

保守系统中非线性耦合振子间的能量传递^{*}

王锦涛 谢勇[†]

(西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室,陕西省无损检测与结构完整性评价工程技术研究中心,西安 710049)

摘要 利用复变量-平均法建立了非线性耦合振子内在保守系统的慢变动力学方程,推导出了两振子间能量完全传递的表达式,从而得出了完全能量传递时非线性振子的临界质量和系统初始能量需满足的关系.最后进行数值仿真并得到以下结论:系统两振子进入能量传递的暂态时间与振子的质量有关,当质量比大于等于 0.0557 时,两振子可不经暂态而直接发生能量交换;NES 质量越小,两振子能量交换的时间越长,当 NES 质量过小时,适当提高非线性耦合振子的初始能量可实现能量高效传递;非线性耦合振子系统的刚度会影响能量传递的暂态而对能量交换时间影响不大;非线性耦合振子初始能量的形式会影响系统的能量传递,势能比动能更容易引发系统能量传递.

关键词 主振子, NES, 保守系统, 能量传递, 慢变参数

中图分类号:O322;TH113.1

文献标志码:A

引言

靶能量传递(Targeted energy transfer, TET)是 Kopidakis 等^[1]发现的一种能量由主振子向 NES 传递的现象,能量传递的过程非常短暂且不可逆,每次传递的能量比较精确.非线性能量阱(Nonlinear energy sink, NES)^[2]可以实现靶能量传递使振动能量单向传递至 NES 并被其耗散掉.

非线性能量阱的动力学特性非常复杂,甚至对于两自由度非线性能量阱(2-DOF NES)现在还难以得到完全精确的解析分析,由于 NES 可实现高效减振,因此对 NES 进行理论研究仍然具有重要价值.国内外学者对 NES 的复杂非线性动力学进行了大量研究.Gendelman 等^[2]最早对非线性能量阱的靶能量传递进行了研究.文献[3]研究了线性振子耦合小质量非线性振子的力学特性,发现了两种可引发靶能量传递的条件,一种是 1:1 振动俘获,另一种是非谐振条件下非线性振子的高频振动.文献[4]中在系统无阻尼情况下用非平稳变换的方法得到了周期解,然后通过频率-能量图揭示了该系统的分岔结构,基于复变量-平均法对引发靶能量传递的分谐波,1:1 内共振及非线性拍(nonlinear

beat)现象作了分析.文献[5]详细分析了三种引发靶能量传递的情况.文献[6]研究了系统输入不同大小脉冲激励下的周期轨道和准周期轨道.文献[7]用简化的动力学方程说明当初始条件在一定范围时 NES 的效率较高.该研究可作为对文献[8]中不变流形研究的补充.文献[9]通过优化 NES 的参数实现了最优靶能量传递,并对 NES 的吸振效率进行了试验验证.文献[10]研究了一个二自由度非线性振动系统,给出了其频能图以及内共振情形的局部化非线性模态流形.提出了势能曲面上模态迹线的概念,发现系统产生内共振的标志之一是两条模态迹线存在交点.发现能量传递现象与两种机制有关:非线性模态局部化以及局部化模态之间的内共振;参与内共振的各个模态在迹线交叉点处实现了能量交换.另外,对 NES 的研究也做了一些实验验证^[11-13],证实了很多理论研究的成果.

靶能量传递主要通过共振俘获实现^[4],是 NES 抑制结构自由振动的主要原理.在研究 NES 抑制结构自由振动时,Sapsis 等^[14]把 NES 中取得最大能量耗散比的情况定义为最优靶能量传递,并证明了当实现最优靶能量传递时,主振子的振动能量会在半个慢变周期(super-slow half cycle)内达到零,这

2021-02-08 收到第 1 稿,2021-03-29 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11672219)

[†] 通信作者 E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn

便是目前最直观判断是否为最优靶能量传递的方法.虽然单自由度NES通过最优靶能量传递可以达到很高的振动抑制效率,但要使靶能量在非线性耦合振子间能够完全传递需要两个条件:第一、主振子的初始振动能量必须等于某一定值.若主振子的初始振动能量过小,则靶能量的传递就无法实现,这时NES对系统的振动抑制几乎不起作用,如果初始能量过大,会在一定程度上降低NES的振动抑制效果^[14,15];第二、实现最优靶能量传递需要NES具有一定的质量、以上两点仅为实现最优靶能量传递的定性结论,无法根据NES质量和主振子的初始振动能量设计NES.目前虽然有方法计算出了实现最优靶能量传递的NES的最小质量以及所需的初始能量大小,但是对能量传递过程中一些问题的揭示还不够完整^[16-18].

本研究对实现最优靶能量传递的NES质量和初始能量条件进行了定量分析.通过建立1:1内共振条件下系统的慢变方程,对保守系统中振动能量可以完全由线性振子传递至NES所需的最小质量和初始能量进行了理论推导和数值验证.根据研究结果可以设计NES的质量和初始能量,使NES实现最优靶能量传递.对原系统的数值仿真表明NES的质量会影响能量传递的暂态和能量交换时间,另外,靶能量的传递与初始能量的形式也有关.

