第 20 卷第 1 期
2022 年 2 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.20 No.1
Feb. 2022

文章编号:1672-6553-2022-20(1)-001-07
DOI:10.6052/1672-6553-2021-045

幂律 Hamilton 方程及其在非线性动力学中的应用*

李媛媛[1,2]　张绍成[3]　花巍[4]　刘畅[1,2]　刘世兴[1,2†]　郭永新[1,2]

(1.辽宁大学 物理学院,沈阳 110036)(2.辽宁大学 空间科学与技术研究院,沈阳 110036)

(3.辽宁大学 信息化中心,沈阳 110036)(4.沈阳师范大学 物理科学与技术学院,沈阳110036)

摘要　本文对幂律 Hamilton 作用量应用等时变分法,得到了一种非标准形式的 Hamilton 方程,这类方程被称之为为幂律 Hamilton 方程.此方程是用来描述一类特殊动力学系统的运动方程.幂律 Hamilton 方程中有一个可控参数,通过调整的取值改变物体的运动或动力学系统的轨迹.算例结果表明,幂律 Hamilton 系统具有不同于标准 Hamilton 方程的特性,并对其附加特性进行了详细的讨论.

关键词　幂律 Hamilton 原理,　非线性动力学,　幂律 Hamilton 方程,　控制参数

中图分类号:O316　　　　**文献标志码:**A

引言

非标准动力学理论有两个分支:非标准 Lagrange 动力学和非标准 Hamilton 动力学.非标准 Lagrange 量(NSL)或非自然 Lagrange 量在 Arnold 的经典力学的数学方法[1]中首次被提到,非标准 Lagrange 量与以动能和势能项为特征的经典 Lagrange 量不同.所以应用也相当广泛,近期 El-Nabulsi[2]通过非标准 Lagrange 函数在等离子体和太阳物理学中的一些应用,探索得到了磁流体动力学等离子体模型的一些特征.非标准 Hamilton 动力学的工作起源于 Dyson 对 Feynman 所做工作的报道,他指出 Poisson 括号关系对物理系统中允许的力的类型有很强的约束[3].Hojman 和 Shepley 将 Feynman 的工作思想进行推广拓展[4].并且能够表明一组交换坐标的一致量化可以导致这些坐标中的 Lagrange 量,并为一阶运动方程建立了 Hamilton 理论[4-6].非标准动力系统在描述非线性演化方程、变系数耗散动力系统、Friedmann-Robertson-Walker 模式、经典相对论量子化问题等方面得到了越来越多的关注和广泛的应用[8-16],等等.

Hamilton 原理 $\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q^i,\dot{q}^i,t)\mathrm{d}t=0$ 作为物理学和力学中的一个基本原理,可以推导出物理学、力学和工程中的运动微分方程,Hamilton 原理也可表示为 $\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[p_i\dot{q}^i-H\left(p_i,q^i,t\right)\right]\mathrm{d}t=0$ 的形式;其中 $L\left(q^i,\dot{q}^i,t\right)$ 和 $H\left(p_i,q^i,t\right)$ 是标准 Lagrange 量和标准 Hamilton 量,q^i 是广义坐标,$\dot{q}^i$ 和 p_i 是与广义坐标所对应的广义速度和广义动量,但是非标准 Hamilton 量不同于标准 Hamilton 量,非标准 Hamilton 量通常不表示为动能与势能和的形式.在基于非标准 Hamilton 量的非线性动力学[17]中,介绍了指数形式的 Hamilton 量,并利用等时变分的方法得到了非标准 Hamilton 运动方程,并研究了其在非线性动力学中的应用.之后在非标准 Hamilton 运动方程的基础上,有学者对非标准 Hamilton 函数动力学系统的 Norther 对称性进行了讨论,并建立了非标准 Hamilton 函数动力学系统的 Norther 定理[18].El - Nabulsi[19] 利用对数 Lagrange 函数以及对数 Hamilton 函数得出相应的运动方程和修正的 Boltzmann 方程,讨论了它们在恒星动力学中的应用,也就是说非标准 Lagrange 函数以及非标准形式的 Hamilton 函数可以应用到天文学领域中.在本文中,将选择一个幂律 Hamilton 作用量,讨论运动方程及其在非线性动力学和控制理论中的应用.

