

# 萤火虫算法求解多体系统动力学微分-代数方程\*

张笑笑<sup>1</sup> 丁洁玉<sup>1,2\*</sup>

(1. 青岛大学 数学与统计学院, 青岛 266071)(2. 青岛大学 计算力学与工程仿真研究中心, 青岛 266071)

**摘要** 针对多体系统动力学微分-代数方程求解问题, 研究基于萤火虫算法的求解方法. 首先将广义坐标和广义速度进行 Lagrange 插值, 结合 Gauss 数值积分方法, 将微分-代数方程求解问题转化成求解最优化问题. 然后用萤火虫算法对问题进行优化求解. 最后, 通过对平面双连杆机械臂的多体系统仿真实验, 验证了萤火虫算法在求解动力学方程中既保持了约束又较好地保证了能量精度. 结果表明智能优化算法在求解多体动力学问题上具有较好的应用前景.

**关键词** 多体系统动力学, 微分代数方程, 萤火虫算法

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-113

## 引言

微分-代数方程是描述多体系统动力学的数学模型, 它由微分方程和代数约束方程组成, 其数值求解方法的研究是多体系统动力学研究的重要内容. 保持约束稳定从而保证微分-代数方程求解的稳定是数值方法研究的重点<sup>[1]</sup>. 近年来逐渐发展起来的一些方法, 如: 坐标缩并方法<sup>[2]</sup>、广义- $\alpha$ 方法<sup>[3]</sup>、辛算法<sup>[4]</sup>、能量方法<sup>[5,6]</sup>、辛保持的变分数值积分方法<sup>[7]</sup>、Lie 群方法<sup>[8]</sup>等, 均取得了较好的求解结果.

萤火虫算法 (firefly algorithm, FA) 是 XS. Yang 在 2008 年提出的一种新颖的智能优化算法<sup>[9]</sup>. 该方法的思想是模拟萤火虫闪烁行为, 通过萤火虫间的相互吸引来实现种群的迭代进化. 近年来, 研究人员对标准 FA 算法进行诸多改进, 较好地解决算法收敛速度慢、求解精度低、易陷入局部最优等缺陷. 例如: 将变量从混沌空间变换到解空间然后再进行搜索的混沌萤火虫算法<sup>[10,11]</sup>; 通过将 FA 与其他算法结合提出混合萤火虫算法<sup>[12-14]</sup>; 基于离散空间的离散萤火虫算法<sup>[15]</sup>等. 目前该类算法已经在诸多优化问题中得到了较好的效果, 并且在机器学习、生产调度、机器人智能控制和图像处理等领域得到了广泛的应用.

本文主要通过 Lagrange 插值, 结合 Gauss 数值

积分方法将微分-代数方程求解问题转换成优化问题, 然后对该优化问题进行萤火虫算法设计. 最后对平面双连杆系统进行仿真实验.

## 1 多体系统动力学微分-代数方程

多体系统动力学方程通常为指标 3 的微分-代数方程组 (DAEs):

$$\begin{cases} M(q, t)\ddot{q} + \Phi_q^T \lambda = F(\dot{q}, q, t) \\ \Phi(q, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $q \in R^n$  是广义坐标,  $\dot{q} \in R^n$  是广义速度,  $\lambda \in R^d$  是 Lagrange 乘子,  $\Phi$  为广义坐标  $q$  的约束方程,  $\Phi_q$  为约束方程的 Jacobi 矩阵.

将约束方程  $\Phi(q, t) = 0$  求两阶导, 方程 (1) 可以由指标 3 降为指标 1, 方程形式如下:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qt} - \dot{q} - \Phi_u \end{bmatrix} \quad (2)$$

将仿真时间  $[0, T]$  平均划分为若干小区间  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . 在时间  $[t_i, t_{i+1}]$  中对广义坐标  $q(t)$  进行 Lagrange 插值:

$$q(t) = \sum_{j=0}^m l_j(t) q_j \quad (3)$$

$$l_j(t) = \prod_{k=0, k \neq j}^m \frac{(t - t_k)}{(t_j - t_k)} \quad (4)$$

则

2019-11-05 收到第 1 稿, 2019-12-17 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目 (11772166, 11472143)