1 非线性耦合振子系统的力学模型

1.1 原系统模型

在图1中,非线性耦合振子系统由一个线性主振子和立方刚度NES构成,系统方程如下:

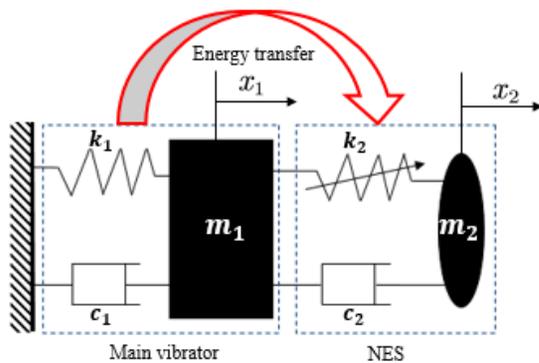


图1 非线性耦合振子系统模型

Fig.1 Nonlinear coupled oscillator system model

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + C_1 x_1' + k_1 x_1 + \\ C_2(x_1' - x_2') + k_2(x_1 - x_2)^3 = 0 \\ m_2 x_2'' + C_2(x_2' - x_1') + k_2(x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, m_1 为线性主振子质量, m_2 为NES质量,且 $m_2 \leq m_1$, k_1 为主振子的线性刚度, k_2 为NES的立方刚度, C_1 为主振子的线性阻尼, C_2 为NES线性阻尼.对系统引入时间尺度

$$\tau = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} t \quad (2)$$

然后进行变量替换

$$k_{21} = \frac{k_2}{k_1}, c_1 = C_1 \sqrt{\frac{1}{m_1 k_1}}, c_2 = C_2 \sqrt{\frac{1}{m_1 k_1}}, \varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \quad (3)$$

则方程(1)可表示成:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + x_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \\ k_{21}(x_1 - x_2)^3 = 0 \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{21}(x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

式中, \dot{x} 表示 x 对时间尺度 τ 的导数, $\varepsilon \ll 1$, (4)式的内在保守系统可表示为:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 + k_{21}(x_1 - x_2)^3 = 0 \\ \varepsilon \ddot{x}_2 + k_{21}(x_2 - x_1)^3 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

1.2 慢变力学模型

复变量—平均法不仅可以求解弱非线性振动系统,也能求解强非线性刚度的多自由度振动系统. Manevitch 等人采用复变量—平均法及多尺度法推导得出了式(5)的慢变方程^[19].在(5)式中进行如下变量替换

$$y_1 = x_1 / \sqrt{\varepsilon}, y_2 = (x_2 - x_1) / \sqrt{\varepsilon} \quad (6)$$

再进行如下复变量替换:

$$\begin{cases} \dot{y}_j + i\omega y_j = \varphi_j e^{i\omega\tau} \\ \dot{y}_j - i\omega y_j = \varphi_j^* e^{-i\omega\tau}, j = 1, 2 \end{cases} \quad (7)$$

其中,*表示共轭, $i^2 = -1$, ω 表示NES的高阶振动频率, φ_j 是快变量 ω 的慢变调制.当 $\omega = 1$ 时,NES的振动频率等于线性主振子的固有频率,这时在主振子固有频率附近发生的1:1内共振的情形就可以用该近似过程来表示.由(5)式、(6)式、(7)式可以得到下面的方程:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(1 + \varepsilon) + i\frac{\varepsilon}{2}\varphi_1 - i\frac{\varepsilon}{2}\varphi_1^* e^{-2i\tau} + \\ \varepsilon \left(\dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2}\varphi_2 - \frac{i}{2}\varphi_2^* e^{-2i\tau} \right) = 0 \\ \dot{\varphi}_1 + \frac{i}{2}\varphi_1 - \frac{i}{2}\varphi_1^* e^{-2i\tau} + \dot{\varphi}_2 + \frac{i}{2}\varphi_2 - \\ \frac{i}{2}\varphi_2^* e^{-2i\tau} - \frac{k_{21}}{8i} \left(\varphi_2^3 e^{2i\tau} - 3\varphi_2 |\varphi_2|^2 + \right. \\ \left. 3\varphi_2^* |\varphi_2|^2 e^{-2i\tau} - \varphi_2^{*3} e^{-4i\tau} \right) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

引入多尺度变换:

$$\begin{cases} \varphi_j = \varphi_{j0} + \varepsilon \varphi_{j1}, (j = 1, 2) \\ \frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1}, (\tau_0 = \tau, \tau_1 = \varepsilon \tau) \end{cases} \quad (9)$$

对 τ_0 积分后消去久期项可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2}(\varphi_{10} + \varphi_{20}) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2\varepsilon}(\varphi_{10} + \varphi_{20}) - \frac{3ik_{21}}{8\varepsilon} \varphi_{20} |\varphi_{20}|^2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

至此推导出了方程(5)的近似慢变力学模型(10).从上面的推导过程可以看出,要使此慢变模型成立需要两个条件:第一、质量比要满足 $\varepsilon \leq 1$,前面的假设也正好满足了实际工程要求NES质量要尽量小这一条件;第二、非线性系统的响应主要为1:1内共振.由于复变量平均法不限制 k_{21} 的大小,因此慢变模型可应用于强非线性系统求解,这在一些应用复变量—平均法的文献中曾有介绍,由于慢变模型(10)在文献[19]中已经得到了验证,所以这里不再给出它和数值解的比较.

2 保守系统中能量在两振子间的完全传递

2.1 慢变系统的两个首次积分

由于慢变系统(10)完全可积,因此可以求出该系统的两个首次积分,第一个首次积分可用哈密顿量求出.对方程(10)正则变换:

$$p_1 = \varphi_{10}^*, q_1 = \varphi_{10}, p_2 = \sqrt{\varepsilon} \varphi_{20}^*, q_2 = \sqrt{\varepsilon} \varphi_{20} \quad (11)$$

$$H = -\frac{i}{2} \left(|\varphi_{10}|^2 + |\varphi_{20}|^2 \right) - \frac{i}{2} (\varphi_{10} \varphi_{20}^* + \varphi_{20} \varphi_{10}^*) + \frac{3ik_{21}}{16} |\varphi_{20}|^4 \quad (12)$$

经验证式(12)满足哈密顿正则方程:

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j, \quad \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}_j, j = 1, 2 \quad (13)$$

所以式(12)是方程(10)的一个首次积分.经验证方程(10)满足:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(|\varphi_{10}|^2 + \varepsilon |\varphi_{20}|^2 \right)}{\partial \tau_1} &= \varphi_{10} \frac{\partial \varphi_{10}^*}{\partial \tau_1} + \varphi_{10}^* \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_1} + \\ \varepsilon \varphi_{20} \frac{\partial \varphi_{20}^*}{\partial \tau_1} + \varepsilon \varphi_{20}^* \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \tau_1} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

因此可以得到方程(10)的第二个首次积分:

$$|\varphi_{10}|^2 + \varepsilon |\varphi_{20}|^2 = n^2 (n \text{ 为常数}) \quad (15)$$

因为 $\varphi_{10}, \varphi_{20}$ 是复数,上式在复平面可展开成:

$$\varphi_{10} = n \cos \theta e^{i\alpha}, \varphi_{20} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} n \sin \theta e^{i\beta} \quad (16)$$

上式中, $n \cos \theta, n \sin \theta$ 是慢变幅值, α, β 是慢变相位.至此得到了方程(10)的两个首次积分:(12)式、(15)式.