本文结构如下:在第 1 节中,利用等时变分的

2021-04-03 收到第 1 稿,2021-05-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11872030,11972177,11772144),辽宁省教育厅自然科学项目(LJC202003)

† 通信作者 E-mail: liushixing@lnu.edu.cn

方法得到幂律Hamilton量的运动方程.在第2节中,给出了非标准Hamilton方程在非线性动力系统和控制问题中的应用,结论在第3节中给出.

1 幂律Hamilton方程

在本节中,将介绍幂律Hamilton原理,并且给出与幂律Hamilton量所对应的非标准Hamilton方程.假设一个动力学系统的构型由n个广义坐标$q^i(i=1,2,\cdots,n)$决定,其幂律Hamilton作用量为[20]

$$A=\int_a^b\left[p_i\dot{q}^i-H\left(p_i,q^i,t\right)\right]^{\gamma+1}\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中$\left(p_i,q^i,t\right)\rightarrow H\left(p_i,q^i,t\right)$是$C^2$的函数:

$$q^i,p_i\in C^1\left(\left[a,b\right];\ R^n\right)$$

$$H\left(p_i,q^i,t\right)\in C^2\left(\left[a,b\right]\times R^n\times R^n;\ R\right)$$

假设,受给定边界条件$q^i(a)=q_a^i,q^i(b)=q_b^i$作用函数的容许函数$q^i\in C^1\left[a,b\right]$具有极值,所以根据变分原理:

$$\delta A=\int_a^b\left[p_i\dot{q}^i-H\left(p_i,q^i,t\right)\right]^{\gamma+1}\mathrm{d}t=0 \tag{2}$$

能够得到非标准Hamilton方程.

定理1.1 如果$q^i(t)$是方程(2)的解,$q^i(t)$满足如下的非标准Hamilton方程:

$$\begin{cases}\dot{q}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=\dfrac{-\partial H}{\partial q^i}-\dfrac{\gamma p}{\left(p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}-H(p_i,q^i,t)\right)}\\ \qquad\left[p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\dfrac{\partial H}{\partial p_i}-\dfrac{\partial H}{\partial t}\right]\end{cases} \tag{3}$$

方程(3)命名为基于幂律Hamilton原理的幂律Hamilton方程(PHE).

证明 对APH采用等时变分的方法,考虑边界条件$q^i(a)=q_a^i,q^i(b)=q_b^i$并取极值,可以得到方程

$$\begin{cases}\dot{q}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=\dfrac{-\partial H}{\partial q^i}-\dfrac{\gamma p_i}{\left(p_i\dot{q}^i-H\left(p_i,q^i,t\right)\right)}\\ \qquad\left[\dot{p}_i\dot{q}^i+p_i\ddot{q}^i-\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right]\end{cases} \tag{4}$$

对$H\left(p,q,t\right)$求全微分

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\dot{q}^i \tag{5}$$

将方程式(4)中的第一个表达式代入第二个表达式,可以得到式(3).

推论1.1 当$\gamma=0$时,方程(3)可化简为标准Hamilton方程

$$\begin{cases}\dot{q}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\end{cases} \tag{6}$$

推论1.2 当$\gamma\neq0$且Hamilton量H不显含时间,即$\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$,方程(3)可以化简为

$$\begin{cases}\dot{q}^i=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i=-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}-\dfrac{\gamma p_i}{\left(p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}-H\left(p_i,q^i,t\right)\right)}\\ \qquad\left[p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right]\end{cases} \tag{7}$$

此外,如果我们定义

$$p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\equiv\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8}$$

通过计算可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\equiv\left(\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q^i}\right)\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

如果令$p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=K$,其中$K$是一个常量,则方程(7)可以化简为标准Hamilton方程(6).

推论1.3 γ是一个可调参数,我们可以通过调节γ来改变物体的运动轨迹,因此γ也可叫做控制参数.

定理1.2 当$H\left(p_i,q^i,t\right)$,Hamilton函数并不是一个守恒量,只有当$\gamma=0$或者$p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}=K$时成立.