† 通讯作者 E-mail: djy@qdu.edu.cn

$$\dot{q}(t) = \sum_{j=0}^m \dot{l}_j(t) q_j \quad (5)$$

$$\ddot{q}(t) = \sum_{j=0}^m \ddot{l}_j(t) q_j \quad (6)$$

为保证位移约束、速度约束和加速度约束,插值函数  $q(t)$ 、 $\dot{q}(t)$ 、 $\ddot{q}(t)$  需要满足如下 3d 个约束方程:

$$\begin{cases} \Phi(q, t) = 0 \\ \dot{\Phi}(q, \dot{q}, t) = 0 \\ \ddot{\Phi}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

通过方程组(7)将方程(2)中的变量进行缩并,

3d 个变量  $(q_1, \dots, q_d; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_d; \ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_d)$  可以由  $3(n-d)$  个变量  $(q_{d+1}, \dots, q_n; \dot{q}_{d+1}, \dots, \dot{q}_n; \ddot{q}_{d+1}, \dots, \ddot{q}_n)$  来表示. 然后将  $q(t)$ 、 $\dot{q}(t)$ 、 $\ddot{q}(t)$  代入微分-代数方程(2)得到:

$$f(t) = \begin{bmatrix} \ddot{q}(t) \\ \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F(\dot{q}(t), q(t), t) \\ -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qq} \dot{q} - \Phi_u \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$$

若对于  $\forall t \in [t_i, t_{i+1}]$  都有  $f(t) = 0$ , 则插值函数  $q(t)$  为式(1)在  $[t_i, t_{i+1}]$  上的精确解. 显然非线性函数(8)一般不存在精确解, 只能求解相对于插值函数  $q(t)$  尽可能满足(8)式接近于 0 的相对最优解. 则可以转换成如下优化问题:

$$\min_{q_i} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f^T f dx \quad (9)$$

对上式进行 Gauss 数值积分, 可以化成如下形式:

$$\min_{q_i} \sum_{s=1}^S A_s f^T(t_s) f(t_s) dx \quad (10)$$

其中,  $A_s$  为 Gauss 积分系数,  $t_s$  为 Gauss 积分节点. 显然, 式(10)是一个非凸优化问题<sup>[16]</sup>, 已有的研究表明, 传统的数学优化方法难以对此类问题进行有效求解, 智能优化算法是求解此类问题的有效算法. 萤火虫算法是模仿种群运动的一种智能算法, 提供了求解 DAE 方程的新方法.

## 2 萤火虫算法设计

萤火虫算法包含一个有  $M$  个个体的萤火虫种群系统  $X = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_M\}$ ,  $X_i \in R^p$ . 第  $i$  个个体在时间  $t$  处的位置:  $X_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{id}(t))$ . 萤火虫对彼此吸引的原因取决于两个因素, 即自身亮度  $L_i$  和吸引度  $\beta$ . 其中, 萤火虫的亮度取决于自身所在位置的目标值  $L_i = \varphi(X_i)$ . 吸引度与亮度相关,

愈亮的萤火虫吸引亮度比其弱的萤火虫往这个方向移动. 吸引度与距离  $R_{i,j}$  成反比, 距离越远的萤火虫吸引度越低. 系统  $X$  的整体最优位置为  $X_g$ . 迭代过程中, 萤火虫的位置更新公式如下<sup>[17]</sup>:

$$X_i^{t+1} = X_i^t + \beta(X_g - X_i^t) + \alpha\eta_i^t \quad (11)$$

$$\beta = \beta_0 e^{-\gamma R_{i,j}^v}$$

其中,  $\gamma$  是光吸引系数;  $\beta_0$  是最大吸引度;  $\alpha \in (0, 1)$  是步长因子;  $\alpha\eta_i^t$  为扰动项;  $v$  为动态视觉权重, 越大寻优视野越大, 越容易获得远距离信息;  $R_{i,j}$  为萤火虫  $i$  和  $j$  之间的距离.

迭代初期, 希望对萤火虫种群个体进行较大扰动, 以增强全局探索能力有利于跳出局部极值点; 而在搜索后期, 要求对个体减小扰动, 以提高算法的搜索精度. 因此, 设计扰动项如下:

$$\begin{cases} \eta_i^{t+1} = \alpha\eta_i^t + \beta(X_g - X_i^t) \\ \eta_i^1 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

运用萤火虫算法求解区间  $[t_i, t_{i+1}]$  的插值函数  $q(t)$ , 已知初始点  $q_0 = q(t_i) \in R^n$ , 插值节点  $q_j, j = 1, 2, \dots, m$  是待优化的节点, 并且  $q_j$  满足约束  $\Phi(q, t) = 0$ . 一般有  $e$  个约束方程, 则维度  $d = (n - e)m$ . 定义目标函数如下:

$$\varphi(q_j) = A_s f^T(t_s) f(t_s) \quad (13)$$

如果  $\varphi(q_j) = 0$ , 则  $q_j, j = 1, 2, \dots, m$  即为所求的最优值. 由于目标函数  $\varphi$  为非线性函数, 一般不存在解析解, 所以  $\varphi(q_j)$  只能尽可能地接近精确解, 设置收敛精度  $\varphi_{min}$  和最大迭代步数  $g_{max}$ , 若达到收敛精度或达到最大迭代步数, 则输出寻优结果.