2.2 推导能量完全传递时的NES质量条件

从(6)式、(7)式、(16)式可得线性主振子的能量表达式:

$$E_1(\tau) = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + x_1^2) = \frac{\varepsilon}{2} |\varphi_{10}|^2 = \frac{\varepsilon}{2} n^2 \cos^2 \theta(\tau) \quad (17)$$

NES振子的能量可以表示为:

$$E_2(\tau) = E_1(0) - E_1(\tau) = \frac{\varepsilon}{2} n^2 \sin^2 \theta \quad (18)$$

能量传递效率 η 可以表示为:

$$\eta = \frac{E_2(\tau)}{E_0(0)} = \frac{\varepsilon}{2} n^2 \sin^2 \theta(\tau) / \frac{\varepsilon}{2} n^2 = \sin^2 \theta \quad (19)$$

由此可见,两振子间的能量传递可以用 θ 表示.假设初始能量全部集中在主振子,那么两振子间能量完全传递的过程可以表示为:

$$\begin{cases} E_{1(\max)} = \frac{\varepsilon}{2} n^2, \theta = 0 \\ E_{1(\min)} = 0, \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (20)$$

即在初始时刻 $E_1(0) = 0.5\varepsilon n^2, E_2(0) = 0$,当能量在 t 时刻完全传递至非线性振子,有 $E_1(t) = 0, E_2(t) = 0.5\varepsilon n^2$.由(12)式、(16)式可得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(n^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{\varepsilon} n^2 \sin^2 \theta \right) + \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} n^2 \sin \theta \cos \theta \cos(\delta) - \frac{3k_{21} n^4}{16\varepsilon^2} \sin^4 \theta = H \end{aligned} \quad (21)$$

上式中 $\delta = \alpha - \beta$.从(17)式可以看出:主振子能量一直处于周期变化中,其周期为 π ,初始能量全部集中在主振子,经过半个周期后能量全部转移到NES振子中,能量从主振子传递至NES振子的过程实际上就是 θ 从0变化到 $\pi/2$ 的过程.线性主振子的能量变化率:

$$\dot{E}_1 = -0.5\varepsilon n^2 \dot{\theta} \sin 2\theta \quad (22)$$

上式表明在一个周期的始末能量的变化率必然为零, $\theta = 0$ 时,能量全部集中于主振子,这时主振子的能量变化率为零; $\theta = \pi$ 时,能量全部返回到主振子,这时主振子的能量变化率也为零; $\theta = \pi/2$ 时,能量完全传递至NES,主振子能量 $E_1=0$,这时主振子的能量变化率为零,但是当 $\dot{\theta}=0$ 时,主振子的能量变化率也为零,下面对 $\dot{\theta}=0$ 的情况进行讨论.

由(16)式得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_0} = ne^{i\alpha} \begin{pmatrix} -\sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau_0} + \\ i\cos\theta \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_0} \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{\partial \varphi_{20}}{\partial \tau_0} = \frac{ne^{i\beta}}{\sqrt{\varepsilon}} \begin{pmatrix} \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial \tau_0} + \\ i\sin\theta \frac{\partial \beta}{\partial \tau_0} \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

要使(23)式成立,须有:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_0} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_0} = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \tau_0} = 0 \quad (24)$$

按(9)式进行多尺度展开:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} \\ \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{\partial \beta}{\partial \tau_0} + \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} \end{cases} \quad (25)$$

因此,

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\tau} = \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} \\ \frac{d\alpha}{d\tau} = \varepsilon \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} \\ \frac{d\beta}{d\tau} = \varepsilon \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} \end{cases} \quad (26)$$

当能量完全传递至NES时,主振子的能量变化率: $d\theta/d\tau = 0 \Leftrightarrow \partial\theta/\partial\tau_1 = 0$. 由(10)和式(16)式得:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial \tau_1} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \sin\delta = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \tan\theta \cos\delta = 0 \\ \frac{\partial \beta}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cot\theta \cos\delta + \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{3k_{21}}{8\varepsilon^2} n^2 \sin^2\theta = 0 \end{cases} \quad (27)$$

其中, $\delta = \alpha - \beta$, $\delta \in [0, \pi]$. 从(27)式可以看出, $\partial\theta/\partial\tau_1 = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ 或 π , 因此, 只有 $\theta = \pi/2$, $\delta = 0$ 或 π 时才能实现能量完全传递. 下面研究 δ 的取值.

初始时刻能量完全集中在主振子, 这时必有 $\theta(\tau_0) = 0$, 且 $H = n^2/2$. 设当 $\theta \rightarrow \pi/2$ 时, $\delta \rightarrow \delta_0$, $\delta \in [0, \pi]$, 对(21)式做极限可以表示能量由线性主振子完全传递至NES振子的过程:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^{0.5}} - \frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}} + \frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \lim_{\delta \rightarrow \delta_0} \cos\delta \quad (28)$$

其中 $\delta \in [0, \pi]$. 上式可以写成:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^{0.5}} - \frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} + \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \lim_{\delta \rightarrow \delta_0} \cos\delta \quad (29)$$

因为 ε, n, k_{21} 均为常数, 由(28)式、(29)式可得:

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^{0.5}} - \frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \lim_{\delta \rightarrow \delta_0} \cos\delta \quad (30)$$

