

时滞速度反馈对一类双边电容型微谐振器系统 复杂动力学行为的控制^{*}

刘智群 尚慧琳[†]

(上海应用技术大学 机械工程学院,上海 201418)

摘要 本文考虑一类双边电容型微谐振器,提出在系统直流偏置电压上施加时滞速度反馈实施控制其复杂动力学行为.通过引入新变量解析表达同异宿轨道,在此基础上研究时滞反馈抑制该系统全局分岔的机理及其控制效果.发现时滞速度反馈对控制微结构吸合不稳定非常有效,却并不适用于控制混沌.本文研究在提高静电驱动微机械振动系统的动完整性上具有潜在的应用价值.

关键词 微谐振器, 混沌, 吸合不稳定, 时滞速度反馈, 全局分岔

中图分类号:O328

文献标志码:A

引言

静电微谐振器是微机电系统(MEMS)中最常用的元器件之一,具有广泛的应用领域^[1].在微谐振器结构中,振动极板的谐振是其正常工作的基本需求,因此,避免微谐振元件的复杂振动成为保障微谐振器正常运行的基本问题^[2].混沌作为微谐振器振动系统中典型的复杂动力学行为,一直是研究的热点.Siewe等^[3]数值模拟了一类双极板电容型静电微机械谐振器的混沌动力学行为,发现参数激励幅值增大会引起混沌.Sabarathinam等^[4]基于简单的模拟电子电路框架研究一类双边电容型MEMS谐振器,发现驱动电压的增加易诱发结构混沌振动.Dantas等^[5]研究了由两侧电极静电驱动的微纳米谐振器的混沌动力学行为,发现小的粘性阻尼和较小的间隙不对称性更容易引起系统的混沌振动.在对吸合不稳定现象的研究上,Alsalem等^[6]通过实验和数值仿真研究微加速度计振动系统的安全盆侵蚀现象,以此诠释微结构的吸合不稳定;Ruzziconi等^[7]通过实验研究发现单边平行板电容型微传感器存在吸合不稳定现象.

为保障微谐振器的正常运行,有必要对其复杂动力学行为实施有效控制.然而,对于微器件,尺寸

微小使得其在结构上直接施加控制可行性低,且容易造成结构形变,因此多数控制施加在驱动电路上^[8,9].Haghighi等^[10]研究了带有静电力的微机械谐振器的混沌动力学,并提出了一种鲁棒自适应模糊控制算法来控制混沌运动.Tusset等^[11]将一类静电驱动的双边电容型微谐振器的混沌振动通过基于Lyapunov-Floquet变换的状态反馈控制到所需的周期轨道.然而,对吸合不稳定现象的控制研究主要集中在实验仿真和数值模拟方面,如Alsalem和Younis^[12]提出在一类单边平行板电容式微加速度计的驱动直流偏置电压上施加时滞位移反馈来控制系统的吸合不稳定现象,并得到了良好的控制效果.然而,对于微结构吸合不稳定的控制机理相关研究报道极少,仍有待进一步开展.

为此,考虑一类双边电容型微谐振器结构,已有研究表明驱动交流电压幅值的增大导致该系统发生混沌运动和吸合不稳定现象^[3,13],本文在此基础上,在直流偏置电压上引入时滞速度反馈,研究其控制谐振结构复杂振动的机理和效果.

1 时滞速度反馈控制微谐振器振动系统

本文以一类典型的静电双边电容型微谐振器为研究对象^[13],在驱动直流电压上施加时滞速度反

2021-02-10收到第1稿,2021-03-11收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11472176)

[†] 通信作者 E-mail: shanghuilin@sit.edu.cn

馈控制,系统简化模型如图1所示.考虑振动结构的线性刚度、线性阻尼、非线性刚度和极板间的非线性静电力,建立如下驱动方程:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 Z}{dt^2} + c \frac{dZ}{dt} + k_1 Z + k_2 Z^3 \\ = \frac{A_0}{2(d-Z)^2} (V_{out} + G(\frac{dZ(t-\tilde{\tau})}{dt} - \frac{dZ}{dt})) \\ + V_{AC} \sin \Omega t)^2 - \frac{A_0}{2(d+x)^2} (V_{out} + G(\frac{dZ(t-\tilde{\tau})}{dt} - \frac{dZ}{dt}))^2 \end{aligned} \quad (1)$$

其中,等式右边为双边平行板的静电驱动力, m 是振动元件有效总质量; Z 是振动极板的位移; A_0 为平行板处于静止状态的电容; c 为等效阻尼系数; d 是极板间初始间距; k_1 为该系统的线性刚度, k_2 为非线性刚度, V_{out} 、 V_{AC} 分别为直流偏置电压和交流电压的幅值,且满足 $V_{AC} \ll V_{out}$; Ω 是交流电压的频率, G 为反馈增益系数, $\tilde{\tau}$ 为时滞量.