萤火虫算法的求解步骤如下:

1) 设置萤火虫算法的初始参数: 种群规模  $M$ , 萤火虫位置维度  $d$ , 萤火虫位置的变化范围, 最大迭代次数  $g_{max}$ , 收敛精度  $\varphi_{min}$ , 光吸引系数  $\gamma$ ; 最大吸引度  $\beta_0$ ; 步长因子  $\alpha$ , 初始扰动项  $\eta_i^1 = 0$ , 并随机生成初始种群, 定义目标函数  $\varphi$ ;

2) 根据设定的目标函数, 分别计算每个个体的适应度值, 比较种群的适应度, 确定种群的亮度最强个体  $X_g$ ;

3) 计算萤火虫  $X_i$  到亮度最强个体  $X_g$  的距离  $R_{i,g}$ , 确定  $X_g$  对所有个体的吸引度  $\beta$ , 根据公式(10)对所有萤火虫进行移动操作, 更新扰动项  $\eta_i^{t+1}$ ;

4) 比较移动前后的萤火虫适应度值, 若优于之前位置则完成位置更新, 否则保持原位置不移动;

5) 如果  $\varphi(X_g) < \varphi_{min}$  或达到最大迭代步数  $g_{max}$ ,

则输出最优解  $g_{best}$ , 否则重复步骤2)-步骤5), 直到满足预设的终止条件.

### 3 数值算例

下面以平面双连杆机械臂系统为例, 对上述方法进行验证和分析. 如图1所示, 设杆1质量  $m_1 = 1\text{kg}$ , 杆长  $L_1 = 1\text{m}$ , 质心坐标为  $(x_1, y_1)$ . 杆2的质量  $m_2 = 2\text{kg}$ , 杆长  $L_2 = \sqrt{3}\text{m}$ , 质心坐标为  $(x_2, y_2)$ . 两个刚性连杆可以绕端点自由转动, 取X轴为零势能面, 假设系统只受重力作用, 重力加速度  $g = 9.81$ . 系统状态变量  $q = (x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2)$ , 则系统动力学微分-代数方程为:

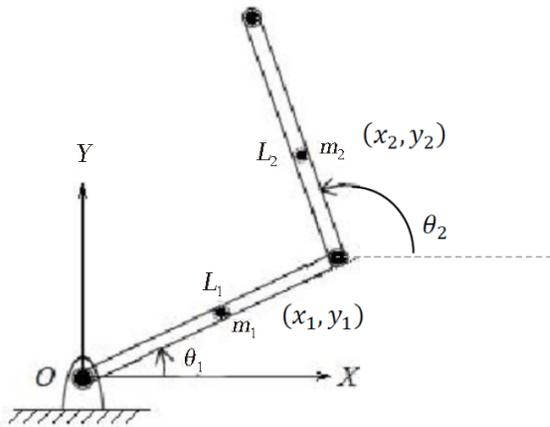


图1 平面双连杆机械臂

Fig.1 Two-link planar manipulator

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中, 广义力矢量  $F = (0, -m_1g, 0, 0, -m_2g, 0)$ , 广义质量矩阵  $M = \text{diag}(m_1, m_1, J_1, m_2, m_2, J_2)$ , 连杆转动惯量  $J_1 = \frac{1}{12}m_1L_1^2$ ,  $J_2 = \frac{1}{12}m_2L_2^2$ . 采用三点 Lagrange 插值逼近  $q(t)$ , 由初值  $q(t_0) = q_0$ ,  $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$  得:

$$q_1 = \left( \frac{h\dot{q}_0 + 3q_0 + q_2}{4} \right), h = t_{i+1} - t_i \quad (15)$$