由于 ε, n, k_{21} 均为常数, 且 $-1 \leq \lim_{\delta \rightarrow \delta_0} \cos\delta \leq 1$, 必有:

$$\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon^{0.5}} - \frac{3k_{21}n^2}{16\varepsilon^{1.5}} = 0 \quad \text{且} \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

即:

$$n = n_0 = \sqrt{\frac{8\varepsilon(1-\varepsilon)}{3k_{21}}}, \quad \delta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (32)$$

由 $-1 \leq \cos\delta \leq 1$ 及(21)式可得:

$$-1 \leq \frac{H + \frac{3k_{21}n^4}{16\varepsilon^2} \sin^4\theta - \frac{1}{2} \left(n^2 \cos^2\theta + \frac{1}{\varepsilon} n^2 \sin^2\theta \right)}{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} n^2 \sin\theta \cos\theta} \leq 1 \quad (33)$$

当能量完全传递至非线性振子NES时, $n = \sqrt{\frac{8\varepsilon(1-\varepsilon)}{3k_{21}}}$, $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$, 当 $\theta(\tau_0) = 0$ 时, $H = n^2/2$, 代入(33)式可得:

$$-1 \leq \frac{1-\varepsilon}{4\sqrt{\varepsilon}} \leq 1 \quad (34)$$

经计算得:

$$0.0557 \leq \varepsilon \ll 1 \quad (35)$$

上式说明当NES振子与主振子的质量之比 $\varepsilon \geq \varepsilon_{21} = 0.0557$ 时才能实现能量完全传递, ε_{21} 是NES振子与主振子的临界质量比.

2.3 推导能量完全传递时的初始能量条件

前面推导出了在保守系统中1:1内共振条件下, 两振子间能量完全传递的必要条件, 下面研究实现完全能量传递的初始条件. 由(6)式、(7)式和(16)式可得线性主振子位移:

$$x_1 = \sqrt{\varepsilon} \left[\text{Im}(\varphi_{10} e^{i\tau}) \right] = \sqrt{\varepsilon} n \cos\theta \sin(\alpha + \tau) \quad (36)$$

主振子和非线性振子之间的相对位移:

$$x_2 - x_1 = \sqrt{\varepsilon} \left[\text{Im}(\varphi_{20} e^{i\tau}) \right] = n \sin \theta \sin(\beta + \tau) \quad (37)$$

考虑初始能量全部集中在主振子的情况:

$$(a) \quad \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0, x_{10} = x_{20} \neq 0$$

$$(b) \quad \dot{x}_{10} \neq 0, \dot{x}_{20} = 0, x_{10} = x_{20} = 0$$

当 $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0, x_{10} = x_{20} \neq 0$ 时, 线性主振子的初始位移为:

$$x_{10} = \sqrt{\varepsilon} n \quad (38)$$

当 $\dot{x}_{10} \neq 0, \dot{x}_{20} = 0, x_{10} = x_{20} = 0$ 时, 线性主振子的初始速度为:

$$\dot{x}_{10} = -\sqrt{\varepsilon} n \dot{\theta} \sin \theta \sin(\alpha + \tau) + \sqrt{\varepsilon} n (\dot{\alpha} + 1) \cos \theta \cos(\alpha + \tau) \quad (39)$$

在初始时刻 $\theta = 0, \alpha = 0, \dot{\alpha} = -0.5\varepsilon$, 所以:

$$\dot{x}_{10} = (1 - 0.5\varepsilon) \sqrt{\varepsilon} n, \varepsilon \ll 1 \quad (40)$$

从(32)式、(38)式、(40)式可以得出保守系统中靶能量完全传递的初始条件:

$$(a) \quad x_{10} = x_{20} = \varepsilon \sqrt{\frac{8(1-\varepsilon)}{3k_{21}}}, \dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0 \quad (41)$$

$$(b) \quad x_{10} = x_{20} = 0, \dot{x}_{20} = 0,$$

$$\dot{x}_{10} = (1 - 0.5\varepsilon) \varepsilon \sqrt{\frac{8(1-\varepsilon)}{3k_{21}}} \quad (42)$$

当线性主振子初始时刻既有位移又有速度时:

$$E_{10} = (\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 8) \frac{\varepsilon^2(1-\varepsilon)}{3k_{21}} \quad (43)$$

其中 E_{10} 是线性主振子的初始能量, 如果初始时刻线性主振子的能量满足(43)式, 那么系统就能实现能量完全传递.

3 数值验证和分析讨论

3.1 慢变系统能量完全传递条件的验证和分析

由于在推导能量完全传递条件的过程中进行了多次变量替换, 导致参数的量纲失去了明确的物理意义, 所以数值仿真的参数没有标明单位. 选取参数分析哈密顿系统(21)的 $\theta - \delta$ 相轨迹. 对 NES 和主振子的质量比选取 $\varepsilon > \varepsilon_{21}, \varepsilon = \varepsilon_{21}, \varepsilon < \varepsilon_{21}$ 三种情况(其中两振子的临界质量比 $\varepsilon_{21} = 0.0557$) 来验证前面推导的临界质量比是否正确. 每种情况中不同的刚度比值 k_{21} 分别对应弱非线性和强非线性系统. 图2-图3和图4中每条相轨迹表示不同的 n 值, 黑色虚线代表 $n = n_0$ 的相轨迹.

