

不同作动器布局及时滞下柔性悬臂梁振动控制研究*

张博 胥奇† 李映辉

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 由于压电作动器自身性能的限制, 工程中可能需要使用多个压电作动器. 本文研究了双压电作动器下柔性悬臂梁的时滞振动控制. 研究发现, 控制回路没有时滞时, 双作动器在不同布局下都能对梁的振动实现等效控制, 此时两个作动器输入电压成线性关系, 该线性关系斜率与作动器分布位置相关. 进一步地, 针对有时滞情况, 当改变作动器的布局及时滞, 通过分段时滞状态反馈, 系统仍能达到相同的控制效果.

关键词 振动控制, 极点配置, 时滞, 状态转移矩阵

DOI: 10.6052/1672-6553-2021-019

引言

工程中有大量的柔性悬臂结构, 如空间机械臂、太阳能帆板等^[1]. 该类结构容易产生振动问题, 影响其工作效率甚至使用寿命^[2]. 利用压电材料控制柔性悬臂结构的振动是一种常见方法^[3-7], 研究中关注更多的是压电片作动器布局、数目以及尺寸优化等^[8-10]. 在控制中, 压电作动器承受的电压有限, 使用多个作动器同时作用能够获得更好的控制效果^[5, 10]. 另外控制中的信号传输、A/D 转换等环节, 不可避免会产生时滞^[11-13]. 即使很小的时滞, 也可能让控制律失效^[14]. 研究多个压电作动器控制柔

性结构振动, 并考虑时滞有一定的意义.

本文以悬臂梁为对象, 考虑时滞效应, 利用双压电作动器对其低频模态的振动进行状态反馈控制, 研究不同布局及时滞的双作动器系统实现相同控制效果的等价关系.

1 系统建模

由图 1 所示, 两个长为 l_p 的压电片左端分别位于梁的上表面 x_{11} 和 x_{21} 处, 在输入电压的作用下, 压电片产生力矩可以表示为^[8]

$$M(x, t) = \sum_{j=1}^2 K_a U_j (h(x - x_{j1}) - h(x - x_{j2})) \quad (1)$$

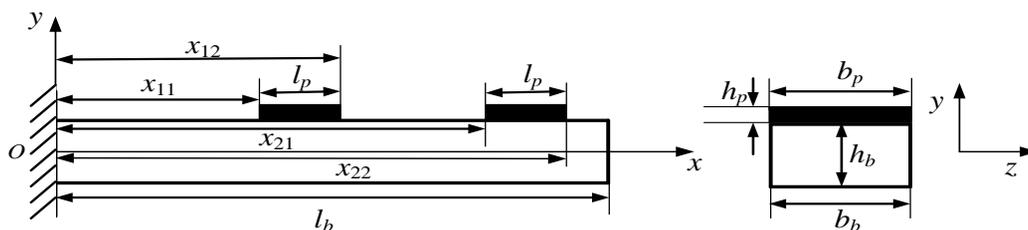


图 1 双作动器悬臂梁模型

Fig.1 A cantilever beam model with double actuators

其中, $h(\cdot)$ 为 Heaviside 函数, U_j 为第 j 个压电作动器输入电压, 系数 K_a 满足

$$K_a = \frac{1}{2} b_p d_{31} E_p (h_b + h_p) \quad (2)$$

式中, d_{31} 和 E_p 分别是压电片压电常数和弹性模量.

忽略压电片质量和刚度对系统的影响, 梁受压

电片作用的振动方程为

$$E_b I_b \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

其中, E_b 、 ρ 、 I_b 、 S 、 $y(x, t)$ 分别为梁的弹性模量、密度、截面惯性矩、截面面积、横向位移. 梁横向位移可进一步表示为

2020-12-12 收到第 1 稿, 2021-01-28 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目 (12072292, 11702227, 11872319)

† 通讯作者 E-mail: xuqi@swjtu.edu.cn

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (4)$$

其中, $\phi_i(x)$ 和 $q_i(t)$ 为其第 i 阶正则模态和广义坐标. 利用模态正交性, 第 i 阶广义坐标满足

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \int_0^{l_b} \phi_i(x) \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} dx \quad (5)$$

其中, ω_i 是梁的第 i 阶固有频率. 由式(1)和式(5)得

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \sum_{j=1}^2 B_{ji} U_j \quad (6)$$

式中 $B_{ji} = K_a [\phi_i'(x_{j2}) - \phi_i'(x_{j1})]$.