为满足约束方程  $\Phi = 0, \dot{\Phi} = 0, \ddot{\Phi} = 0$ , 插值函数  $q(t)$  中变量可以缩并表示为:

$$q = \begin{pmatrix} \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \\ \frac{L_1}{2} \sin \theta_1 \\ \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 + \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 \\ L_1 \sin \theta_1 + \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2} \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ -L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\ddot{q} = \begin{pmatrix} -\frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - \frac{L_1}{2} \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ -\frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + \frac{L_1}{2} \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ -L_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - L_1 \sin \theta_1 \ddot{\theta}_1 - \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ -L_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 + L_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 - \frac{L_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 + \frac{L_2}{2} \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

两点 Gauss 数值积分方法求解目标函数.

$$\min_{q_2} \left( \sum_{s=1}^2 A_s f^T(t_s) f(t_s) dx \right) \quad (19)$$

$$\begin{cases} A_1 = A_2 = \frac{h}{2} \\ t_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \\ t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{h}{2} + \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \end{cases} \quad (20)$$

取时间步长  $h = 0.002\text{s}$ , 仿真时间  $20\text{s}$ . 连杆初始状态:  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = -\frac{\pi}{6}$ , 广义速度  $\dot{q} = 0$ . 萤火虫算法参数设置: 种群规模  $M = 60$ , 光吸引系数  $\gamma = 1$ , 最大吸引度  $\beta_0 = 0.7$ , 步长因子  $\alpha = 0.7$ , 收敛精度  $\varphi_{min} = 10^{-15}$ , 最大迭代步数  $g_{max} = 1000$ . 仿真结果如图所示:

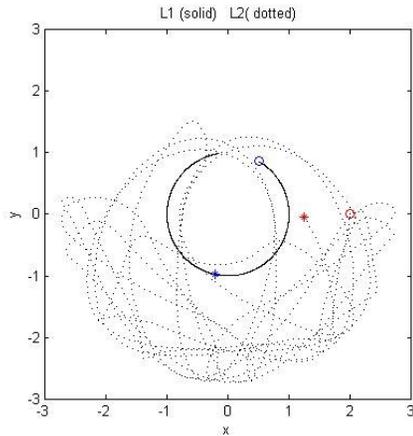


图2 连杆末端运动轨迹

Fig. 2 The trajectory of the end of rod

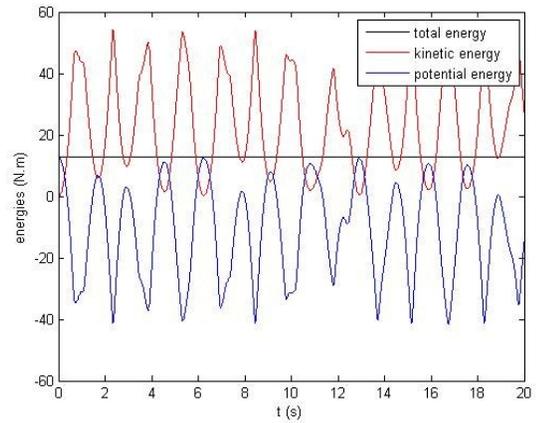


图4 系统动能、势能

Fig. 4 System Kinetic Energy and Potential Energy

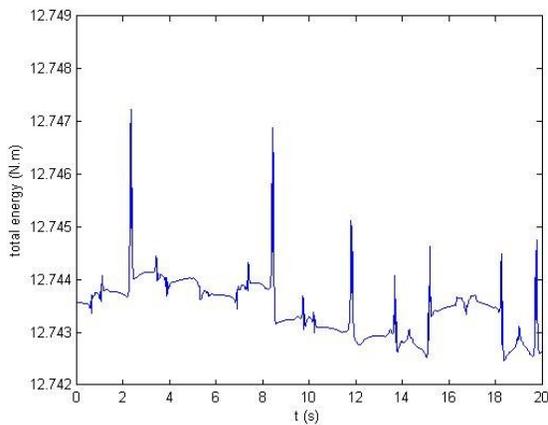


图3 系统总能量

Fig. 3 Total System Energy

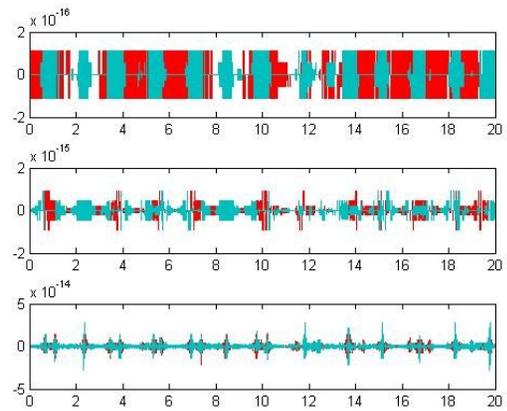


图5 双连杆机械臂约束

Fig. 5 Constraints of the two-link manipulator

图2-图5为时间步长0.005时系统仿真结果。从连杆末端运动轨迹和系统能量变化可以看出,连杆运动过程稳定,没有出现明显偏移。位移约束、速度级约束和加速度级约束没有出现违约。