在图2中非线性振子 NES 与线性主振子的质量比 $\varepsilon > 0.0557$. 从图2可以看出, 尽管 k_{21} 取值不

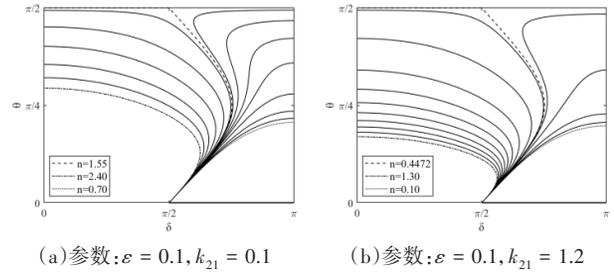


图2 $\theta - \delta$ 相平面图, $\varepsilon = 0.1$

Fig.2 Phase-plane portrait, $\varepsilon = 0.1$

同, 但只要 $n = n_0$, θ 的值都可以从 0 连续变化到 $\pi/2$. 由(17)式、(18)式和(19)式及前面的分析可知, 该过程就是线性主振子能量完全传递至 NES 的过程. 当 $n \neq n_0$ 时, θ 的最大值均没有达到 $\pi/2$, 从(17)式可以看出, 此时线性主振子的振动能量最小值 $E_{1\min} > 0$. 由式(18)可知, 此时只有部分振动能量从线性主振子传递到了非线性振子 NES, 传递率没有达到 100%, 且 n 值偏离 n_0 越大, 传递到 NES 的能量就越少, 能量传递效率也越低. 图2的仿真结果验证了前面的分析结论: 要使哈密顿系统(21)中 θ 能够由 0 连续变化到 $\pi/2$, 必须满足 $n = n_0$ 这个条件, 且当 $\theta = \pi/2$ 时, $\delta = \pi/2$, 这也正和前面的研究结果(32)式相吻合.

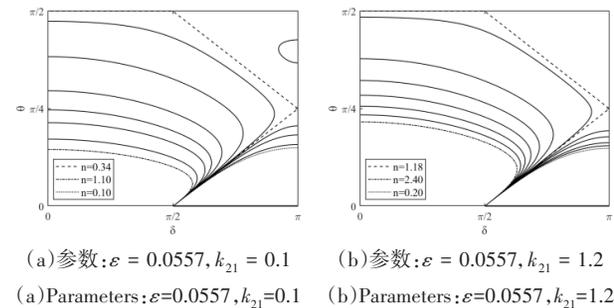


图3 $\theta - \delta$ 相平面图, $\varepsilon = 0.0557$

Fig.3 Phase-plane portrait, $\varepsilon = 0.0557$

在图3中, NES 与主振子的质量比 $\varepsilon = 0.0557$. 从图3可以看出, 系统刚度不论强弱, 只要 $n = n_0$, θ 都可以从 0 连续变化到 $\pi/2$. 和图2不同的是, 变化过程中 δ 恰好达到了边界值 π . 当 n 取其它值时, θ 的最大值均小于 $\pi/2$, 能量都没有完全传递至 NES.

从图4可以看出, 如果继续减小非线性振子 NES 的质量, 当 $n = n_0$ 时, θ 的最大值只有 0.48 左右. δ 在能量传递过程中虽然可以达到最大值 π , 但是 δ 的变化已经超出了 $(0 \leq \delta \leq \pi)$ 的范围, 相轨迹在 $\delta = \pi$ 处被切断, θ 只能在 0 和最大值之间循环, 系

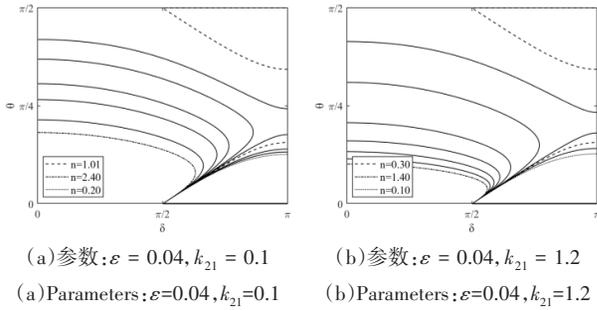


图 4 $\theta-\delta$ 相平面图, $\varepsilon = 0.04$

Fig.4 Phase-plane portrait, $\varepsilon = 0.04$

统无法实现完全能量传递.图 5 中每条曲线代表在 $n = n_0$ 下,在 NES 质量不同时系统的能量传递过程,其中黑色虚线表示 $n = n_0, \varepsilon = 0.0557$ 时系统的能量传递过程.

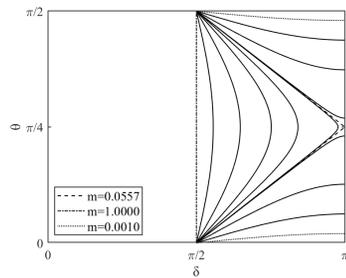


图 5 $\theta-\delta$ 相平面图, $n = n_0$

Fig.5 Phase-plane portrait, $n = n_0$

图 2-图 4 验证了只要 $n \neq n_0$, 主振子能量就不可能完全传递至 NES.图 5 中黑色虚线的左边区域表示都能够实现能量完全传递,从图 5 中可以看出,系统要实现能量完全传递还须满足 NES 的质量比大于某一值,而且证明了该值确实为 0.0557,从而验证了临界质量比的正确性的.综合图 2-图 5 可以得出如下结论:只有在 $n = n_0, \varepsilon \geq 0.0557$ 的情况下,系统才能实现能量完全传递.至此,完成了对慢变系统中能量完全传递条件的验证.

3.2 能量完全传递条件在原系统中的验证和分析

观察由 (41) 式、(42) 式和 (43) 式计算得到的初始条件能否使振动能量在保守系统 (5) 中的两振子间完全传递.两振子的能量分别按以下两式计算:

$$E_1 = 0.5\dot{x}_1^2 + 0.5x_1^2 \quad (44)$$

$$E_2 = 0.5\varepsilon\dot{x}_2^2 + 0.25k_{21}(x_2 - x_1)^4 \quad (45)$$

E_1, E_2 分别为线性主振子和 NES 振子的能量.初始条件按 (41) 式选取:

从图 6 和图 7 可以看出, NES 与主振子的质量之比 $\varepsilon \geq 0.0557$, 此时无论系统的非线性刚度强弱,主振子能量都降到了零,也就是说振动能量在两振