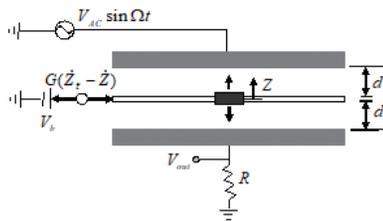


图1 时滞速度反馈控制静电微谐振器系统动力学模型^[13]

Fig. 1 The dynamical model of an electrostatic micro-resonator system under a delayed velocity feedback^[13]

对系统(1)引入以下无量纲化变量

$$\begin{aligned} \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{c}{m\omega_0}, \quad \alpha = \frac{k_2 d^2}{m\omega_0^2}, \\ \beta = \frac{A_0 V_{out}^2}{2k_1 d^3}, \quad \gamma = \frac{V_{AC}}{V_{out}}, \quad T = \omega_0 t, \quad x = \frac{Z}{d}, \\ \dot{x} = \frac{dx}{dT}, \quad g = \frac{Gd}{V_{out}}, \quad \tau = \omega_0 \tilde{\tau}. \end{aligned} \quad (2)$$

得到无量纲系统

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu \dot{x} + x + \alpha x^3 = \\ \frac{\beta}{(1-x)^2} (1 + g(\dot{x}(T-\tau) - \dot{x}) + \gamma \sin(\omega T))^2 \\ - \frac{\beta}{(1+x)^2} (1 + g(\dot{x}(T-\tau) - \dot{x}))^2. \end{aligned} \quad (3)$$

由于系统(1)中阻尼系数、交流电压幅值与直流偏置电压之比以及反馈增益均为小量,因此可以引入小参数 $\varepsilon(0 < \varepsilon \ll 1)$.对上式重新进行参数标度,即:

$$\mu = \varepsilon \tilde{\mu}, \quad \gamma = \varepsilon \tilde{\gamma}, \quad g = \varepsilon \tilde{g} \quad (4)$$

则有

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon \tilde{\mu} \dot{x} + x + \alpha x^3 = \\ \frac{\beta}{(1-x)^2} (1 + \varepsilon \tilde{g}(\dot{x}(T-\tau) - \dot{x}) + \varepsilon \tilde{\gamma} \sin(\omega T))^2 \\ - \frac{\beta}{(1+x)^2} (1 + \varepsilon \tilde{g}(\dot{x}(T-\tau) - \dot{x}))^2, \end{aligned} \quad (5)$$

当时滞量 $\tau = 0$ 或增益系数 $\tilde{g} = 0$ 时,时滞反馈项为零,控制系统(5)退化为无控制系统.当 $\varepsilon = 0$ 时,系统(5)退化为无扰动Hamilton系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \alpha x^3 + \frac{\beta}{(1-x)^2} - \frac{\beta}{(1+x)^2} \quad (6)$$

其Hamilton量为

$$H(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{\alpha}{4} x^4 - \frac{\beta}{1-x} - \frac{\beta}{1+x} + 2\beta \quad (7)$$

由此可知,系统(6)有无势阱,以及势阱的形态和具体位置以及平衡点个数,均取决于无量纲化参数 α 和 β .给定 $\alpha = 12, \beta = 0.338$,则无扰动系统存在五个平衡点,具有三势阱,同时具有同宿轨道和异宿轨道^[13].本文重点研究这类同异宿轨道同时存在的情况下,同异宿分岔引起的复杂动力学行为,以及时滞速度反馈对这类复杂动力学行为的控制机理,为此给定系统参数取值如表1所示.

表1 系统(1)物理参数取值^[13]

Table 1 Values of physical parameters of system (1)^[13]

Parameters	Values
Equivalent Mass m (kg)	5×10^{-12}
Linear Stiffness Coefficient k_1 ($\mu\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$)	5
Nonlinear Stiffness Coefficient k_2 ($\mu\text{N} \cdot \mu\text{m}^{-3}$)	15
Damping Coefficient c ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$)	5×10^{-8}
Initial Gap of electrodes d (μm)	2
Initial Total Capacitance A_0 (Fm)	1.875×10^{-18}
DC Bias Voltage V_{out} (V)	3.8