证明 如果取$H\left(p_i,q^i,t\right)$对时间求导,得到

$$\frac{\mathrm{d}H\left(p_i,q^i\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H\left(p_i,q^i\right)}{\partial p_i}p_i+\frac{\partial H\left(p_i,q^i\right)}{\partial q^i}q^i$$

$$\frac{\partial H\left(p_i,q^i\right)}{\partial p_i}\left[\begin{array}{c}-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}-\dfrac{\gamma p_i}{\left(p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}-H\left(p_i,q^i\right)\right)}\\ \left[p_i\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right)-\dfrac{\partial H}{\partial q^i}\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right]\end{array}\right]+\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\frac{\gamma p_i}{\left(p_i\dfrac{\partial H}{\partial p_i}-H\left(p_i,q^i\right)\right)}\left[\frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-p_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right)\right]$$

因此只有 $\gamma = 0$ 或(8)式成立,即 $p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = K$ 成立,$\frac{\mathrm{d}H\left(p_i, q^i\right)}{\mathrm{d}t} = 0$,Hamilton 函数 $H\left(p_i, q^i\right)$是守恒量.

定理 1.3 当 $H = H\left(p_i, t\right)$,变量 q^i 是循环坐标,与时间相关的正则动量 p_i 不是一个守恒量.

证明 因为 $H = H\left(p_i, t\right)$不显含 q^i,则方程(3)可以化简为

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \dfrac{-\gamma p_i}{\left(p_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i} - H\left(p_i, q^i, t\right)\right)} \\ \left[p_i \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \dfrac{\partial H}{\partial t}\right] \end{cases} \tag{9}$$

明显地,当 $\gamma = 0$,$\dot{p}_i = 0$,动量 p_i 是守恒量;但是当 $\gamma \neq 0$,表达式 $p_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial H}{\partial t}$ 并不一直为零,因此 p_i 不是守恒量.

为了显示幂律 Hamilton 方程的一些性质,我们将列举一些显含时间、不显含时间和具有循环坐标的 Hamilton 函数,在所有的例子中 C 为积分常数.

2 幂律 Hamilton 方程的应用

2.1 显含时间的 Hamilton 函数

例 1 考虑如下形式的非标准 Hamilton 函数

$$H = pqt + q \tag{10}$$

将 Hamilton 函数(10)代入到方程(3)中,可以得到非标准 Hamilton 方程

$$\begin{cases} \dot{q} = qt \\ \dot{p} = -\left(1 + \gamma\right)pt - 1 \end{cases} \tag{11}$$

方程(11)的解是

$$\begin{cases} q = C_1 \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right) \\ p = \dfrac{\left(\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}\left(\dfrac{t}{2}\sqrt{-2\gamma - 2}\right) - C_2\sqrt{-2\gamma - 2}\right)\exp\left(\dfrac{-t^2\left(1 + \gamma\right)}{2}\right)}{\sqrt{-2\gamma - 2}} \end{cases} \tag{12}$$

其中 $\mathrm{erf}\left(z\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp\left(-x^2\right)\mathrm{d}x$ 是误差函数.当 $\gamma = 0$,方程(11)可以化简为

$$\begin{cases} \dot{q} = qt \\ \dot{p} = -pt - 1 \end{cases} \tag{13}$$

得到方程(11)的解

$$\begin{cases} q = C_1 \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right) \\ p = \dfrac{1}{2}\left(i\sqrt{2\pi}\, \mathrm{erf}\left(\dfrac{t}{2} i\sqrt{2}\right) + 2C_2\right)\exp\left(\dfrac{-t^2}{2}\right) \end{cases} \tag{14}$$

如果假设初值条件为 $q\left(0\right) = 1, p\left(0\right) = 1$,图 1 给出了方程(13)的解随时间的变化,图 2 给出了根据不同的 γ 取值处在 $q - p$ 平面上时方程的解(12)的运动轨迹.在图 2 中,可以看出对于不同的 γ 取值,物体在 $q - p$ 平面上具有不同的运动轨迹.它展现了参数 γ 控制这个系统的运动.