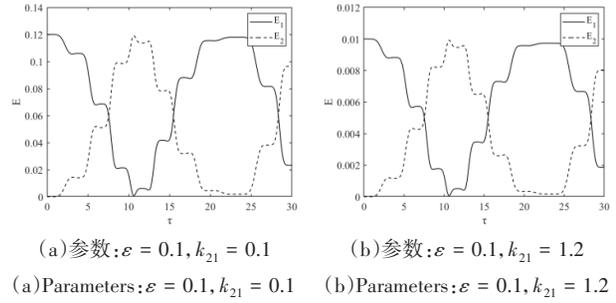


图 6 两振子间的能量传递

Fig.6 Energy transfer between two oscillators

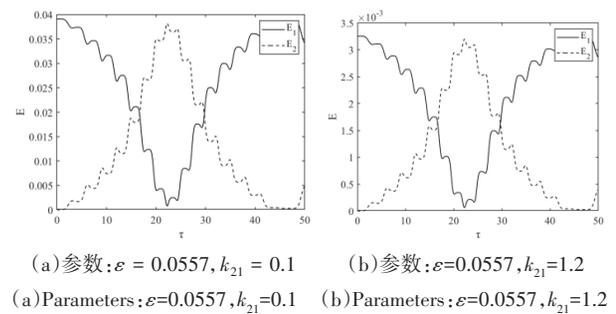


图 7 两振子间的能量传递

Fig.7 Energy transfer between two oscillators

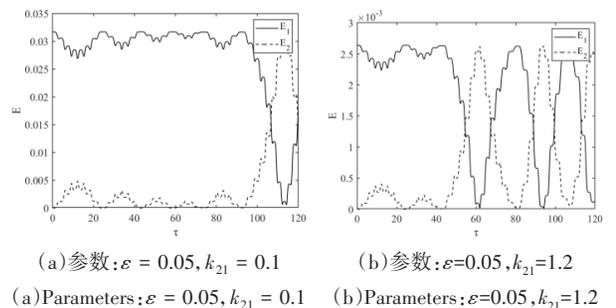


图 8 两振子间的能量传递

Fig.8 Energy transfer between two oscillators

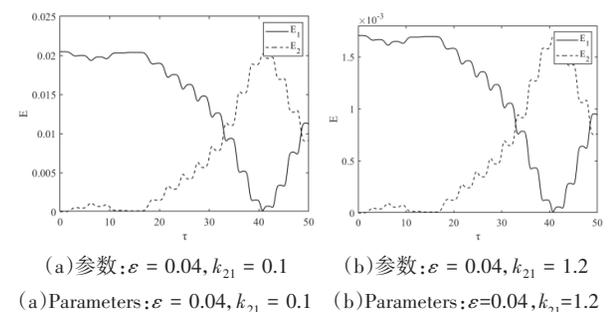
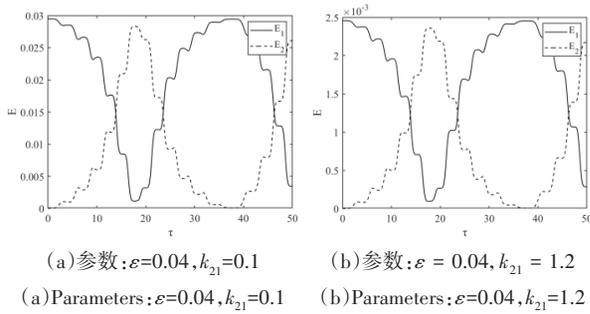


图 9 两振子间的能量传递

Fig.9 Energy transfer between two oscillators

子之间都实现了完全传递,这与图 2-图 3 以及前面的结论正好吻合.

从图 6-图 9 可以看出 NES 的质量越大,系统能量交换的周期越短,而刚度对能量交换的周期基本

图10 两振子间的能量传递, $x_{ten10} = 1.25x_{nine10}$ Fig.10 Energy transfer between two oscillators, $x_{ten10} = 1.25x_{nine10}$

没有影响,但是对暂态和振子能量的变化率有影响.图8是在 $n = n_0, \varepsilon < 0.0557$ 下系统的能量传递过程,经过观察分析图6-图9,可以得出下面结论:第一、系统两振子进入能量传递前的暂态时间与振子的质量有关;第二、系统经过暂态后,两振子能量交换的时间与振子的质量有关.从图6-图7可以看出系统实现了完全能量传递,这与图2和图3一致.图9中系统在 $n = n_0, \varepsilon = 0.04$ 情况下基本实现了完全能量传递,然而在图4中能量传递效率最高却只有0.48左右,说明由近似慢变系统推导出的临界质量比确实有偏差.

图10的初始位移按图9的1.25倍选取,对比图9和图10可以看出:第一、图9实现了完全能量传递而图10没有;第二、图9引发能量传递的暂态时间比图10长得多,能量交换时间也比图10长,这验证了系统要实现能量完全传递初始能量必须等于某一定值,说明初始条件会影响能量传递.从图10可以看出此时能量传递率比较高,事实上这和前面得出的结论并不矛盾,从图4可以看出,虽然在 $n = n_0$ 处 θ 的最大值很小,能量的传递效率不高,但 $n > n_0$ 时,虚线左边的曲线仍然可以达到较大的 θ 值,即NES可以实现较高的能量传递效率,当 $n=1.1245$ 时,系统的能量传递率高达96%,按照前面对慢变模型的分析,这时的能量传递效率确实没有达到百分之百,图4和图10也互相印证了这一点.