2 同异宿轨道解析表达

研究非线性非自治系统的同异宿分岔条件,常用的方法是Melnikov方法.使用该方法,通常需要先同异宿轨道表达为时间 T 的显函数.然而,本系统所对应的无扰动系统(6)含高阶非线性项,其同异宿轨道是无法直接用时间的显函数来表示.为此本节将引入新变量,将同异宿轨道和时间 t 都表达为新变量的显函数,从而为讨论同异宿分岔条件提供前提.对于同宿轨道,轨道与 x 轴的交点 $(x_c, 0)$

满足

$$\frac{1}{2}x_e^2 + \frac{\alpha}{4}x_e^4 - \frac{\beta}{1-x_e} - \frac{\beta}{1+x_e} + 2\beta = 0 \quad (8)$$

引入非线性时间变换 $\varphi(T)$ 用来刻画同宿轨道^[14], 设

$$\frac{d\varphi}{dT} = \Phi(\varphi), \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \quad (9)$$

对于鞍点(0,0)假设

$$\varphi(-\infty) = 0, \varphi(\infty) = \pi \quad (10)$$

同宿轨道满足

$$\begin{aligned} x_h(\varphi) &= a(1 - \cos\varphi) + b\sin\varphi, \\ \frac{1}{2}(\Phi_0 x_h')^2 &= \int_{x_h(0)}^{x_h(\varphi)} \left(-x - \alpha x^3 + \frac{\beta}{(1-x)^2} - \frac{\beta}{(1+x)^2}\right) dx \end{aligned} \quad (11)$$

根据上式,同宿轨道可表达为

$$\begin{aligned} x_h(\varphi) &= x_e \sin\varphi, \\ y_h(\varphi) &= \frac{x_e \sin 2\varphi}{2R_1} \sqrt{1 - \frac{\beta R_1^2 - x_e^2 \sin^2\varphi}{1 - x_e^2 \sin^2\varphi} - \frac{R_1^2}{2}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $R_1 = \sqrt{1 - x_e^2}$. 根据(10)式和(11)式可以得到

$$\begin{aligned} T &= \frac{-\text{sign}(\cos\theta)}{x_e \sqrt{B + x_e^2}} \left(F(\phi_1, \eta_1) + \right. \\ &\quad \left. P\left(\frac{R_1^2}{x_e^2} \eta_1, \phi_1, \eta_1\right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $B=4\beta-1$, $F(\phi_1, \eta_1)$ 和 $P\left(\frac{1}{x_e^2} - 1, \eta_1, \phi_1, \eta_1\right)$

分别为第一类椭圆积分和第三类椭圆积分,且

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \text{arcsinh}\left(\frac{x_e(B + x_e^2)|\cos\varphi|}{R_1\sqrt{4\beta + R_1^2}}\right), \\ \eta_1 &= \frac{4\beta(1 + 2x_e^2) - R_1^4}{R_1(B + x_e^2)}. \end{aligned}$$

类似地,可引入新变量 $\psi(T)$, 设

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dT} &= \Psi(\psi), \\ \Psi(\psi + 2\pi) &= \Psi(\psi) \end{aligned} \quad (14)$$

异宿轨道满足

$$x_m(\psi) = \pm h \cos\psi \quad (15)$$

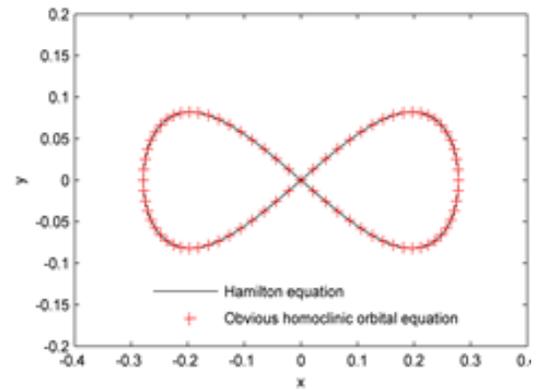
则根据式(14)和式(15),该异宿轨道可表示为

$$\begin{aligned} x_m(\psi) &= \pm x_s \cos\psi, \\ y_m(\psi) &= \mp x_s \sin^2\psi \sqrt{\frac{(B+1)x_s^2}{R_2^2(1-x_s^2\cos^2\psi)} - \frac{2\beta}{R_2^2} + \frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (16)$$