2 悬臂梁的振动控制

2.1 系统状态方程

考虑梁的振动以低阶模态为主, 因此对其第一阶模态, 以双压电作动器对其进行控制. 由式(6)得其状态方程为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (7)$$

式中, $X(t) = [q_1(t) \quad \dot{q}_1(t)]^T$, $A = [0 \quad 1; -\omega_1^2 \quad 0]$, $B = [0 \quad 0; B_{11} \quad B_{21}]$, $U(t) = [U_1 \quad U_2]^T$. 若使用无时滞状态反馈, 输入电压 $U(t)$ 表示为

$$U(t) = -KX(t) \quad (8)$$

其中 K 为反馈增益. 由式(7)和式(8)可知, 反馈状态 $X(t)$ 为一阶模态对应的广义坐标与广义速度, 在实际应用中, 该状态量不能直接获取, 而需要使用多个传感器测量悬臂梁不同位置的实际位移和速度来进行相对精确的预估, 具体方法可以参考文献[15]和文献[16]. 将式(8)代入式(7)可得悬臂梁状态反馈控制方程为

$$\dot{X}(t) = (A - BK)X(t) \quad (9)$$

2.2 无时滞系统振动控制

接下来采用极点配置法, 给定系统(9)的极点为 c 和 f , 且反馈增益 K 满足以下关系

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -cf & c + f \end{bmatrix} \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)可知, 此时不论作动器位置怎样变化(即 x_{11} 和 x_{21} 发生改变), 响应都将只与初始条件和极点值相关. 在该配置方法下, 若以 K 的第

一行元素 K_{11} 和 K_{12} 为参数, 可求出 K 的表达式为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ aK_{11} + b & aK_{12} + d \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中, $a = -(B_{11}/B_{21})$, b 和 d 由作动器布局即矩阵 B 和极点 c, f 确定. 将式(11)代入式(8)得压电片输入电压的关系

$$U_2 = aU_1 + bq_1(t) + d\dot{q}_1(t) \quad (12)$$

由式(12)可知当时间 t 确定的时候, 两作动器输入电压成线性关系. 下面用表1参数对系统进行仿真. 图2给出了两组不同作动器布局下的悬臂梁一阶模态的响应曲线, 可见布局改变, 系统响应仍能保持一致. 图3给出了压电片输入电压关系曲线, 相同压电片布局下, 不同时刻, 曲线斜率保持不变, 与式(12)吻合. 图4给出了不同作动器布局下的压电片输入电压在同一时刻的关系曲线, 可见布局改变, 曲线斜率随之改变.

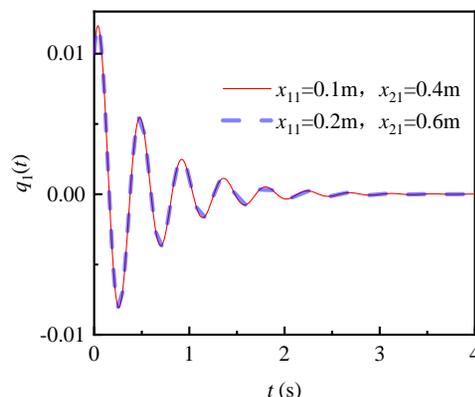


图2 不同压电作动器布局下的响应曲线

Fig.2 Response curves for different actuator layouts

2.3 时滞系统振动控制

当系统有时滞时, 此时的控制方程为

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - \tau) \quad (13)$$

式中 τ 是系统时滞, $U(t - \tau)$ 是时滞输入电压. 考虑到作动器的时滞效应, 式(13)可进一步表示为无控和受控两部分:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) & 0 \leq t < \tau \end{cases} \quad (14.1)$$

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) - BK_d X(t - \tau) & t \geq \tau \end{cases} \quad (14.2)$$

表1 悬臂梁和压电片的基本参数

Table1 Basic parameters of cantilever beam and piezoelectric patch

Cantilever beam		Piezoelectric patch	
Length, l_b (m)	1	Length, l_p (m)	0.1
Width, b_b (m)	0.02	Width, b_p (m)	0.02
Thickness, h_b (m)	0.004	Thickness, h_p (m)	0.0005
Modulus of elasticity, E_b (GPa)	200	Modulus of elasticity, E_p (GPa)	63
Density, ρ (kg/m ³)	7800	Electromechanical coupling coefficient, d_{31} (m/V)	1.2×10^{-10}

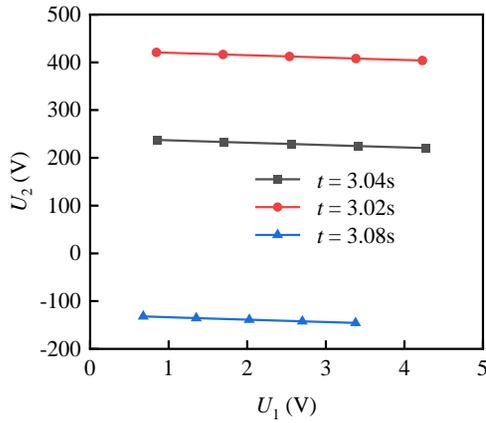


图3 不同时刻下双作动器输入电压的关系

Fig.3 Relationship between input voltages of two actuators in different time

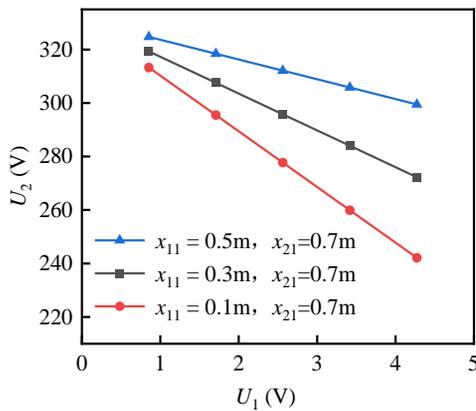


图4 不同布局下双作动器输入电压的关系

Fig.4 Relationship between input voltages of two actuators in different layouts

式中, K_d 是时滞系统反馈增益, 系统(13)中由于时滞存在, 已无法直接利用2.2节的极点配置法. 此时, 我们将时滞系统受控部分(14.2)用状态变量 $x(t)$ 的无时滞系统进行等效, 即

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), u(t) = -kx(t) \quad (15)$$

式中 k 是无时滞系统反馈增益, 当 $u(t) = U(t-\tau)$ 且式(15)与式(14.2)的初始条件相同时, 两者完全等价, 此时两者的反馈增益有如下关系^[14]

$$K_d = \begin{cases} k\phi(t, \tau)e^{A(2\tau-t)} & \tau \leq t < 2\tau \\ k\phi(t, t-\tau) & 2\tau \leq t \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\phi(t, \tau)$ 与 $\phi(t, t-\tau)$ 为状态转移矩阵, 分别为 $e^{(A-Bk)(t-\tau)}$, $e^{(A-Bk)\tau}$. 此时时滞系统反馈增益为分段函数, 在第一段较短时间内增益随时间变化, 之后增益便一直保持为常数. 其推导如下:

当 $\tau \leq t < 2\tau$ 时, 有如下两个等式

$$K_d X(t-\tau) = K_d e^{A(t-\tau)} X_0, kx(t) = k\phi(t, \tau)e^{A\tau} X_0,$$

式中 X_0 是时滞系统零时刻初始值. 利用 $K_d X(t-\tau) = kx(t)$, 得 $K_d e^{A(t-\tau)} = k\phi(t, \tau)e^{A\tau}$, 由矩阵指数函数的性

质可知矩阵 $e^{A(t-\tau)}$ 可逆, 其逆为 $e^{A(\tau-t)}$, 所以有 $K_d = k\phi(t, \tau)e^{A(2\tau-t)}$.

当 $t \geq 2\tau$ 时, 同理易证 $K_d = k\phi(t, t-\tau)$.

图5给出了某布局下时滞系统和等效的无时滞系统的时间历程图, 可见前者受控部分与后者响应完全重合.

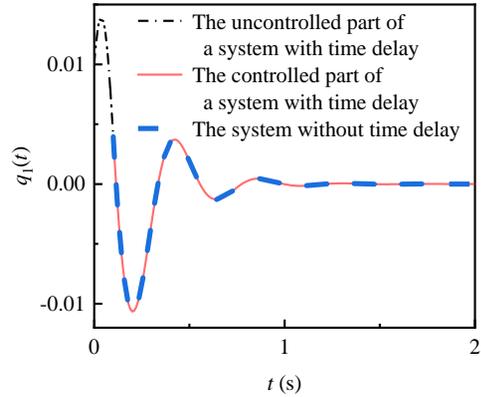


图5 时滞系统与无时滞系统响应曲线

Fig.5 Response curves of systems with and without time delay

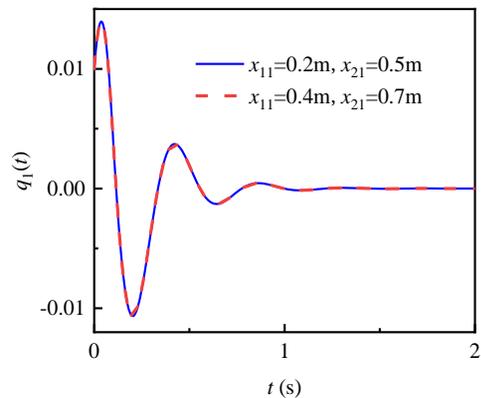


图6 不同作动器布局下时滞系统响应曲线

Fig.6 Response curves of time-delayed systems with different actuator layouts

进一步分析两组时滞双作动器悬臂梁控制系统. 此时两组系统的控制方程以及与其受控部分等效的无时滞控制方程可以写成如下形式

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B_i U(t-\tau_i), U(t-\tau_i) = -K_{di} X(t-\tau_i) \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + B_i u(t), u(t) = -k_i x(t) \end{cases}$$

式中, B_i 为第 i 组时滞系统与无时滞系统的控制矩阵, 跟压电作动器布局相关, τ_i 和 K_{di} 是第 i 组时滞系统的时滞和时滞反馈增益, k_i 是第 i 组无时滞系统反馈增益. 若让两组时滞不同的系统有相同的控制效果, 可以让第一组系统受控部分从 τ_2 时刻开始 (假定 $\tau_1 < \tau_2$). 由式(16)可得时滞反馈增益与各自等效无时滞系统的反馈增益关系如下

$$K_{d1} = \begin{cases} 0 & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ k_1 e^{(A-B_1 k_1)(t-\tau_2)} e^{A(\tau_1+\tau_2-t)} & \tau_2 \leq t < \tau_1 + \tau_2 \\ k_1 e^{(A-B_1 k_1)\tau_1} & \tau_1 + \tau_2 \leq t \end{cases} \quad (17)$$

$$K_{d2} = \begin{cases} k_2 e^{(A-B_2 k_2)(t-\tau_2)} e^{A(2\tau_2-t)} & \tau_2 \leq t < 2\tau_2 \\ k_2 e^{(A-B_2 k_2)\tau_2} & 2\tau_2 \leq t \end{cases} \quad (18)$$

引入与各自时滞系统受控部分完全等效的无时滞系统,再通过2.2节的极点配置令等效的无时滞系统有相同的控制效果,从而可以让与之对应的时滞系统控制效果相同.图6给出了某相同时滞不同作动器布局下的系统响应曲线,可见作动器布局改变,系统响应曲线仍能重合.当两组时滞系统时滞不同时,利用式(17)和式(18)得到对应时滞系统分段的反馈增益,能够让两组不同时滞的系统具有相同的控制效果.图7给出了作动器布局相同时滞不同下的系统响应曲线,可见两条曲线完全重合.图8给出了作动器布局与时滞均不相同的系统响应曲线,此时两组曲线完全重合,其控制效果完全一样.

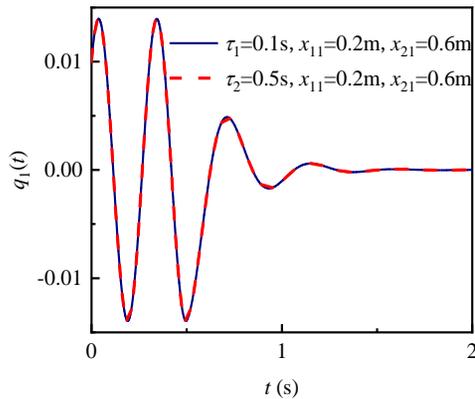


图7 相同作动器布局不同时滞下系统响应曲线

Fig.7 System response curves with same actuator layouts and different time delays

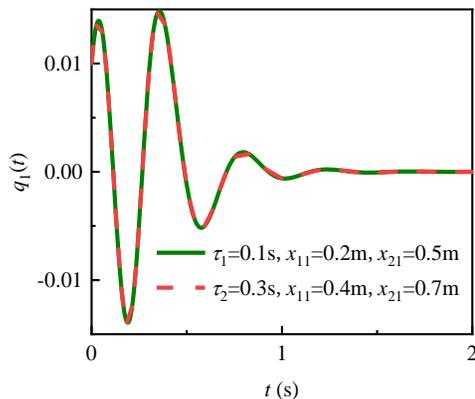


图8 不同作动器布局不同时滞下系统响应曲线

Fig.8 System response curves with different actuator layouts and different time delays

3 结论

本文使用双压电作动器对柔性悬臂梁的振动进行控制,并研究了作动器位置、控制回路时滞等对控制效果的影响.研究表明,双作动器在不同位置和时滞的情况下,都可以达到同样的控制效果.文中给出了无时滞时作动器增益和电压等应满足的线性关系式,以及存在时滞时分段反馈控制的增益公式.不同时滞下,分段反馈控制的增益在大部分时间内都是常数,这也有利于其控制律的实际应用.在单作动器的性能受限时,可采用本文的多作动器控制律对振动系统进行等效控制.此外,本文建模尚未考虑压电作动器质量和刚度的影响,以及传感器的选择、布局等的影响,对此作者将继续展开相应研究.

参 考 文 献

- 康建云,毕果. 压电柔性臂的传感器/致动器优化配置与振动主动控制. 厦门大学学报(自然科学版), 2019, 58(3): 415~421 (Kang J Y, Bi G. Optimal configuration of sensors/ actuators and active vibration control of a piezoelectric flexible beam. *Journal of Xiamen University (Natural Science)*, 2019, 58(3): 415~421 (in Chinese))
- Dong P, Yang Z, Yue Z, et al. Dynamic modeling and analysis of space manipulator considering the flexible of joint and link. *Advanced Materials Research*, 2013, 823: 270~275
- 刘泽锋. 柔性智能空间机械臂振动主动控制机制研究 [硕士学位论文]. 南京:南京航空航天大学, 2016 (Liu Z F. Research on mechanism of active vibration suppression for a smart flexible-joint-and-link space manipulator [Master Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016 (in Chinese))
- Sabatini M, Gasbarri P, Monti R, et al. Vibration control of a flexible space manipulator during on orbit operations. *Acta Astronautica*, 2012, 73: 109~121
- Chen L X, Cai G P. Optimal control of a flexible beam with multiple time delays. *Journal of Vibration and Control*, 2009, 15(10): 1493~1512
- Chen L X, Cai G P, Pan J. Experimental study of delayed feedback control for a flexible plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 322(4-5): 629~651
- An F, Chen W D, Shao M Q. Dynamic behavior of time-delayed acceleration feedback controller for active vibration control of flexible structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(20): 4789~4809
- 俞洁. 智能悬臂梁压电片布置与振动主动控制技术的

- 研究[硕士学位论文]. 南京:河海大学, 2006(Yu J. The research of pzt's placement and the active vibration of smart cantilever beam [Master Thesis]. *Nanjing: Hohai University*, 2006 (in Chinese))
- 9 田海民. 智能悬臂梁的振动控制及其优化配置[硕士论文]. 兰州:兰州理工大学, 2008(Tian H M. Optimal placement and vibration control of intelligent cantilever beam [Master Thesis]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2008 (in Chinese))
 - 10 陶鸿飞, 崔升. 压电智能结构的主动控制及压电执行器布局优化. *动力学与控制学报*, 2019, 17(3): 234~243 (Tao H F, Cui S. Active control of piezoelectric structures and optimal placement of piezoelectric actuators. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(3): 234~243 (in Chinese))
 - 11 安方, 陈卫东, 邵敏强. 基于速度-加速度时滞反馈的振动主动控制. *振动、测试与诊断*, 2012, 32(3): 364~370 (An F, Chen W D, Shao M Q. Time-delayed velocity-acceleration feedback for active vibration control of cantilever beam. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2012, 32(3): 364~370 (in Chinese))
 - 12 Zhou Y S, Wang Z H. Robust motion control of a two-wheeled inverted pendulum with an input delay based on optimal integral sliding mode manifold. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(3): 2065~2074
 - 13 施添添, 茅晓晨. 时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子环的动力学分析. *动力学与控制学报*, 2019, 17(3): 264~269 (Shi T T, Mao X C. Dynamics of a ring of coupled van der Pol-Duffing oscillators with time delays. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(3): 264~269 (in Chinese))
 - 14 周宇生. 时滞最优控制及其在轮式倒立摆中的应用[博士论文]. 南京:南京航空航天大学, 2016 (Zhou Y S. Optimal control of delayed systems and its applications to wheeled inverted pendulum [Ph.D Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2016 (in Chinese))
 - 15 滕悠优, 蔡国平. 柔性机械臂的时滞最优跟踪控制. *应用力学学报*, 2007, 24(3): 399~403 (Teng Y Y, Cai G P. Active control for flexible manipulator with time delay. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2007, 24(3): 399~403 (in Chinese))
 - 16 Wang D A, Huang Y M. Application of discrete time variable structure control in the vibration reduction of a flexible structure. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 261(3): 483~501

STUDY ON VIBRATION CONTROL OF A FLEXIBLE CANTILEVER BEAM WITH DIFFERENT ACTUATOR LAYOUTS AND TIME DELAYS *

Zhang Bo Xu Qi[†] Li Yinghui

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Multiple piezoelectric actuators may be used due to the fact that performance of a single piezoelectric actuator sometimes has limitations. This paper studies the delayed vibration control of a flexible cantilever beam with double piezoelectric actuators. First, without considering the time delay in the control loop, it is observed that double actuators can achieve the same vibration control effect even though the actuator distribution is different. In this case, the input voltages of the two actuators are linearly related, and the slope of the linear relation is determined by the actuator distribution. Then, in the presence of time delay, we prove that by using a piecewise delayed state feedback, the same control performance can still be achieved when the actuator distribution as well as the time delay of the control loop is different.

Key words vibration control, pole assignment, state transition matrix, time delay

Received 12 December 2020, revised 28 January 2021.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (12072292, 11702227, 11872319)

[†] Corresponding author E-mail: xuqi@swjtu.edu.cn