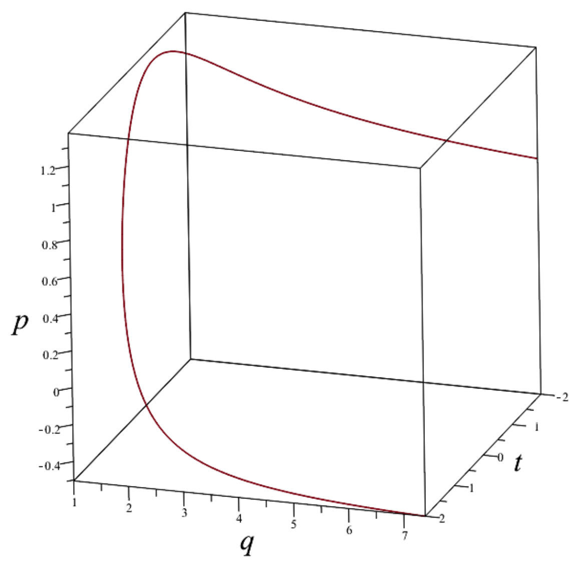

图 1 当 $\gamma = 0$ 方程(13)的解随时间的变化

Fig.1 Variations of the solution of equation (13) with time when γ=0

例 2 如果取非标准 Hamilton 函数 $H = t^{-1}\left(p - q\right)$ 并且 $t \neq 0$,利用方程(3)可以得到非标准 Hamilton 方程.

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{1}{t} \\ \dot{p} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{\gamma p}{qt} + \dfrac{\gamma p}{t} \end{cases} \tag{15}$$

方程(15)的解是

$$\begin{cases} q = \ln\left(t\right) + C_3 \\ p = \exp\left(\displaystyle\int\left(\dfrac{\gamma}{t} - \dfrac{\gamma}{qt}\right)\mathrm{d}t\right)\left(\displaystyle\int\dfrac{1}{t}\exp\left(-\gamma\displaystyle\int\dfrac{q - 1}{qt}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t + C_4\right) \end{cases} \tag{16}$$

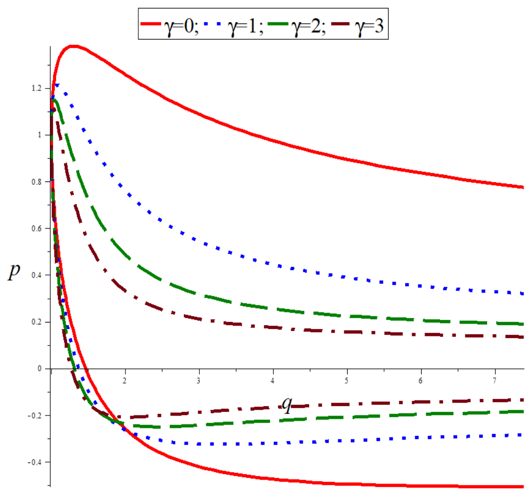

图 2 根据 γ 的取值方程的解(12)在平 $q-p$ 面上的轨迹

Fig.2 Behavior of solutions (12) on the plane q–p with different γ-value.

假设初始条件为 $q(1)=1, p(1)=1$，图 3 给出了当 $\gamma=2$ 时方程(15)的解随时间的变化，图 4 给出了不同的 γ 取值处在 $q-p$ 平面上时方程解(16)的运动轨迹.

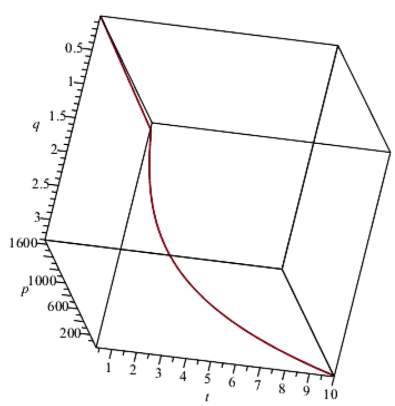

图 3 当 $\gamma=2$ 时方程(15)的解随时间的变化

Fig.3 Variations of the solution of equations (15) with time when $\gamma=2$

例 3 取非标准 Hamilton 函数 $H(p,q,t)=p\sin t+q$，代入到方程(3)，可以得到运动方程

$$\begin{cases}\dot{q}=\sin t\\ \dot{p}=-1-\dfrac{\gamma p\sin t}{q}\end{cases}\tag{17}$$