其中

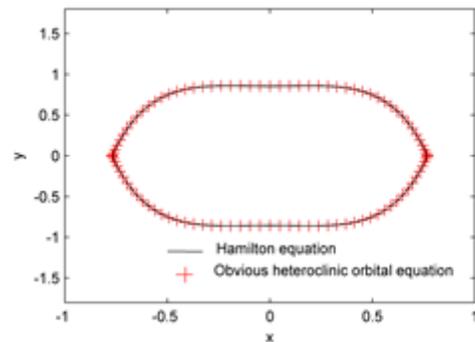
$$\begin{aligned} T &= -\text{sign}(\cos\psi) \left(x_s R_2 \sqrt{\frac{2}{R_2^2 + 4\beta R_3}} F(\theta_1, \eta_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{2} R_2^2}{x_s \sqrt{R_2^2 + 4\beta R_3}} P\left(\frac{1}{x_s^2}, \theta_1, \eta_2\right) \right), \\ R_2 &= 1 - x_s^2, R_3 = 2x_s^2 - 1, \\ \theta_1 &= \arcsin(x_s |\cos\psi|), \eta_2 = \frac{1 + B - R_2^2}{R_2^2 + 4\beta R_3} \end{aligned} \quad (17)$$

绘制表1取值下系统哈密顿方程(7)对应的轨道与式(12)和式(15)显性表达的同异宿轨道,并进行对比,如图2所示.两种形式下同异宿轨道的完全吻合说明了引入新变量的轨道刻画方法能够实现恒同变换.



(a)同宿轨道

(a)Homoclinic orbits



(b)异宿轨道

(b)Heteroclinic orbits

图2 同异宿轨道对比

Fig. 2 Comparison of the orbits

3 复杂动力学行为控制

由于同异宿轨道破裂会引起系统的复杂动力学行为,本节将通过Melnikov方法结合数值模拟研究同异宿分岔引起的复杂振动及时滞速度反馈对

其的抑制作用.

3.1 异宿分岔行为抑制

对于施加时滞速度反馈的微谐振器系统(5), 可以将Melnikov函数法推广至时滞受控系统, 从而获得受控系统的异宿分岔必要条件. 为此, 时滞反馈项必须看成摄动项, 不会引起平衡点稳定性的切换, 即对于系统(5)的线性化系统, 平衡点 $O(0, 0)$ 是稳定的焦点, 不会随控制参数的变化改变稳定性. 忽略 ε 高阶项可得到近似线性系统

$$\ddot{u} + \mu\dot{u} + u(1 - 4\beta) = 0 \quad (18)$$

该系统不含时滞项, 因此控制项不会引起平衡点的稳定性切换. 可在(5)式中将控制项进行泰勒展开, 并将异宿轨道(15)式代入Melnikov函数, 得到

$$M(t_0) = -2\tilde{\mu}x_s^2 J_1 \mp 2\beta\tilde{\gamma}x_s \sin(\omega T_0(\varphi)) J_2 \mp 2\beta\tilde{\gamma}x_s \cos(\omega T_0(\varphi)) J_3 - 8\beta g \tau J_4 \quad (19)$$

其中

$$J_1 = \frac{1}{3x_s^2} \sqrt{\frac{R_2^3 + 4\beta(R_3 + x_s^2)}{2R_2}} + \frac{(x_s^2(x_s^2 - 4) - B)E(\theta_2, \eta_2) + 8R_2\beta F(\theta_2, \eta_2)}{3x_s^3 R_2 \sqrt{2\eta_2(4\beta - R_2^2)}},$$

$$J_2 = \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \cos(\omega T(\varphi))}{(1 - x_s \cos\varphi)^2} d\varphi,$$

$$J_3 = \int_0^\pi \frac{\sin\varphi \sin(\omega T(\varphi))}{(1 - x_s \cos\varphi)^2} d\varphi, \theta_2 = \arcsin x_s,$$

$$J_4 = \frac{3}{x_s^3} - \frac{\beta(72 - 51x_s^2 - 8x_s^4 + 3x_s^6)}{6x_s^3 R_2^{3/2}} + \frac{(6(R_2 - 4\beta) + R_2 x_s^2(\beta - 2))}{2x_s^4 R_2} \operatorname{arctanh}(x_s).$$

其中, $E(\theta_2, \eta_2)$ 分别为第二类椭圆积分.