初始条件按(42)式选取:图11按照(42)式选取初始速度,图6和图7按照(41)式选取初始位移,系统初始能量相同,其它参数一致,得到的结果却不同;图6和图7系统实现了完全传递,图11(a)系统的振动能量虽然在两振子间高效传递,但没有达到完全传递,另外它的能量交换持续时间比图6更长.图11(b)在质量比取0.0557时,振动能量便无法向NES传递了,这说明非线性能量阱的能量传递

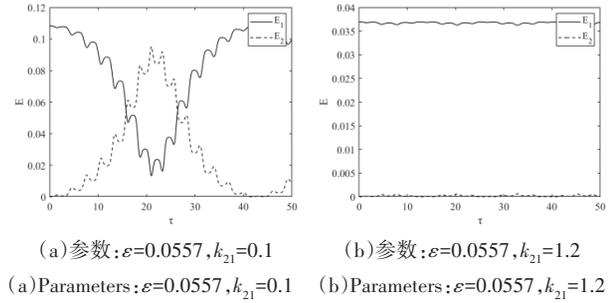
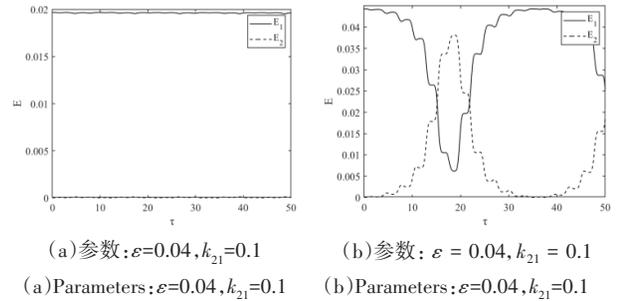


图11 两振子间的能量传递

Fig.11 Energy transfer between two oscillators

图12 两振子间的能量传递, $\dot{x}_{b10} = 1.5\dot{x}_{a10}$ Fig.12 Energy transfer between two oscillators, $\dot{x}_{b10} = 1.5\dot{x}_{a10}$

与初始能量的形式有关,而且预测的临界质量比也有偏差,这种偏差是由平均法、多尺度法以及龙格库塔法造成的.按照(42)式可以预测实现完全能量传递时所需的初始速度,如图12,在质量比 $\varepsilon < 0.0557$ 时,系统已无法实现靶能量的完全传递.

在图12中质量比 ε 取0.04,初始速度按式(42)的1.5倍选取,可见能量的传递效率较高.这表明即使NES的质量小于临界值,若提高线性振子的初始能量,也可以取得较好的能量传递效果.需要说明,这种现象与前面的推导并不矛盾,从图4可以看出,虽然在 $n = n_0$ 处能量的传递效率不高(θ 的最大值很小),但在 $n > n_0$ 时,虚线左边的曲线仍然可以达到较大的 θ 值,即NES可以实现较高的能量传递效率,按照前面对慢变模型的分析,这时的能量传递效率无法达到百分之百.另外从图7和图9、图11和图12可以看出在相同条件下,势能形式的能量比动能更容易实现系统的能量传递.

初始条件按(43)式选取:图13的初始条件按(43)式计算,虽然系统能量都实现了高效传递,但都无法实现完全传递.图6和图7实现了完全能量传递,图13(a)虽然质量比满足条件,但初始能量并没有满足,说明系统的完全能量传递和系统的初始条件有关,也验证了系统的初始条件必须为(41)式或(42)式才能实现完全能量传递.图13(b)中

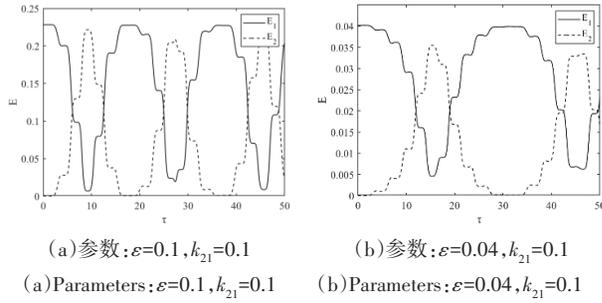


图 13 两振子间的能量传递

Fig.13 Energy transfer between two oscillators

NES 与主振子的质量比 $\varepsilon < 0.0557$, 可以看出振动能量在两振子之间实现了高效传递, 但没有达到完全传递, 这是因为质量比和初始条件都没有满足完全能量传递的条件, 图 4 和图 13(b) 互相印证了这一点.

暂态 transient: 系统开始振动至两振子开始发生能量换的时间. 能量交换时间 exchange: 主振子能量传递给 NES 达到最大, 然后 NES 又返还给主振子的能量达到最大时的时间.

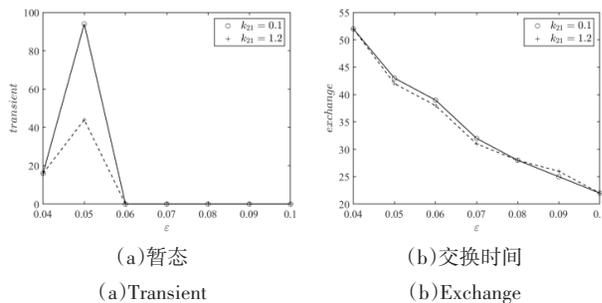


图 14 暂态及能量交换时间

Fig.14 Transient and exchange time

能量传递率 η : 主振子传递给 NES 的最大能量与系统初始能量的比例.

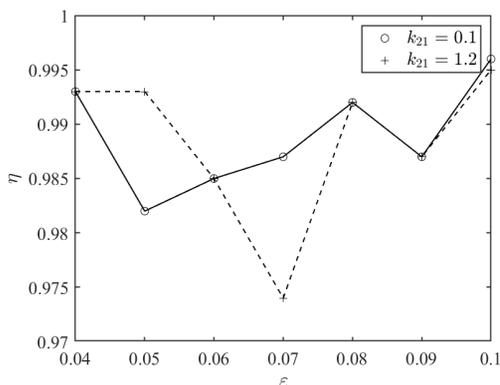


图 15 不同参数条件下的能量传递率

Fig.15 Energy transfer efficiency with different parameters

4 结论

(1) 两自由度非线性耦合振子的保守系统中, 实现主振子与非线性振子 NES 之间的能量完全传递必须满足两个条件: 第一、NES 具有一定的质量, 且主振子和 NES 振子的质量比必须大于等于 0.0557; 第二, 主振子的初始振动能量必须等于某一定值, 而且该值可按 (41) 式和 (42) 式给出.

(2) 系统两振子进入能量传递前的暂态时间与振子的质量有关. NES 质量越小, 两振子能量交换的时间越长, 当质量比大于等于 0.0557 时, 两振子可不经暂态而直接进行能量交换, 当 NES 质量过小时, 适当提高非线性耦合振子的初始能量可实现能量高效传递.