方程(17)的解析解为

$$\begin{cases}q=\cos t+C_5\\ p=\exp\displaystyle\int\left(\frac{-\gamma\sin t}{q}\right)\mathrm{d}t\left(\int-\exp\left(\gamma\int\frac{\sin t}{q}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}t+C_6\right)\end{cases}\tag{18}$$

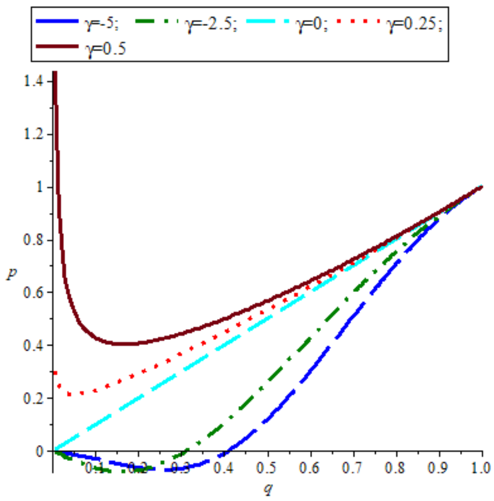

图 4 根据 γ 的取值方程的解(16)在 $q-p$ 平面上的轨迹

Fig.4 Behavior of solutions (16) on the plane $q-p$ with different γ-value

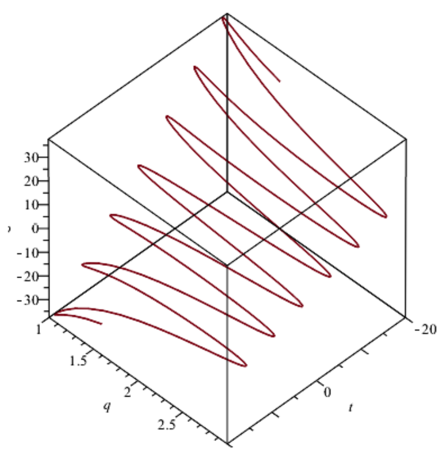

图 5 当 $\gamma=1$ 时方程(17)的解随时间的变化

Fig.5 Variations of the solution of equations (17) with time when $\gamma=1$

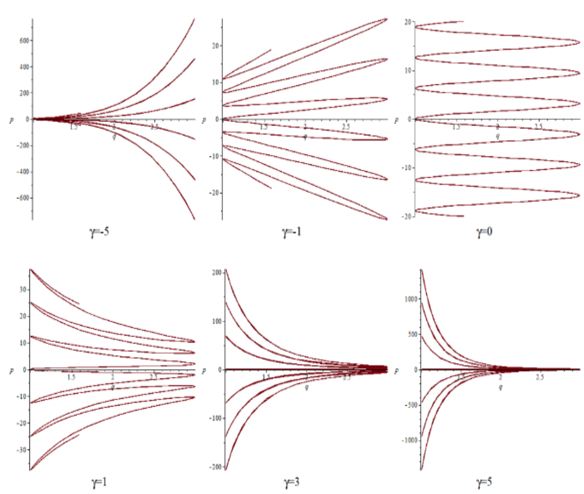

图 6 根据 γ 的取值方程的解(18)在 $q-p$ 平面上的轨迹

Fig.6 Behavior of solutions (18) on the plane $q-p$ with different γ-value

取初始条件为 $q(0)=1, p(0)=0$,图 5 给出了当 $\gamma=2$ 时方程(17)的解随时间的变化,图 6 给出了不同的 γ 取值处在 $q-p$ 平面上时方程解(18)的运动轨迹.