采用不同时间步长对平面双连杆系统进行仿真实验,结果比较见表1。其中 $H = T + U$ 为系统总能量,  $\varepsilon(H) = \max_{0 < i < n} \frac{|H(t_i) - H(t_0)|}{H(t_0)}$ 为系统总能量的

最大相对误差,  $MRE(H) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|H(t_i) - H(t_0)|}{H(t_0)}$ 为

系统总能量的平均相对误差,  $\varepsilon(\Phi)$ 、 $\varepsilon(\dot{\Phi})$ 、 $\varepsilon(\ddot{\Phi})$ 分别为系统位移约束、速度约束和加速度约束的最大误差,仿真时间为20s。

采用相同时间步长  $h = 0.01$  对平面双连杆系统进行仿真实验,结果比较见表2,其中FA-DAE表示本文的求解算法,RK4表示四阶Runge-Kutta方法,仿真时间为20s。

表1 不同时间步长的误差结果比较

Table 1 Comparison of errors for different time steps

Step	$\varepsilon(H)$	MRE(H)	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$	Runtime T/s
$h = 0.002$	$2.8782 \times 10^{-4}$	$3.2808 \times 10^{-5}$	$1.1102 \times 10^{-16}$	$8.8817 \times 10^{-16}$	$2.8421 \times 10^{-14}$	$2.9 \times 10^4$
$h = 0.005$	$1.8150 \times 10^{-3}$	$3.7283 \times 10^{-4}$	$1.1102 \times 10^{-16}$	$8.8817 \times 10^{-16}$	$2.8421 \times 10^{-14}$	$1.2 \times 10^4$
$h = 0.01$	$7.4496 \times 10^{-3}$	$1.3995 \times 10^{-3}$	$1.1102 \times 10^{-16}$	$8.8817 \times 10^{-16}$	$2.8421 \times 10^{-14}$	$8.8 \times 10^3$

从表1可以看出,系统运动过程中精确保持位移约束、速度级约束和加速度级约束,系统总能量

最大相对误差较小。随着时间步长减小,系统总能量最大相对误差和平均相对误差在减小,仿真结果

表2 相同时间步长时各方法结果比较(h=0.01, t=20s)

Table 2 Comparison of different methods with the same time step (h = 0.01, t=20s)

Step	$\varepsilon(H)$	MRE(H)	$\varepsilon(\Phi)$	$\varepsilon(\dot{\Phi})$	$\varepsilon(\ddot{\Phi})$	Runtime T/s
FA-DAE	$7.4496 \times 10^{-3}$	$1.3995 \times 10^{-3}$	$1.1102 \times 10^{-16}$	$8.8817 \times 10^{-16}$	$2.8421 \times 10^{-14}$	$8.8 \times 10^3$
RK4	$9.0827 \times 10^{-2}$	$2.8464 \times 10^{-2}$	$4.0164 \times 10^{-2}$	$4.2045 \times 10^{-3}$	$7.8160 \times 10^{-14}$	0.5167

也更加的准确.从表2可以看出,本文算法运行时间长,但在约束和能量方面保持较好.

#### 4 小结

本文运用萤火虫优化算法求解多体系统动力学微分-代数方程,并对平面双连杆系统进行仿真实验.实验结果表明,在满足指标1、指标2和指标3约束的情况下,系统总能量的误差较小.萤火虫算法的优化精度高、算法设计简单且不需要目标函数的导数信息,对于求解多体系统微分-代数方程取得了较好效果,说明智能优化算法应用到多体动力学仿真中的可行性.然而,该方法存在计算量大和算法运行时间长的缺点.今后在有效地降低运行时间和提高算法精度方面是一个主要研究方向.