当

$$\mu x_s J_1 \leq 2\beta\gamma \sqrt{J_2^2 + J_3^2} + 8x_s \beta \xi \omega_0 \tau J_4 \quad (20)$$

Melnikov函数存在简单零点, 是系统发生异宿分岔的必要条件. 将上式参数还原为原系统参数, 则系统发生异宿分岔的必要条件为

$$V_{AC} > V_{AC}^v = \frac{\mu V_b J_1}{2\beta \sqrt{J_2^2 + J_3^2}} + \frac{4G_v x_c d \omega_0 \tau J_4}{\sqrt{J_2^2 + J_3^2}} \quad (21)$$

异宿分岔发生时, 微谐振器系统发生吸合不稳定^[13], 即系统安全域发生分形. 给定时滞增益系数 $g = 0.2$, 理论预测与数值结果对比如图3所示. 其中随着时滞量的增大, 在较小的交流电压幅值下(即满足 $V_{AC}/V_{out} \leq 0.1$ 时), 数值和理论结果吻合程

度较高, 这主要是因为(33)式中的解析结果是基于(5)式将 V_{AC}/V_{out} 设定为小参数的假设得到; 尽管如此, 当 $V_{AC}/V_{out} > 0.1$ 时, 从定性的角度看, 交流电压临界幅值仍然随时滞量增大. 由此可见, 时滞速度反馈为抑制异宿分岔引起微结构吸合不稳定现象提供了理论依据.

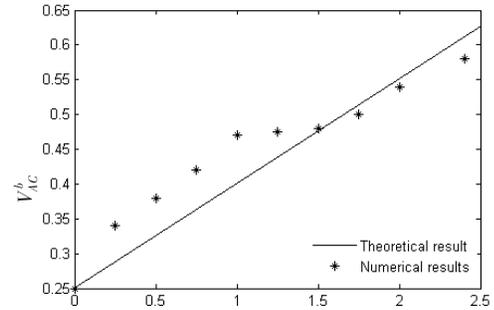


图3 $g=0.2$ 时异宿分岔电压阈值随 τ 的变化

Fig. 3 Variation of voltage threshold for heteroclinic bifurcation with different τ when $g=0.2$

以下将通过具体研究系统(3)安全域的侵蚀程度来描述微结构的吸合不稳定现象, 其中安全域为不引起极板吸合(即原系统 $|Z(t)| < d$ 或无量纲化系统(3)中 $|x(T)| < 1$)的初始条件的集合. 对无量纲化系统(3), 给定 $\omega = 0.5$ 和 $g = 0.18$, 在 $|x(0)| < 1, |\dot{x}(0)| < 1$ 这样一个涵盖系统的同异宿轨道且相对较大的初始平面内取 250×250 个初始点, 时间长度设定为3000个周期, 若这段时间后系统在对应的初始条件下仍满足 $|x(T)| < 1$, 则表示不发生吸合, 该初始条件点以黑色点表示, 则黑色区域为安全域; 否则用白色表示. 结合四阶Runge-Kutta方法和点映射方法来计算和绘制安全域分布情况. 其中, 安全域的边界分形表示初始条件的微小改变会引起微结构的吸合, 即吸合不稳定现象. 对于时滞速度反馈控制系统(3), 由于零时刻前无反馈信号输入, 则可以假定当 $-\tau \leq T < 0$ 时的初始状态 $(x(T), \dot{x}(T)) = (0, 0)$. 因此, 仍能以零时刻初始平面 $(x(0), \dot{x}(0))$ 表达其初始状态.

不同电压幅值下系统(3)的安全域随时滞量的演变如图4所示. $\tau = 0$ 对应未施加时滞反馈控制的原微谐振器振动系统, 其安全域情况如图4(a)、4(b)和4(c)所示, 对比可知, 随着交流电压幅值增大, 安全域分形逐渐明显, 微结构发生吸合现象的机率越高, 即吸合不稳定; 特别地, 在图4(c)中, 微结构吸合不稳定现象非常突出, 仅剩极少数满足系

统安全运行的初始条件. 而根据图3可知, 系统发生异宿分岔的交流电压幅值门槛值约为0.25V, 这与图4(a)中安全域已出现不光滑边界的现象相一致. 当时滞量逐渐增大, 对应图4(d)–4(i), 容易发现, 在同样的交流电压幅值下, 安全域侵蚀状态得

到明显改善. 由此可见, 交流电压幅值的增大会引起系统安全域的侵蚀, 即微谐振器结构的吸合不稳定现象; 而时滞量的增大则能够有效增大安全域面积, 抑制该现象.