2.2　不显含时间的 Hamilton 函数

例 4　取非标准 Hamilton 函数 $H(p,q)=pq+q$,利用方程(7),得到 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{q}=q\\ \dot{p}=-1-p-\gamma p\end{cases}\tag{19}$$

方程(19)的解析解为,

$$\begin{cases}q=C_7\mathrm{e}^{t}\\ p=C_8\mathrm{e}^{-(\gamma+1)t}-\dfrac{1}{\gamma+1}\end{cases}\tag{20}$$

当 $\gamma=0, \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0$ 时,Hamilton 函数 H 是一个守恒量.取初始条件为 $q(0)=1, p(0)=0$,令 $C_7=1$, $C_8=1/(\gamma+1)$,图 7 给出了当 $\gamma=2$ 时方程(19)的解随时间的变化,图 8 给出了不同的 γ 取值处在 $q-p$ 平面上时方程解(20)的运动轨迹.图 9 给出了 Hamilton 函数 H 随 t 时间的变化,可以看出当 $\gamma\neq 0$ 时 Hamilton 函数 H 不是一个守恒量.

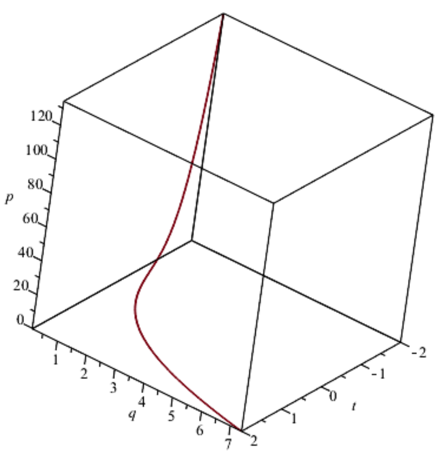

图 7 当 $\gamma=2$ 时方程(19)的解随时间的变化

Fig.7　Variations of the solution of equation (19) with time when $\gamma=2$

例 5　取非标准 Hamilton 函数 $H(p,q)=K\ln p p+\sqrt{q}$,此函数满足条件(8)并且 K 是一个常量.利用方程(6),得到的 Hamilton 方程为

$$\begin{cases}\dot{q}=\dfrac{K}{p}\\ \dot{p}=\dfrac{-1}{2\sqrt{q}}\end{cases}\tag{21}$$

发现方程(21)化简为标准 Hamilton 方程,并且当条件(8)被满足时控制参数 γ 没有出现在方程(21)中,另外,可以证明 Hamilton 函数 $H(p,q)$ 是一个守恒量.

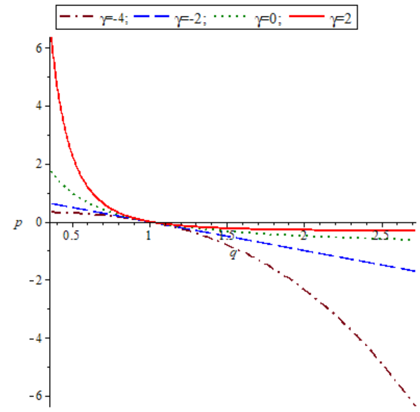

图 8　根据 γ 的取值方程的解(20)在 $q-p$ 平面上的轨迹

Fig.8　Behavior of solutions (20) on the plane $q-p$ with different γ-value

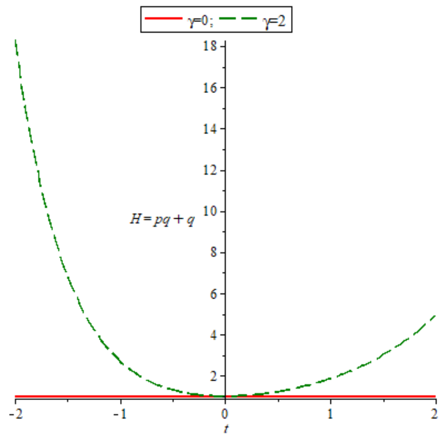

图 9　当 $\gamma=0$ 和 $\gamma\neq 0$ 时 Hamilton 函数随时间的变化

Fig.9　Variations of H with time when $\gamma=0$ and $\gamma\neq 0$

2.3　不显含 q 的 Hamilton 函数

例 6　取非标准 Hamilton 函数 $H(p,t)=p\sin t+\cos t$,利用方程(9)能够得到非标准 Hamilton 方程

$$\begin{cases}\dot{q}=\sin t\\ \dot{p}=\dfrac{-\gamma p\sin t}{\cos t}\end{cases}\tag{22}$$

通过计算得到方程(22)的解析解

$$\begin{cases}q=-\cos t+C_9\\ p=C_{10}\cos\gamma t\end{cases}\tag{23}$$

通过表达式(23),可以发现尽管 Hamilton 函数 H 不显含 q,p 也不是一个守恒量.假设初始条件为 $q(0)=-1, p(0)=1$,图 10 给出了当 $\gamma=0.2$ 时方程(22)的解随时间的变化,图 11 给出了不同的 γ 取值处在 $q-p$ 平面上时方程解(23)的运动轨迹.

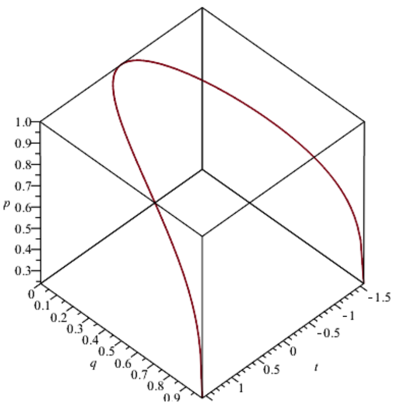

图 10　当 $\gamma = 0.2$ 时方程(22)的解随时间的变化

Fig.10　Variations of the solution of equation (22) with time when $\gamma = 0.2$

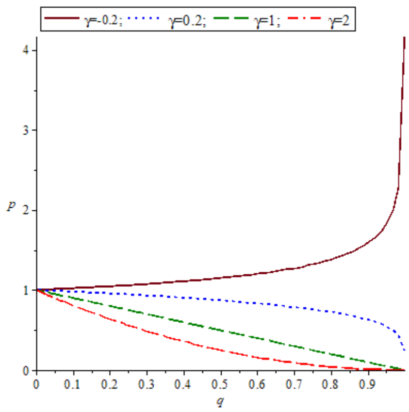

图 11　根据 γ 的取值方程的解(23)在 $q-p$ 平面上的轨迹

Fig.11　Behavior of solutions (23) on the plane $q-p$ with different γ-value

例 7　取非标准 Hamilton 函数 $H(p,q,t) = p\cos t$，代入方程(9)，得到

$$\begin{cases} \dot{q} = \cos t \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

方程(24)有如下解析解

$$\begin{cases} q = \sin t + C_{11} \\ p = C_{12} \end{cases} \tag{25}$$

明显地，q 的解根据正弦定理变化，p 是守恒量.

例 8　取非标准 Hamilton 函数 $H(p) = K\ln p + C$，通过方程(9)，得到非标准 Hamilton 方程为

$$\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{K}{p} \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

方程(26)有如下解析解

$$\begin{cases} q = \dfrac{2Kt}{C_{14}} + C_{13} \\ p = C_{14} \end{cases} \tag{27}$$

所以 q 的解随时间 t 线性变化，p 是一个守恒量. 同时，因为 $\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \dfrac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = 0$，所以 Hamilton 函数也是一个守恒量.

3　结论

在本文中，通过使用等时变分的方法，成功得到了用于描述一种以幂律 Hamilton 函数为特征的特殊动力学系统运动方程，称之为幂律 Hamilton 方程. 在新的方程中，有一个可调参数 γ 称为控制参数，可以通过调整 γ 来改变物体运动或动力学系统轨迹. 幂律 Hamilton 方程在本质上完全不同于标准 Hamilton 方程，但是在某些特定条件下该方程可以简化为标准 Hamilton 方程. 特别是对于耗散动力系统、非线性演化方程、控制问题等，非标准 Hamilton 方程显然可以将其简化，以简单的方法来解决复杂的动力学问题和可控问题.

参　考　文　献

1　Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. New York: Springer, 1978

2　El-Nabulsi R A. Non-standard magnetohydrodynamics equations and their implications in sunspots. *Proceedings of the Royal Society A*, 2020, 476: 1471~2946

3　Dyson F J. Feynman's proof of the Maxwell equations. *American Journal of Physics*, 1990, 58(3), 209~211

4　Hojman S A, Shepley L C. No Lagrangian? No quantization, *Journal of Mathematical Physics*. 1991, 32 (1): 142~146

5　Hojman S A. Non-Lagrangian construction of Hamiltonian structures. *Physics*, 1994, 1: 1~20

6　Corichi A, Jr Michael. Ryan. Quantization of nonstandard Hamiltonian systems. *Journal of Physics A: General Physics*, 1995, 30(30): 3553

7　Gomberoff A, Hojman S A. Non-standard construction of Hamiltonian structures. *Journal of Physics A: General Physics*, 1997, 30(14): 5077~5084

8　Musielak Z E. General conditions for the existence of non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems. *Chaos Solitons & Fractals*, 2009, 42(5): 2645~2652

9　Musielak Z E. Standard and non-standard Lagrangians for dissipative dynamical systems with variable coefficients. *Journal of Physics. A: Mathemtical and Theoretical*, 2008, 41(5): 295~302

10　Gladwin R, Pradeep V K, et al. Nonstandard conserved Hamiltonian structures in dissipative/damped systems: Nonlinear generalizations of damped Harmonic oscillator.

Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(5), 052901

11 EL-Nabulsi A R. Non-linear dynamics with non-standard Lagrangians. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*, 2013,12(2):273~291

12 Zhou X S, Zhang Y. Routh method of reduction for dynamic systems with non-standard lagrangians. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2016, 37(1):15~21

13 EL-Nabulsi A. R. Non-standard power-law Lagrangians in classical and quantum dynamics. *Applied Mathematics Letters*, 2015,43,120~127

14 Carillo S, Ragnisco O. Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990

15 Corichi A, Jr M P R. Quantization of nonstandard Hamiltonian systems. *Journal of Physics A: General Physics*, 1997, 30(10)

16 El-Nabulsi R. A. From classical to discrete gravity through exponential non-standard lagrangians in general relativity. *Mathematics*, 2015,3(3):727~745

17 Liu S X, Guan F, Wang Y, Liu C, et al. The nonlinear dynamics based on the nonstandard Hamiltonians. *Nonlinear Dynamics*,2017,88:1229~1236

18 宋静．基于非标准拉格朗日函数和非标准哈密顿函数的动力学系统的对称性研究苏州：硕士学位论文．苏州科技大学，2018(Song J, Symmetries for dynamical stystems with non-standard Lagrangians and non-standard Hamiltonians,Suzhou:Master Thesis. *Suzhou University of Science and Technology*, 2018)

19 El-Nabulsi R A. Gravitational field as a pressure force from logarithmic lagrangians and non-standard hamiltonians: the case of stellar halo of milky way. *Communications in Theoretical Physics*,2018,69(3):233

20 Song J, Zhang Y. Noether's theorems for dynamical systems of two kinds of non-standard Hamiltonians. *Acta Mechanica*,2018,229(1):285~297

POWER-LAW HAMILTONIAN EQUATIONS AND ITS APPLICATION IN NONLINEAR DYNAMICS *

Li Yuanyuan[1,2]　Zhang Shaocheng[3]　Hua Wei[4]　Liu Chang[1,2]　Liu Shixing[1,2†]　Guo Yongxin[1,2]

(1.*College of Physics*, *Liaoning University*,110036, *China*)

(2.*Institute of Space Science and Technology*, *Liaoning University*, 110036, *China*)

(3.*Informatization Center*, *Liaoning University*, *Shenyang* 110036, *China*)

(4.*College of Physics Science and Technology*, *Shenyang Normal University*, *Shenyang* 110036, *China*)

Abstract　In this paper, a non standard Hamilton equation called the power-law Hamilton equation, is obtained by applying the isochronous variational method to the power-law Hamilton action. These equations are used to describe a special class of dynamical system. There is a controllable parameter γ in the power-law Hamiltonian equation. We can change the trajectories of motion of bodies or the behaviors of dynamical systems by adjusting γ. Some examples demonstrate that the power-law Hamiltonian systems have characteristics different from the standard ones, and some additional features are discussed in detail.

Key words　power-law Hamilton's principle,　non-standard dynamics,　power-law Hamiltonian

Received 3 April 2021,revised 28 May 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11872030,11972177,11772144), the Natural Science Project of Liaoning Provincial Department of Education(LJC202003)

† Corresponding author E-mail:liushixing@lnu.edu.cn