#### 参 考 文 献

- Fon-Llagunes J M. Multibody dynamics computational methods and applications. Switzerland:Springer, 2016
- Shabana A A, Hussein B A. A two-loop sparse matrix numerical integration procedure for the solution of differential/algebraic equations: Application to multibody systems. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 327(3-5): 557 ~ 563
- Bruls O, Cardona A, Arnold M. Lie group generalized-alpha time integration of constrained flexible multibody systems. *Mechanism & Machine Theory*, 2012, 48(1): 121 ~ 137
- Jay L. Symplectic partitioned Runge-Kutta methods for constrained Hamiltonian systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, 33(1):368 ~ 387
- Lens E, CardonaAlberto. An energy preserving/decaying scheme for nonlinearly constrained multibody systems. *Multibody System Dynamics*, 2007, 18(3):435 ~ 470
- Betsch P, Uhlar S. Energy-momentum conserving integration of multibody dynamics. *Multibody System Dynamics*, 2007, 17(4):243 ~ 289
- West J E, Marsden M. Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*. 2001, 10:357 ~ 514
- Iserles A, MuntheKaas H Z, Nørsett S P, et al. Lie-group methods. *Acta Numerica*. 2000, 9(2):215 ~ 365
- Fister I, Jr I F, Yang X S, et al. A comprehensive review of firefly algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2013, 13(1):34 ~ 46
- Coelho L D S, Mariani V C. Firefly algorithm approach based on chaotic Tinkerbell map applied to multivariable PID controller tuning. *Computers & Mathematics with Applications*. 2012, 64(8):2371 ~ 2382
- 冯艳红, 刘建芹, 贺毅朝. 基于混沌理论的动态种群萤火虫算法. 计算机应用, 2013, 33(3):796 ~ 799(Feng Y H, Liu J Q, He Y C. Algorithm of dynamic population firefly based on chaos theory. *Journal of Computer Application*, 2013, 33(3):796 ~ 799(in Chinese))
- Giannakouris G, Vassiliadis V, Dounias G. Experimental study on a hybrid nature-inspired algorithm for financial portfolio optimization. Verlag:Springer, 2010
- 田梦楚, 薄煜明, 陈志敏等. 萤火虫算法智能优化粒子滤波. 自动化学报, 2016, 42(1):91 ~ 99(Tian M C, Bo Y M, Chen Z M, et al. Intelligent optimization of particle filter based on firefly algorithm. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(1):91 ~ 99(in Chinese))
- 张军丽, 周永权. 人工萤火虫与差分进化混合优化算法. 信息与控制, 2011, 40(5):608 ~ 613(Zhang J L, Zhou Y Q. Hybrid optimization algorithm of artificial firefly and differential evolution. *Information and Control*, 2011, 40(5):608 ~ 613 (in Chinese))
- Osaba E, Carballedo R, Yang X S, et al. An evolutionary discrete firefly algorithm with novel operators for solving the vehicle routing problem with time windows. *Nature-Inspired Computation in Engineering*, Switzerland: Springer International Publishing, 2016
- Vasant P, Ganesan T, Elamvazuthi I. An improved PSO approach for solving non-convex optimization problems. Ninth International Conference on Ict & Knowledge Engineering. IEEE, 2012
- 毕晓君, 胡崧益. 基于混合引导策略的高精度萤火虫优化粒子滤波算法. 上海交通大学学报, 2019, 53(2):110 ~ 116(Bi X J, Hu S Y. High precision particle filter algorithm for firefly optimization based on hybrid guidance strategy. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2019, 53(2):110 ~ 116 (in Chinese))

# FIREFLY ALGORITHM FOR MULTI-BODY SYSTEM DYNAMICS DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS \*

Zhang Xiaoxiao<sup>1</sup> Ding Jieyu<sup>1,2†</sup>

(1. School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

(2. Center for Computational Mechanics and Engineering Simulation, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract** To solve the differential algebraic equations of multibody system dynamics, a method based on firefly algorithm is studied. Firstly, the generalized coordinates and generalized velocities are interpolated by Lagrange interpolation algorithm, and the differential algebraic equations are then transformed into optimization problems by the Gauss numerical integration method. Then the firefly algorithm is employed to solve the problem. Finally, through simulating the plane double link manipulator, it is verified that the firefly algorithm not only keeps consistent with the constraints but also ensures the energy accuracy in solving the dynamic equation. The results show that the intelligent optimization algorithm has a good application prospect in solving multibody dynamics problems.

**Key words** multibody system dynamics, differential algebraic equations, firefly algorithm

---

Received 5 November 2019, revised 17 December 2019.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11772166,11472143)

† Corresponding author E-mail: djy@qdu.edu.cn