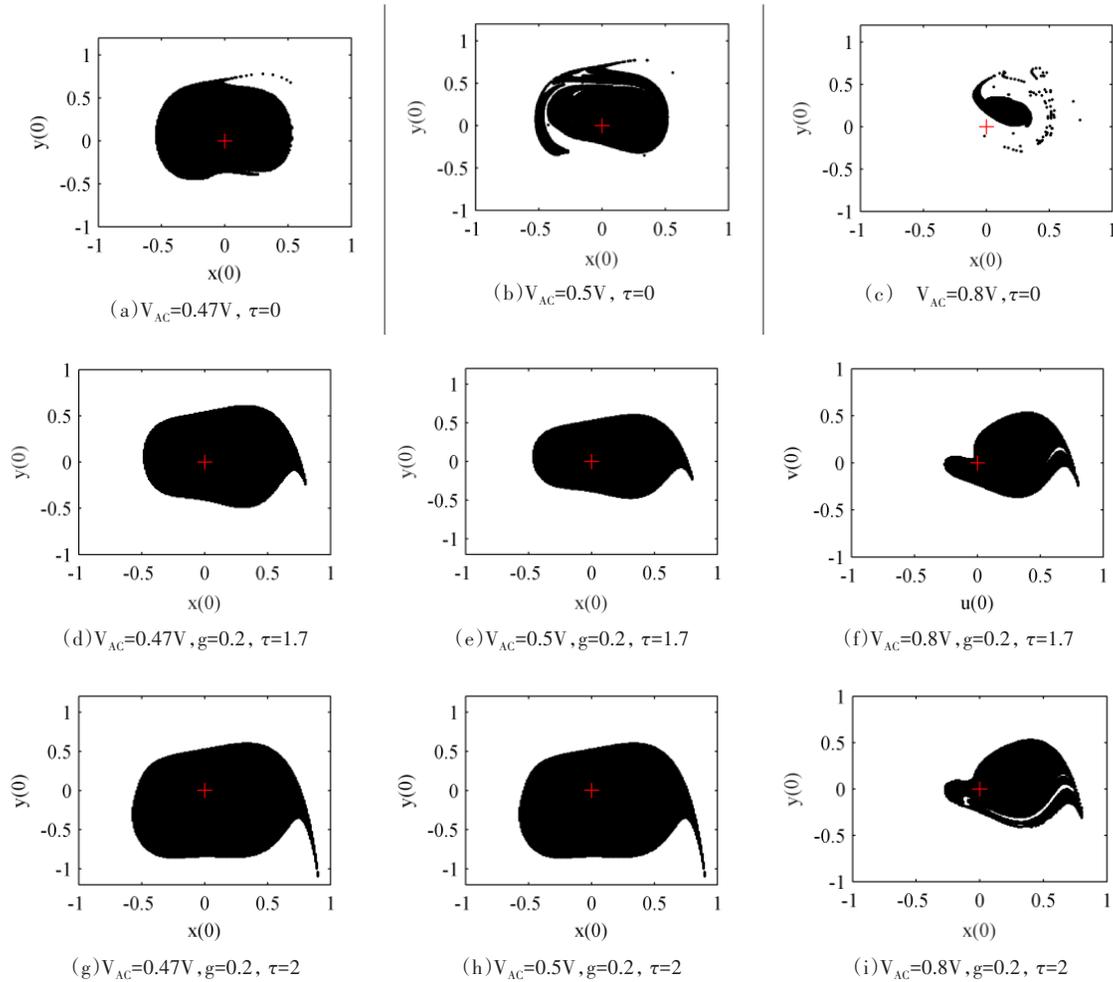


图4 当 $g=0.2$ 时不同的交流电压幅值下安全域随时滞量的演变

Fig. 4 The evolution of safe basin with different time delays and AC voltage amplitudes when $g=0.2$

3.2 同宿分岔行为

与上一节的分析类似, 运用Melnikov方法的前提是时滞反馈项为摄动项, 不影响原系统的平衡点稳定性. 为此, 在同宿轨道中心 $(\pm x_c, 0)$ 的邻域内, 忽略 ε 的高阶项, 得到近似线性系统

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u(1 - \frac{2\beta(2 + 6x_c^2)}{(1 - x_c^2)^2} + 3x_c^2\alpha) \\ + (\mu + \frac{8\beta x_c g}{(1 - x_c^2)^2})\dot{u} - \frac{8\beta g x_c}{(1 - x_c^2)^2}u(T - \tau) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

考虑到当

$$(\mu^2 + 2L\mu)(\mu^2 + 2L - 4Q) > 0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} Q &= 1 - \frac{4\beta(1 + 3x_c^2)}{(1 - x_c^2)^3} + 3x_c^2\alpha \\ L &= \frac{8\beta x_c g}{(1 - x_c^2)^2} \end{aligned} \quad (24)$$

则(22)式的特征方程有纯虚根, 因此发生平衡点稳定性切换的临界值为

$$\tau_+(0) = \frac{1}{\omega_0 \omega_+} (2\pi - \arccos(1 + \frac{\omega_+^2 + H}{L\omega_+})) \quad (25)$$

即当时滞参数满足 $\mu^2 + 2L - 4Q \leq 0$, 或 $\tau < \tau_+(0)$ 时, 平衡点 $(\pm x_c, 0)$ 的稳定性不随控制项发生改变. 此时可将时滞速度反馈项作为摄动项, 进行二阶Taylor展开, 带入同宿轨道表达式(12), 得到式(5)的Melnikov函数:

$$M(T_0) = -\mu I_1 + 2x_e \beta \gamma \cos(\omega T_0(\varphi)) I_2 + 2\beta \gamma \sin(\omega T_0(\varphi)) I_3 - 8x_e^2 \beta \xi \tau I_4, \quad (26)$$

$$I_4 = 0.$$

其中

$$I_1 = \frac{x_e \beta \sqrt{B - x_e^2(x_e^2 + 2B)}}{3(B + x_e^2)} E(\theta_3, \eta_3) - \frac{4R_1}{x_e^3 \sqrt{1 - 2x_e^2}} + \frac{4}{x_e^2} \left(F(\theta_3, \eta_3) - \frac{1}{x_e^2} E(\theta_3, \eta_3) \right)$$

$$\theta_3 = \operatorname{arccsc} h \left(\frac{R_1}{x_e} \right), \eta_3 = \frac{R_1^2 (B + x_e^2)}{x_e^4 + (2x_e^2 - 1)B},$$

$$I_2 = \int_0^\pi x_e \cos(\varphi) \frac{\sin(\omega T(\varphi))}{(1 - x_e \sin(\varphi))^2} d\varphi,$$

$$I_3 = \int_0^\pi x_e \cos(\varphi) \frac{\cos(\omega T(\varphi))}{(1 - x_e \sin(\varphi))^2} d\varphi.$$

在式(26)中,由于 $I_4 = 0$, 引起同宿分岔的临界条件并不随时滞量或反馈增益系数发生改变,这说明时滞速度反馈对混沌现象起不到控制作用.还原回系统参数,可得到引起系统(1)发生同宿分岔的临界电压

$$V_{AC}^0 = \frac{\mu V_b I_1}{2\beta \sqrt{I_2^2 + I_3^2}} \quad (27)$$

对应表 1 中系统参数取值,得到同宿分岔的交流电压阈值为 0.152V. 系统的同宿分岔会引发混沌运动,给定反馈增益系数,可将不同时滞量下系统发生混沌的临界交流电压幅值的数值结果和理论预测相对比,如图 5 所示,二者基本一致,同样说明时滞速度反馈无法有效抑制系统的同宿分岔.为研究系统的稳态振动,给定初始条件 $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 0)$,选取第 450 至第 500 个振动周期进行考察,在相平面上每隔一个外激励周期截取 Poincaré 截面,从而得到交流电压幅值为 0.17V 时系统响应随时滞量变化的分岔图(见图 4).根据图 4,当时滞量为 0 时,对应无控制系统,系统发生混沌运动,这与理论预测交流电压为 0.152V 时系统发生同宿分岔一致;但随着时滞量的增大,系统的稳态行为仍为混沌,并未发生本质改变.

4 结论与讨论

本文对一类双边电容微谐振器振动系统,在直流偏置电压上施加时滞速度反馈,研究反馈控制对微结构复杂性动力学行为的控制机理.首先将系统的同异宿轨道都通过引入新变量来显性表达,进而

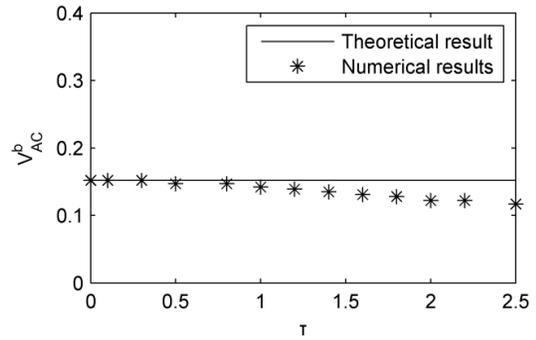


图 5 $g=0.2$ 时同宿分岔电压阈值随 τ 的变化

Fig. 5 Variation of voltage threshold for homoclinic bifurcation under different values of τ when $g=0.2$

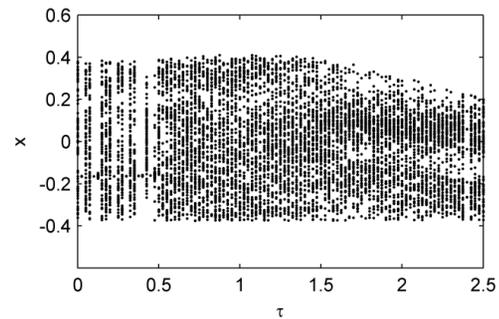


图 6 $V_{AC}=0.17V$ 时振子位移随 τ 的变化

Fig. 6 Variation of oscillator displacement with τ when $V_{AC}=0.17V$

利用 Melnikov 方法得到系统同异宿分岔必要条件,结合数值仿真结果,研究发现时滞速度反馈能够控制微结构的吸合不稳定现象:当反馈增益为正时,时滞速度反馈能有效地抑制微结构的吸合不稳定.然而对于同宿分岔引起的混沌现象,时滞速度反馈未能起到控制作用.

参 考 文 献

- 1 Younis M I. MEMS linear and nonlinear statics and dynamics. Springer: New York, 2011
- 2 Pallay M, Daeichin M, Towfighian S. Dynamic behavior of an electrostatic MEMS resonator with repulsive actuation. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 89(2): 1525 ~ 1538
- 3 Siewe M S, Hegazy U H. Homoclinic bifurcation and chaos control in MEMS resonators. *Applied Mathematical Modelling*, 2011, 35(12): 5533 ~ 5552
- 4 Sabarathinam S, Thamilaran K. Implementation of analog circuit and study of chaotic dynamics in a generalized Duffing-type MEMS resonator. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(4): 2345 ~ 2356
- 5 Dantas W G, Gusso A. Analysis of the chaotic dynamics of MEMS/NEMS doubly clamped beam resonators with two-sided electrodes. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, 28(10): 1850122

- 6 Alsaleem F M, Younis M I, Ouakad H M. On the nonlinear resonances and dynamic pull-in of electrostatically actuated resonators. *Journal of Micromechanics & Microengineering*, 2009, 19(4): 755 ~ 778
- 7 Ruzziconi L, Ramini A, Younis M, et al. Theoretical prediction of experimental jump and pull-in dynamics in a MEMS sensor. *Sensors*, 2014, 14(9): 17089 ~ 17111
- 8 Lenci S, Rega G. Control of pull-in dynamics in a nonlinear thermoelastic electrically actuated microbeam. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, 16(2): 390 ~ 401
- 9 Shang H. Pull-in instability of a typical electrostatic MEMS resonator and its control by delayed feedback. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(1): 171 ~ 183
- 10 Haghghi H S, Markazi A H D. Chaos prediction and control in MEMS resonators. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2010, 15(10): 3091 ~ 3099
- 11 Tusset A M, Balthazar J M, Rocha R T, et al. On suppression of chaotic motion of a nonlinear MEMS oscillator. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 99(1): 537 ~ 557
- 12 Alsaleem F M, Younis M I. Stabilization of electrostatic MEMS resonators using a delayed feedback controller. *Smart Material Structures*, 2010, 19(3): 035016
- 13 尚慧琳, 胡立力, 文永蓬. 一类静电驱动双边电容型微谐振器振动系统的复杂动力学特性研究. *振动与冲击*, 2018, 37(24): 18 ~ 23 (Shang H L, Hu L L, Wen Y P. Study on the complex dynamic characteristics of a kind of static driven double-capacitance micro-resonator vibration system. *Vibration and Impact*, 2018, 37(24): 18 ~ 23 (in Chinese))
- 14 Cao Y, Chung K, Xu J. A novel construction of homoclinic and heteroclinic orbits in nonlinear oscillators by a perturbation-incremental method. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 64(3): 221 ~ 236

CONTROL OF COMPLEX DYNAMICS OF A TYPE OF DOUBLE-SIDE MICRO RESONATOR VIBRATING SYSTEM VIA DELAYED VELOCITY FEEDBACK *

Liu Zhiqun Shang Huilin[†]

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

Abstract A typical double-side capacitive micro resonator is considered, and delayed velocity feedback is proposed to apply on DC bias voltage of its vibrating system to control its complex dynamical behavior. By inducing new variations, the heteroclinic orbits and homoclinic ones of the unperturbed system are expressed analytically. On this basis, the mechanism and the effect of the delayed feedback on controlling the global bifurcation are studied. It is found that delayed velocity feedback control is effective in suppressing pull-in instability of the microstructure but unsuitable to control chaos, which has some potential values in improving the global integrity of electro-static micro mechanical systems.

Key words micro-resonator, chaos, pull-in instability, delayed velocity feedback, global bifurcation

Received 10 February 2021, revised 11 March 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11472176)

[†] Corresponding author E-mail: shanghuilin@sit.edu.cn