(3) 非线性耦合振子系统的刚度会影响能量传递的暂态时间, 但对能量交换的时间影响不大.

(4) 非线性耦合振子初始能量的形式会影响系统的能量传递, 在系统参数相同, 初始能量一样多的情况下, 势能比动能更容易引发系统能量传递.

参 考 文 献

- 1 Kopidakis G, Aubry G, Tsironis P. Targeted energy transfer through discrete breathers in nonlinear systems. *Physical Review Letters*, 2001, 87: 165501
- 2 Gendelman O, Manevitch L, Vakakis A F, et al. Energy pumping in coupled mechanical oscillators, part I: dynamics of the underlying Hamiltonian systems. *Journal of Applied Mechanics*, 2001, 68: 34~41
- 3 Gendelman O, Gorlov D, Manevitch L, et al. Dynamics of coupled linear and essentially nonlinear oscillators with substantially different masses. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 286: 1~19
- 4 Lee Y, Kerschen G, Vakakis A F, et al. Complicated dynamics of a linear oscillator with a light, essentially nonlinear attachment. *Physica D*, 2005, 204(12): 41~69
- 5 Kerschen G, Lee Y, Vakakis A F, et al. Irreversible passive energy transfer in coupled oscillators with essential nonlinearity. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, 66(2): 648~679
- 6 Kerschen G, Gendelman O, Vakakis A F, et al. Impulsive periodic and quasi-periodic orbits of coupled oscillators with essential stiffness nonlinearity. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(5): 959~978
- 7 Panagopoulos P, Gendelman O, Vakakis A F. Robustness

- of nonlinear targeted energy transfer in coupled oscillators to changes of initial conditions. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 47(4):377~387
- 8 Gendelman O V. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 37(2):115~128
- 9 Manevitch L, Gourdon E, Lamarque C. Parameters optimization for energy pumping in strongly non-homogeneous 2 DOF system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 31(4):900~911
- 10 张新华, 曹保锋. 非线性振动系统的能量传递机理. 应用力学学报, 2013, 30(6):839~845 (Zhang X H, Cao B F. Mechanism of energy transfer in nonlinear vibratory systems. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2013, 30(6):839~845(in Chinese))
- 11 Viguie R, Kerschen G. Using nonlinear targeted energy transfer to stabilize drill-string systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2009, 23:148~169
- 12 Nucera F, Iacono F. Application of broadband nonlinear targeted energy transfers for seismic mitigation of a shear frame: experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 313:57~76
- 13 Bellet R, Cochelin B. Experimental study of targeted energy transfer from an acoustic system to a nonlinear membrane absorber. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329:2768~2791
- 14 Sapsis T P, Vakakis A F, Gendelman O V, et al. Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: Part II, analytical study. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 325(1-2):297~320
- 15 Quinn D D, Gendelman O V, Kerschen G, et al. Efficiency of targeted energy transfers in coupled nonlinear oscillators associated with 1:1 resonance captures: part I. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 311(3~5):1228~1248
- 16 张也弛, 孔宪仁, 杨正贤, 等. 非线性吸振器的靶能量传递及参数设计. 振动工程学报, 2011, 24(2):111~117 (Zhang Y C, Kong X R, Yang Z X, et al. Targeted energy transfer and parameter design of a nonlinear vibration absorber. *Journal of Vibration Engineering*, 2011, 24(2):111~117(in Chinese))
- 17 张也弛, 孔宪仁. 非线性耦合振子间产生靶能量传递的初始条件. 哈尔滨工业大学学报, 2012, 44(7):21~26 (Zhang Y C, Kong X R. Initial conditions for targeted energy transfer in coupled nonlinear oscillators. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2012, 44(7):21~26(in Chinese))
- 18 张也弛, 孔宪仁, 张红亮. 非线性耦合振子间的靶能量传递研究: 保守系统中的完全传递. 振动与冲击, 2012, 31(1):150~155 (Zhang Y C, Kong X R, Zhang H L. Targeted energy transfer among coupled nonlinear oscillators: complete energy exchange in a conservative system. *Journal of Vibration and Shock*, 2012, 31(1):150~155(in Chinese))
- 19 Manevitch L I, Musienko A I, Lamarque C. New analytical approach to energy pumping problem in strongly nonhomogeneous 2dof systems. *Meccanica*, 2007, 42(1):77~83

ENERGY TRANSFER BETWEEN NONLINEAR COUPLED OSCILLATORS IN CONSERVATIVE SYSTEMS *

Wang Jintao Xie Yong[†]

(*State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structure, Shaanxi Engineering Research Center of
Nondestructive Testing and Structural Integrity Evaluation, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China*)

Abstract In this study, the slowly varying dynamic equation of the conservative system of the nonlinear coupled oscillator is established by using the complex variable-average method, and the expression of complete energy transfer between the two oscillators is deduced. Thus, the relationship between the critical mass of the nonlinear oscillator and the initial energy of the system is obtained. Finally, the numerical simulation is carried out and an interesting conclusion is obtained: the transient time of the two oscillators entering the energy transfer in the system is related to the mass of the oscillator. When the mass ratio is greater than or equal to 0.0557, the energy exchange between the two oscillators can occur directly without transient. The smaller the NES mass is, the longer the energy exchange time between the two oscillators is. When the NES mass is too small, properly increasing the initial energy of the nonlinear coupled oscillator can realize efficient energy transfer. The stiffness of nonlinear coupled vibration subsystem will affect the transient of energy transfer but has little effect on the energy exchange time. The form of the initial energy of the nonlinear coupled oscillator will affect the energy transfer of the system, and the potential energy is easier to cause the energy transfer of the system than the kinetic energy.

Key words main oscillator, NES, conservative system, target energy transfer, slow-varying parameter

Received 8 February 2021, revised 29 March 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11672219)

[†] Corresponding author E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn