,2}, 0), x_{1,2} = \pm \sqrt{3c/\alpha}$. 后者要求 c 和 α 同号. 当 $c = 0$ 时, $E_{1,2}$ 退化为 O .

先看 O 的 Jacobi 矩阵 $J(O) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{c}{3} & 0 \end{pmatrix}$. 若 $c > 0$, 则 O 是鞍点; 若 $c < 0$, 由对称性定理或连续的首次积分 $y^2 = \frac{1}{3}cx^2 - \frac{1}{18}\alpha x^4 + h$ 可知 O 是中心^[19], 其中 h 是积分常数; 若 $c = 0$, 则 O 是退化的. 注意这个首次积分涵盖了文献[14]的结果.

再看 $E_{1,2}$ 的 Jacobi 矩阵 $J(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{3} & 0 \end{pmatrix}$. 若 $c < 0, E_{1,2}$ 是鞍点; 若 $c > 0, E_{1,2}$ 是中心.

基于以上分析, 分情况讨论闭轨的存在性. 不

妨设相轨线为

$$\Gamma(h) = \{(x, y) \mid H(x, y) = \frac{1}{3}cx^2 - \frac{1}{18}\alpha x^4 + h - y^2 = 0\}. \quad (6)$$

$$(1) c, \alpha > 0$$

此时, 由奇点指标可知, 闭轨所围奇点仅有三种可能: $\{O, E_1, E_2\}, \{E_1\}$ 或 $\{E_2\}$. 常数 h 满足 $h \geq h_0 = -c^2/2\alpha (h_0 < 0)$. 当 $h_0 < h < 0$ 时有两条分别围绕 E_1 和 E_2 的闭轨; 当 $h = 0$ 时仅有过 O 的同宿闭轨 $\Gamma(0)$ 且围绕 E_1 和 E_2 ; 当 $h > 0$ 时仅有一条围绕奇点 O, E_1 和 E_2 的闭轨.

沿同宿轨 $\Gamma(0)$ 的行波解为

$$u(\xi) = \pm \sqrt{\frac{6c}{\alpha}} \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{c}{3}}(\xi + C_2)\right] \quad (7)$$

C_2 为积分常数. 对于一般的 h , 沿闭轨 $\Gamma(h)$ 的行波解形式上为 Jacobi 椭圆余弦函数

$$u(\xi) = \pm \operatorname{Acn}[k(\xi + C_2), m] \quad (8)$$

其中, $A^2 = \frac{3}{\alpha}(c + \sqrt{2ah + c^2}), k^2 = \frac{\sqrt{2ah + c^2}}{3}$ 及 $m^2 = \frac{1}{2} + \frac{c}{2\sqrt{2ah + c^2}}$. 显然式(7)是式(8)的特例.

$$(2) c, \alpha < 0$$

由奇点指标可知闭轨内部只有奇点 O . 常数 h 无限制, 但 $h_0 > 0$. 当 $h = h_0$ 时有同宿轨 $\Gamma(h_0)$; 当 $0 < h < h_0$ 时有围绕 O 的闭轨; 当 $h = 0$ 时上述闭轨退化为奇点 O ; 当 $h < 0$ 和 $h > h_0$ 时无闭轨.

沿同宿轨 $\Gamma(h_0)$ 的行波解为

$$u(\xi) = \pm \sqrt{\frac{3c}{\alpha}} \tanh\left[\sqrt{\frac{-c}{6}}(\xi + C_2)\right] \quad (9)$$

对于 $h \in (0, h_0)$, 沿闭轨 $\Gamma(h)$ 的行波解形式上为 Jacobi 椭圆正弦函数

$$u(\xi) = \pm \operatorname{Asn}[k(\xi + C_2), m] \quad (10)$$

其中, $A^2 = \frac{3}{\alpha}(c + \sqrt{2ah + c^2}), m^2 = \frac{(c + \sqrt{2ah + c^2})^2}{-2ah}$ 及 $k^2 = \frac{1}{6}(\sqrt{2ah + c^2} - c)$. 显然式(9)是式(10)的特例.

$$(3) c > 0, \alpha < 0$$

此时不存在闭轨, 因唯一的奇点 O 是鞍点.

$$(4) c < 0, \alpha > 0$$

此时有一族闭轨围绕 O , 但 $h \geq 0$. 当 $h = 0$ 时闭轨 $\Gamma(h)$ 退化为奇点 O . 同上有行波解(8).

$$(5) c = 0, \alpha > 0$$

此时有一族闭轨围绕奇点 O , 同样 $h \geq 0$. 当 $h = 0$ 时闭轨 $\Gamma(h)$ 退化为奇点 O . 通过虚模数变换可得行波解

$$u(\xi) = \left(\frac{18h}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \operatorname{sn}\left(\xi_1, \sqrt{\frac{\alpha}{18h}i}\right) = \left(\frac{18h}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{18h}{\alpha+18h}} \cdot \frac{\operatorname{sn}(\xi_2, m)}{\operatorname{dn}(\xi_2, m)} \quad (11)$$

其中, 实数模 $m = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+18h}}$, $\xi_1 = \left(\frac{dh}{18}\right)^{\frac{1}{4}} (\xi + C_2)$, ξ_2

$= \sqrt{\frac{\alpha+18h}{18h}} \xi_1$. 式(11) 的确为一个实函数.

$$(6)c = 0, \alpha < 0$$

此时由对称性和 $\frac{dy}{dx}$ 定号知无闭轨.

总之, 在情形(1)、(2)、(4)、(5)下可有闭轨(周期解)或有界行波解. 图 1(a)–图 1(f) 描述了几种相轨线.

2 $C_1 \neq 0$ 的情形

此时 O 不是平衡点, 设平衡点为 $E_* = (x_*, 0)$, 其中 x_* 满足三次方程

$$f(x) = \frac{1}{3}cx - \frac{1}{9}ax^3 + C_1 = 0 \quad (12)$$

引入方程(12) 的判别式 $p_x = \frac{-c}{3a}, q_x = \frac{-9C_1}{a}$ 及

$$\Delta_x = \left(\frac{q_x}{2}\right)^2 + \left(\frac{p_x}{3}\right)^2 = \frac{81C_1^2\alpha - 4c^3}{4a^3} \quad (13)$$

以下对 Δ_x 分情况讨论. 此外式(3) 有首次积分

$$H(x, y) = f_h(x) - y^2 = 0 \quad (14)$$

其中 $f_h(x) = \frac{1}{3}cx^2 - \frac{1}{18}ax^4 + 2C_1x + h$ 为辅助函数. 而相轨线记为 $\Gamma(h) = \{(x, y) \mid H(x, y) = 0\}$.

2.1 $\Delta_x > 0$ 的情形

此时方程(12) 有一个实根和两个复根, 且要求: ① $81C_1^2\alpha > 4c^3, \alpha > 0$; ② $81C_1^2\alpha < 4c^3, \alpha < 0$.

对于 ①, 显然 Jacobi 矩阵为 $J(E_*) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3}(c - ax_*^2) & 0 \end{bmatrix}, \text{ 故 } \det J(E_*) = \frac{1}{3}(ax_*^2 - c) \neq$$

0. 此外 $\det J(E_*) > 0$, 否则当 $ax_*^2 < c$ 时由方程(12) 有

$$C_1 = \frac{1}{9}x_*(ax_*^2 - 3c) \quad (15)$$

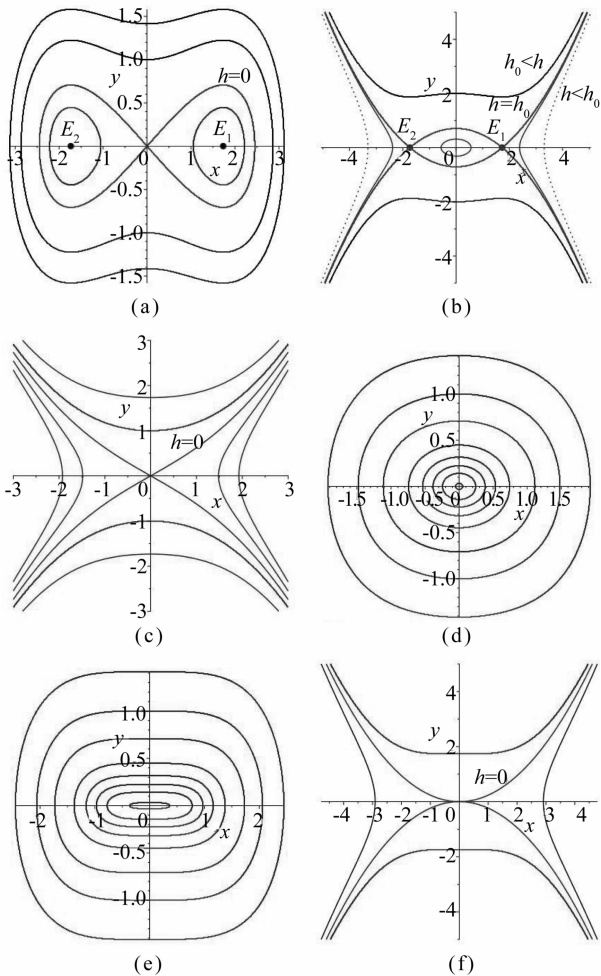


图 1 $C_1 = 0$ 时的相图: (a) $c = \alpha = 1$; (b) $c = \alpha = -1$; (c) $c = 1, \alpha = -1$; (d) $c = -1, \alpha = 1$; (e) $c = 0, \alpha = 1$; (f) $c = 0, \alpha = -1$.

Fig. 1 Phase diagrams when $C_1 = 0$: (a) $c = \alpha = 1$; (b) $c = \alpha = -1$; (c) $c = 1, \alpha = -1$; (d) $c = -1, \alpha = 1$; (e) $c = 0, \alpha = 1$; (f) $c = 0, \alpha = -1$.

故 C_1 与 x_* 异号. 但这不可能, 因此唯一的平衡点 E_* 是中心, 有周期解.

此外, 当 $C_1 > 0$ 时 E_* 位于 x 正半轴上, 反之则位于 x 负半轴上. 而 h 有负的下限 h_m , 利用方程组 $f(x) = f_h(x) = 0$ 及 Sylvester 结式法可知, h_m 满足三次方程

$$R_x(f, f_h) = \frac{\alpha^2}{26244} [4\alpha^2 h^3 + 4ac^2 h^2 + (c^4 - 54\alpha C_1^2 c)h + \frac{243}{2}\alpha C_1^4 - 3C_1^2 c^3] = 0. \quad (16)$$

显然方程(16) 的判别式为 $\Delta_R = \frac{\alpha^4 \Delta_x^3 C_1^2}{36}$, 故 h_m 唯一. 当 $h = h_m$ 时闭轨退化为奇点 E_* .

对于 ②, 类似可知唯一的平衡点 E_* 是鞍点, 注意假设 $\alpha x_*^2 > c$ 时 C_1 与 x_* 同号. 参数 h 无限制, 但当 $h = h_0 > 0$ 时有过 E_* 的同宿轨, 而 h_0 满足三次方程 (16).

图 2 给出了上述几种情形的相轨线.

最后考虑有界行波解和周期解. 由方程 (16) 中的括式可知, 当 $h \neq h_m$ 时 $f_h(x) = 0$ 有两个互异单重实根及一对共轭复根. 先作变换 $w = \left(\frac{|\alpha|}{18}\right)^{\frac{1}{4}} u, \eta = \left(\frac{|\alpha|}{18}\right)^{\frac{1}{4}} \xi$, 化为标准形式

$$\left(\frac{dw}{d\eta}\right)^2 = a_0(w - w_1)(w - w_2) [(w - l)^2 + s^2] \quad (17)$$

这样有界行波解形式上为

$$u(\xi) = \left(\frac{18}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{4}} w(\eta), \quad w(\eta) = \frac{A \cdot \text{cn}[\kappa(\eta + C_2), m] + B}{C \cdot \text{cn}[\kappa(\eta + C_2), m] + D} \quad (18)$$

相应系数为

$$A = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)C - \frac{1}{2}(u_1 - w_2)D,$$

$$B = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)D - \frac{1}{2}(w_1 - w_2)C,$$

$$C = w_1 - l - \frac{s}{m_1}, D = w_1 - l - sm_1,$$

$$E = \frac{s^2 + (w_1 - l)(w_2 - l)}{s(w_1 - w_2)},$$

$$m_1 = E + a_1 \sqrt{E^2 + 1},$$

$$m^2 = \frac{1}{1 + m_1^2}, \kappa = \frac{\sqrt{2a_2 sm_1(w_1 - w_2)}}{2mm_1},$$

而 $a_j^2 = 1 (j = 0, 1, 2), C_2$ 是积分常数.

2.2 $\Delta_x = 0$ 的情形

此时方程 (12) 有两个不相等的实根, 无复根,

且 $C_1 = \pm \frac{2c}{9} \sqrt{c/\alpha}$, 要求 $\frac{c}{\alpha} > 0$. 判别式 $\Delta_R = 0$ 表明仅有两个不同的临界值 h_0 和 h_m .

先考虑 $C_1 = \frac{-2c}{9} \sqrt{c/\alpha}$ 显然有双曲平衡点 $E_*^{(1)} = (-2\sqrt{c/\alpha}, 0) (c > 0$ 时为中心, $c < 0$ 时为鞍点)

和退化平衡点 $E_*^{(2)} = (\sqrt{c/\alpha}, 0)$. 取变换 $u = x - x_*, v = y, x_* = \sqrt{c/\alpha}$ 和 $u = Au_1, v = Av_1,$

$A = \frac{3}{-\alpha x_*}$, 可得系统

$$u'_1 = v_1, v'_1 = u_1^2 - \frac{1}{c} u_1^3 \quad (19)$$

上述系统等价于^[20]

$$x' = y, y' = x^2 + o(|x, y|^4) \quad (20)$$

因此 $E_*^{(2)}$ 是余维至少为 4 的尖点.

此时分两种情况考虑: ① $c, \alpha > 0$; ② $c, \alpha < 0$. 对于 ①, 要求 $h \geq h_m = \frac{-4c^2}{3\alpha}$. 当 $h > h_0 = \frac{c^2}{6\alpha}$ 时闭轨 $\Gamma(h)$ 包围 $E_*^{(1)} = (-2\sqrt{c/\alpha}, 0)$ 和退化平衡点 $E_*^{(2)} = (\sqrt{c/\alpha}, 0)$. 当 $h = h_0$ 时有过平衡点 $E_*^{(2)}$ 的同宿轨 $\Gamma(h_0)$; 当 $h_m < h < h_0$ 时闭轨 $\Gamma(h)$ 仅包围平衡点 $E_*^{(1)}$; 当 $h = h_m$ 时闭轨 $\Gamma(h)$ 退化为平衡点 $E_*^{(1)}$. 对于 ②, 无闭轨, 但当 $h = h_m$ 时有过平衡点 $E_*^{(1)}$ 的同宿轨; 当 $h = h_0$ 时有过平衡点 $E_*^{(2)}$ 的同宿轨.

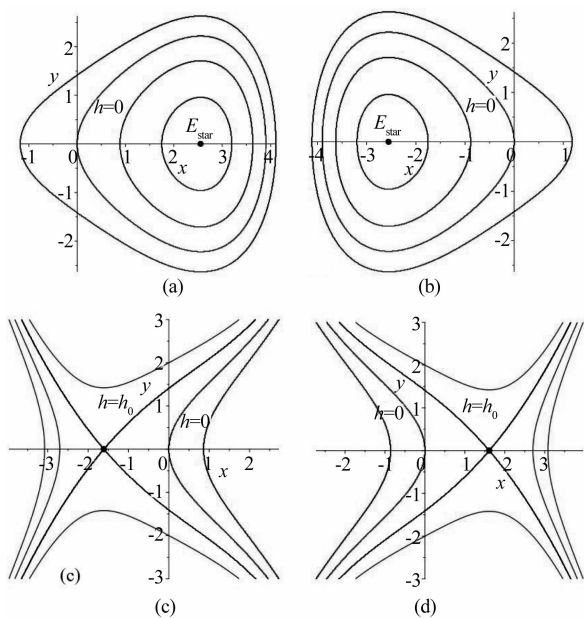


图 2 $\Delta_x > 0$ 时的相图:

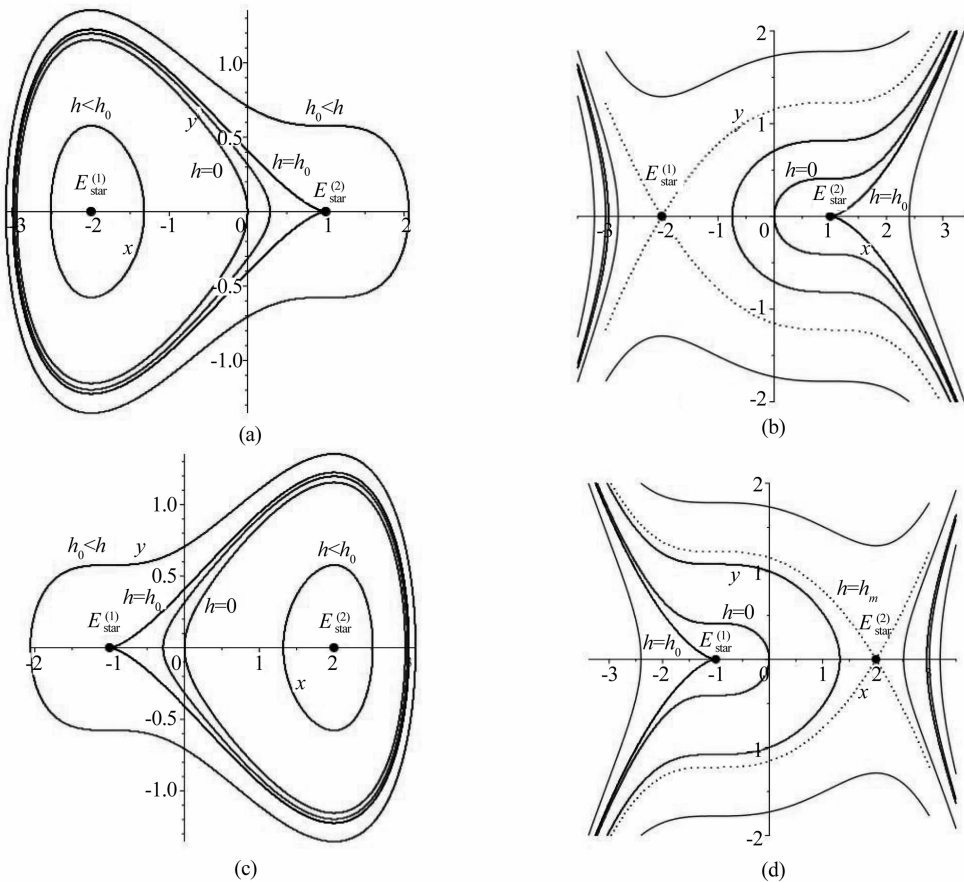
- (a) $c = \alpha = C_1 = 1$; (b) $c = \alpha = 1, C_1 = -1$;
 - (c) $c = 1, \alpha = -1, C_1 = 1$; (d) $c = 1, \alpha = -1, C_1 = -1$.
- Fig. 2 Phase diagrams when $\Delta_x > 0$;
 (a) $c = \alpha = C_1 = 1$; (b) $c = \alpha = 1, C_1 = -1$;
 (c) $c = 1, \alpha = -1, C_1 = 1$; (d) $c = 1, \alpha = -1, C_1 = -1$

至于 $C_1 = \frac{2c}{9} \sqrt{c/\alpha}$, 有余维至少为 4 的尖点 $E_*^{(1)} = (-\sqrt{c/\alpha}, 0)$ 和双曲平衡点 $E_*^{(2)} = (2\sqrt{c/\alpha}, 0) (c > 0$ 时为中心, $c < 0$ 时为鞍点), 再由对称性可得相应结论.

图 3 给出了上述几种情形的相轨线.

最后看有界行波解. 当 $h = h_0$ 时方程 $f_h(x) = 0$ 有一个三重实根 $x = \pm \sqrt{c/\alpha}$ 和一个单重根 $x = \mp 3\sqrt{c/\alpha}$, 沿同宿轨 $\Gamma(h_0)$ 的行波解为

$$u(\xi) = \begin{cases} \frac{4}{-4\sqrt{\frac{c}{18}} \left[\left(\frac{\alpha}{18} \right)^{\frac{1}{4}} \xi + C_2 \right]^2 - \sqrt{\frac{\alpha}{c}}} + \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, C_1 = \frac{-2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, c > 0, \\ \frac{4}{4\sqrt{\frac{-c}{18}} \left[\left(\frac{-\alpha}{18} \right)^{\frac{1}{4}} \xi + C_2 \right]^2 - \sqrt{\frac{\alpha}{c}}} + \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, C_1 = \frac{-2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, c < 0, \\ \frac{4}{4\sqrt{\frac{c}{18}} \left[\left(\frac{\alpha}{18} \right)^{\frac{1}{4}} \xi + C_2 \right]^2 + \sqrt{\frac{\alpha}{c}}} - \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, C_1 = \frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, c > 0, \\ \frac{4}{-4\sqrt{\frac{-c}{18}} \left[\left(\frac{-\alpha}{18} \right)^{\frac{1}{4}} \xi + C_2 \right]^2 + \sqrt{\frac{\alpha}{c}}} - \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, C_1 = \frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, c < 0 \end{cases} \quad (21)$$

图3 $\Delta_x = 0$ 时的相图:

$$C_1 = -\frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}; (a) c = \alpha = 1; (b) c = \alpha = -1; C_1 = \frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}; (c) c = \alpha = 1; (d) c = \alpha = -1.$$

Fig. 3 Phase diagrams when $\Delta_x = 0$.

$$C_1 = -\frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}; (a) c = \alpha = 1; (b) c = \alpha = -1; C_1 = \frac{2c}{9} \sqrt{\frac{c}{\alpha}}; (c) c = \alpha = 1; (d) c = \alpha = -1$$

其中 C_2 是积分常数. 这表明了同宿轨, 因为

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (u(\xi), u'(\xi)) = \left(\pm \sqrt{\frac{c}{\alpha}}, 0 \right).$$

当 $h \neq h_0$ 和 h_m 时, 有界行波解形式上同式

(18).

2.3 $\Delta_x < 0$ 的情形

此时有三个两两不相等的实根, 而 c 与 α 同号, 只需考虑以下两种情形即可

① $81C_1^2\alpha > 4c^3, \alpha < 0 (c < 0)$

② $81C_1^2\alpha < 4c^3, \alpha > 0 (c > 0)$

不妨设 $C_1^2 = \frac{kc^3}{\alpha} (k < \frac{4}{81})$, $x = \sqrt{\frac{c}{\alpha}}z$, 则方程

(12) 化为 $f_1^\pm(z) = \frac{1}{3}z - \frac{1}{9}z^3 \pm \sqrt{k} = 0$, 正号对应 $c > 0$. 由零点定理知三个实根 $z_*^{(1)} < -1, z_*^{(2)} \in (-1, 0), z_*^{(3)} > 1$, 因此 $c > 0$ 时平衡点 $E_*^{(1)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 是中心, 而 $E_*^{(2)}$ 是鞍点; 当 $c < 0$ 时平衡点 $E_*^{(1)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 是鞍点, 而 $E_*^{(2)}$ 是中心. 不妨设轨线 $\Gamma(h)$ 过平衡点 $E_*^{(j)}$ 的临界值为 h_j , 显然 h_j 应满足方程 (16), $j = 1, 2, 3$. 判别式 Δ_R 表明有三个临界值 h_j .

先看 $c > 0$. 此时 $h \geq h_m = \min\{h_1, h_3\}$, 而 $h_2 > h_1, h_2 > h_3$. 但当 $C_1 > 0$ 时, 作差有

$$f_h(x_*^{(1)}) - f_h(x_*^{(3)}) = \frac{c^2}{3\alpha}(z_*^{(1)} - z_*^{(3)})[6\sqrt{k} + (z_*^{(1)} + z_*^{(3)}) \cdot (1 - \frac{(z_*^{(1)})^2 + (z_*^{(3)})^2}{6})] \quad (22)$$

由于 $z_*^{(3)} < \sqrt{3}, z_*^{(1)} > -\sqrt{3}$ 及 $z_*^{(1)} + z_*^{(3)} > 0$, 因此式 (22) 的中括号内是大于零的, 故 $h_1 > h_3$. 但 h_1 可正可负. 反之, 当 $C_1 < 0$ 时 $h_1 < h_3$.

当 $h > h_2$ 时有一条闭轨围绕三个奇点; 当 $h \in (\max\{h_1, h_3\}, h_2)$ 时有两条分别围绕 $E_*^{(1)}$ 和 $E_*^{(3)}$ 的闭轨; 当 $h_m < h < \max\{h_1, h_3\}$ 时有一条闭轨 ($C_1 > 0$ 时围绕 $E_*^{(3)}$; $C_1 < 0$ 时围绕 $E_*^{(1)}$). 至于 $c < 0$, h 无限制, 但 $h_2 < h_1, h_2 < h_3$. 如果 $C_1 > 0$, 式 (22) 的中括号内化为

$$(z_1 + z_3)[2 - \frac{1}{2}(z_1^2 + z_3^2) - \frac{1}{3}z_1z_3] \quad (23)$$

简记 $z_*^{(j)}$ 为 z_j . 平移等值线可知, 当函数 $g(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{3}xy$ 过边界点 $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 时, 在矩形区域 $\frac{3}{2} \leq x \leq \sqrt{3}, 1 \leq y \leq \sqrt{3}$ 上取得最大值, 恰为 2. 但 $z_1 + z_3 < 0$, 因此式 (22) 的中括号内是大于零的, 故 $h_1 > h_3$. 反之, 当 $C_1 < 0$ 时 $h_1 < h_3$. 仅当 $h \in (h_2, \min\{h_1, h_3\})$ 时有围绕中心 $E_*^{(2)}$ 的闭轨.

统一看临界情形轨线. 当 $h = h_j$ 时, 若 $E_*^{(j)}$ 为中心, 则一族闭轨退化为 $E_*^{(j)}$; 反之, 若 $E_*^{(j)}$ 为鞍点, 则轨线退化为过该点的同宿轨 (鞍点的分界线).

图 4 给出了上述几种情形的相轨线. 奇点 $E_*^{(j)}$ 用 E_j 表示.

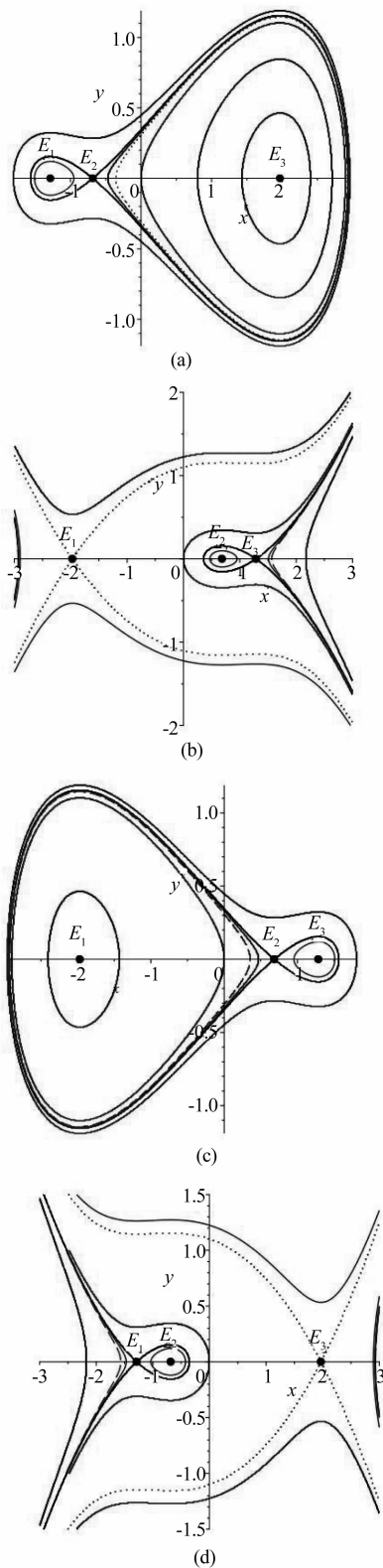


图 4 $\Delta_x < 0$ 时的相图:

- (a) $c = \alpha = 1, k = \frac{3}{81}$; (b) $c = \alpha = -1, k = \frac{3}{81}$;
 - (c) $c = 1, \alpha = 1, k = \frac{-3}{81}$; (d) $c = \alpha = -1, k = \frac{-3}{81}$
- Fig. 4 Phase diagrams when $\Delta_x < 0$:
- (a) $c = \alpha = 1, k = \frac{3}{81}$; (b) $c = \alpha = -1, k = \frac{3}{81}$;
 - (c) $c = 1, \alpha = 1, k = \frac{-3}{81}$; (d) $c = \alpha = -1, k = \frac{-3}{81}$

最后看有界行波解. 同样地当 $h \neq h_j (\forall j)$ 时, $f_h(x) = 0$ 无重根. 对于 $c > 0$, 当 $h > h_2$ 或 $h \in (h_m, \max\{h_1, h_3\})$ 时, 有界行波解形式上同式 (18).

当 $c > 0, h \in (\max\{h_1, h_3\}, h_2)$ 时, 存在有界行波解. 改写式 (17) 为标准形式

$$\left(\frac{dw}{d\eta}\right)^2 = -(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)(\omega - \omega_4) \quad (24)$$

其中 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4$. 一个有界行波解形式上

为 $u(\xi) = \left(\frac{18}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{4}} w(\eta)$, 其中

$$w(\eta) = \frac{\omega_3(\omega_1 - \omega_2)S_2^2 - \omega_2(\omega_1 - \omega_3)}{(\omega_1 - \omega_2)S_2^2 - (\omega_1 - \omega_3)} \quad (25)$$

Jacobi 椭圆正弦函数为

$$S_2 = \text{sn}\left[\frac{\sqrt{(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)}}{2}(\eta + C_2), m_2\right],$$

模数为 $m_2 = \sqrt{\frac{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_3 - \omega_4)}{(\omega_1 - \omega_3)(\omega_2 - \omega_4)}}$. 至于 $h = h_j$,

改写为

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = -\frac{\alpha}{18}(u - x_a)^2(u - x_b)(u - x_c) \quad (26)$$

单重实根 $x_b > x_c$, 有界行波解形式上为

$$u(\xi) = \frac{x_a(x_b - x_c)(E + 1)^2 - 4x_c(x_b - x_a)E}{(x_b - x_c)(E + 1)^2 - 4(x_b - x_a)E} \quad (27)$$

其中 $E = \exp\left[\sqrt{\frac{\alpha}{18}(x_a - x_c)(x_b - x_a)}(\xi + C_2)\right]$.

而 C_2 为积分常数.

3 Hamilton 函数法求多模态近似解

当奇点为中心时, 文献[21]利用 Hamilton 函数法给出一个强非线性二阶微分方程的多模态近似解以反应周期性. 以上可以看到, 有界行波解或周期解常以 Jacobi 椭圆函数的复杂形式出现, 因此需要一种近似方法来快速反应精确解.

以 $C_1 = 0, c, \alpha > 0$ 为例. 取 Hamilton 函数 $H(x, y) = f_h(x) - y^2$, 设多模态行波近似解 $u(\xi) = \sum_{i=0}^2 a_i \cos(2i\omega\xi)$, 初值条件为 $u(0) = A, u'(0) =$

0, 在 $(0, \frac{T}{4})$ 上对 ξ 积分有不变量^[22]

$$H = \frac{\pi}{6\omega} \left\{ \alpha \left[\frac{-1}{16} a_1^4 + \left(\frac{-1}{2} a_0^2 - \frac{1}{2} a_0 a_2 - \frac{1}{4} a_2^2 \right) a_1^2 - \frac{1}{6} a_0^4 - \frac{1}{2} a_0^2 a_2^2 - \frac{1}{16} a_2^4 \right] + \alpha a_0^2 + \left(\frac{1}{2} c - 6\omega^2 \right) a_1^2 + \left(\frac{1}{2} c - 24\omega^2 \right) a_2^2 \right\} \quad (28)$$

再求偏导有 $\frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{\partial H}{\partial f} \right) = 0 (i = 0, 1, 2)$, 即方程组

$$4\alpha a_0^3 + 6\alpha a_0 a_1^2 + 6\alpha a_0 a_2^2 + 3\alpha a_1^2 a_2 - 12c a_0 = 0 \quad (29a)$$

$$\left[\left(\frac{-1}{4} a_1^2 - a_0^2 - a_0 a_2 - \frac{1}{2} a_2^2 \right) \alpha + c \right] f^2 + 12 = 0 \quad (29b)$$

$$\left\{ \frac{-1}{4} \alpha a_2^3 + \left[(-a_0^2 - \frac{1}{2} a_1^2) \alpha + c \right] a_2 - \frac{1}{2} \alpha a_0 a_1^2 \right\} f^2 + 48a_2 = 0 \quad (29c)$$

最后解出系数 a_i 及 $f = \frac{1}{\omega}$. 以下给出数值实例.

例 1: 取参数 $c = \alpha = 1$ 及初值 $A = 1$, 由方程 (29) 解得系数

$a_0 = 1.554207050, a_1 = -0.6152063185, a_2 = 0.06099926808, f = 2.732773277$. 图 5(a) 中分别绘出了多模态近似解 (黑色实线) 和解析形式解 (8) (红色点线) 曲线, 在 $0 \leq \xi \leq 70$ 内两者几乎重合, 近似程度非常好.

其次, 以 $C_1, \alpha, \Delta_x > 0$ 为例. Hamilton 函数同上, 类似的有代数方程组. 以数值实例来说明.

例 2: 取 $c = \alpha = k = A = 1$, 由方程 (29) 解得系数

$a_0 = 2.146903270, a_1 = -1.284554716, a_2 = 0.1376514457$, 而 $f = 1.665373391$. 图 5(b) 中绘出了多模态近似解 (红色点线) 和解析形式解 (黑色实线) 曲线, 近似程度同样非常好.

除了以上形式多模态近似解外, 对于 $C_1 = 0, c = -1, \alpha = 1$, 可取多模态近似解为 $u(\xi) = \sum_{i=1}^3 a_i \cos[(2i-1)\omega\xi]$. 总之, Hamilton 函数法所得近似解能快速反映出周期解的性态, 是值得推广的方法.

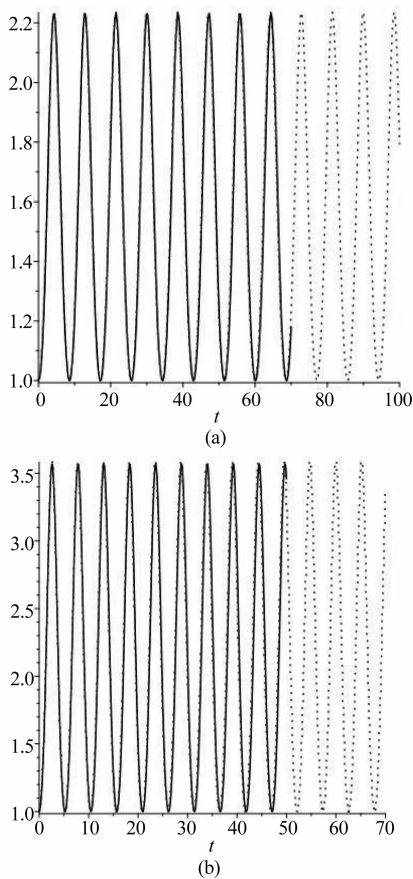


图5 多模态近似解(实线)曲线与
(a)例1中解析解(点线)曲线;
(b)例2中解析解(点线)曲线.

Fig. 5 Curves of multi-mode approximate solution(line) and

(a)analytical solution(dot line) in example 1;
(b)analytical solution(dot line) in example 2.

4 结论

本文主要定性分析了非线性(3+1)维修正 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解和相轨线情况. 与已有文献相比,结合平衡点 E_* 所满足三次方程的判别式,我们深入研究参数 $C_1 \neq 0$ 的情形,并描述了相轨线的走向,同时形式上给出了若干有界行波解的表达式. 今后,可深入研究广义 ZK 方程,以及高维和分数阶情形^[15,16,23,24]. 总之,这是一个值得继续研究的方向.

参 考 文 献

- Shivamoggi B K, Rollins D K. Generalized Painlevé formulation of Lie group symmetries of the ZK equation. *Physics Letters A*, 1991, 161(3): 263~266
- Hamza A M. A kinetic derivation of a generalized ZK equation for ion acoustic turbulence in a magnetized plasma. *Physics Letters A*, 1994, 190: 309~316
- 屈长征,柴乃序. 变系数 Zakharov-Kuznetsov 方程的容许变换和 Painlevé 分析. 西北大学学报(自然科学版), 1995, 25(6): 575~577 (Qu C Z, Chai N X. Allowed transformations and Painlevé property of the variable-coefficient Zakharov-Kuznetsov equations. *Journal of Northwest University (Natural Science Edition)*, 1995, 25(6): 575~577(in Chinese))
- Mohammed K E. Deriving the new traveling wave solutions for the nonlinear dispersive equation, KdV-ZK equation and complex coupled KdV system using extended simplest equation method. *Communications in Theoretical Physics*, 2015, 64(4): 379~390
- 傅海明,戴正德. Zakharov-Kuznetsov 方程的新精确解. 周口师范学院学报, 2013, 30(5): 4~7 (Fu H M, Dai Z D. New exact solutions for the Zakharov-Kuznetsov equation. *Journal of Zhoukou Normal University*, 2013, 30(5): 4~7(in Chinese))
- Dong Z Z, Chen Y, Lang Y H. Symmetry reduction and exact solutions of the (3+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation. *Chinese Physics B*, 19(9), 2010, 090205
- 崔艳英,吕大昭,刘长河. (3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的 Wronskian 形式解. 北京建筑工程学院学报, 2012, 28(2): 68~71 (Cui Y Y, Lv D Z, Liu C H. Wronskian form solutions of the (3+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation. *Journal of Beijing University of Civil Engineering and Architecture*, 2012, 28(2): 68~71(in Chinese))
- 种鸽子,于浩洋,王海权,等. 三维 Zakharov-Kuznetsov 方程解的衰减性. 纯粹数学与应用数学, 2021, 37(1): 57~63 (Chong G Z, Yu H Y, Wang H Q, et al. Decay properties of solutions of the three-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation. *Pure and Applied Mathematics*, 2021, 37(1): 57~63(in Chinese))
- 韦丽. 具有幂律非线性的(3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的行波解. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1426~1435 (Wei L. Traveling wave solutions of the (3+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity. *Advances in Applied Mathematics*, 2020, 9(9): 1426~1435(in Chinese))
- Wei L, Ren M R. Bounded traveling wave solutions of the (3+1)-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity. *Scholars Journal of Physics, Mathematics and Statistics*, 2019, 7(7): 99~103
- Moslem W M, Ali S, Shukla P K, et al. Solitary, explosive, and periodic solutions of the quantum Zakharov-Kuznetsov equation and its transverse instability. *Physics of Plasmas*, 2007, 14(8), 082308
- Lu D C, Seadawy A R, Arshad M, et al. New solitary wave solutions of (3+1)-dimensional nonlinear extended Zakharov-Kuznetsov and modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equations and their applications. *Results in Physics*, 2017, 7: 899~909
- 熊维玲,梁海珍. (3+1)维 KdV-Zakharov-Kuznetsov 方程的亚纯行波解. 广西科技大学学报, 2015, 26(4): 9~16 (Xiong W L, Liang H Z. Meromorphic travel solutions of (3+1) dimensional KdV-Zakharov-Kuznetsov e-

- quation. *Journal of Guangxi University of Science and Technology*, 2015, 26(4): 9~16(in Chinese))
- 14 黄欣.首次积分法下高维非线性偏微分方程新的行波解.四川师范大学学报(自然科学版),2014,37(3): 312~315 (Huang X. New traveling wave solutions of the higher dimensional nonlinear partial differential equation by the first integral method. *Journal of Sichuan Normal University(Natural Edition)*, 2014, 37(3): 312~315 (in Chinese))
- 15 Li H, Sun S R, Wang K M. Bifurcations of traveling wave solutions for the generalized Zakharov-Kuznetsov equation. 2011 IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems vol. 1, Guangzhou, 2011-11-18, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 102~107
- 16 Zhang W B, Zhou J B. Traveling wave solutions of a generalized Zakharov-Kuznetsov equation. *ISRN Mathematical Analysis*, 2012, 107846
- 17 Zhao H X, Qiao L J, Tang S Q. Peakon, pseudo-peakon, loop, and periodic cusp wave solutions of a three-dimensional 3DKP(2, 2) equation with nonlinear dispersion. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 2015, 5(3): 301~312
- 18 Zhao H X, Tang S Q. Peakon, pseudo-peakon, cusp and smooth solitons for a nonlocal Kerr-likemedial. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2017, 40(7): 2702~2712
- 19 马知恩,周义仓.常微分方程定性方法与稳定性方法.北京:科学出版社,2001:115~116 (Ma Z E, Zhou Y C. Qualitative and stability methods of ordinary differential equations. Beijing: Science Press,2001:115~116(in Chinese))
- 20 Huang J C, Gong Y J, Chen J. Multiple bifurcations in a predator-prey system of Holling and Leslie type with constant-yield prey harvesting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(10), 1350164
- 21 楼智美,王元斌,俞立先.一类强非线性二阶微分方程的多模态近似解析解研究.动力学与控制学报,2019, 17(5):463~466 (Lou Z M, Wang Y B, Yu L X. Study on multimode approximate analytical solution of a class of strongly nonlinear second order differential equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(5): 463~466(in Chinese))
- 22 Durmaz S, Altay D S, Kaya M O. High order Hamiltonian approach to nonlinear oscillators. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2010, 11(8): 565~570
- 23 Herr S, Kinoshita S. The Zakharov-Kuznetsov equation in high dimensions: small initial data of critical regularity. *Journal of Evolution Equations*, 2021, 21: 2105~2121
- 24 Osman M S, Rezazadeh H, Eslami M. Traveling wave solutions for (3+1) dimensional conformable fractional Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity. *Nonlinear Engineering*, 2019, 8(1): 559~567

TRAVELING WAVE SOLUTIONS OF A (3+1)-DIMENSIONAL MODIFIED KDV-ZAKHAROV-KUZNETSOV EQUATION*

Wang Shuangte^{1,2†} Yu Hengguo¹

(1. College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

(2. Liushi No. 3 Middle School, Wenzhou 325604, China)

Abstract Combining with bifurcation theory in dynamical systems, a nonlinear (3+1)-dimensional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation is theoretically investigated. Firstly, based on different parameter values and discriminant in cubic equation, types of equilibria and their corresponding phase portraits are qualitatively analyzed, respectively. Secondly, by the Jacobi elliptical functions, formulas of some bounded traveling wave solutions and homoclinic loops are formally obtained, extending results in literature. Finally, several multi-mode approximations are numerically presented via Hamiltonian method, which indicate periodicity of bounded traveling wave solutions.

Key words (3+1)-dimensional modified KdV-Zakharov-Kuznetsov equation, traveling wave solution, equilibrium, Hamiltonian function

Received 14 June 2021, Revised 9 August 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (31570364, 61871293) and the National Key Research and Development Program of China (2018YFE0103700).

† Corresponding author E-mail: wangshuangte@163.com