

X 型准零刚度隔振器动力学设计及分析*

尹蒙蒙 丁虎[†] 陈立群

(上海大学 力学与工程科学学院, 上海 200444)

摘要 结合准零刚度(quasi-zero stiffness, QZS)结构和 X 型结构,设计了一种新型 X 型准零刚度隔振器(X-QZS).通过准零刚度弹簧组替换 X 型结构中的线性弹簧,达到超低频隔振的效果.利用拉格朗日方程建立了动力学方程,通过谐波平衡法和弧长法得到了系统响应的近似解析解并通过数值法验证了解析解的正确性.研究了系统的动力学响应和隔振性能.分析结果表明 X-QZS 结构在超低频范围的隔振效果能够比 QZS 更好,共振频率更低,隔振频带更宽.

关键词 被动隔振, 超低频, 准零刚度, X 型结构, 谐波平衡法

DOI: 10.6052/1672-6553-2021-001

引言

传统隔振器具有成本低、结构简单等优势^[1],在很多情况下是比主动隔振器更为优先的选择.但是在低频隔振和宽隔振频带性能优化上有一定的局限性,如对于线性被动隔振器来说,可以通过减小弹簧刚度来降低其共振频率,但结构的负载能力也会随之降低;若提高阻尼降低共振区域的传递率,又会影响极低频率和高频率处的性能.对于航天器即使是低频、微幅振动的影响也不能忽略^[2],比如说卫星振幅就是光谱成像质量退化的重要因素^[3].航天领域振动控制的频率范围需要低至 0.2Hz,振幅小至微米级,且随着航天器对隔振的要求越来越高^[4],对隔振器的性能要求也越来越高.

通过将结构刚度设计为非线性可以解决这一矛盾^[5].研究发现,非线性刚度特性对于静态的隔振装置来说,能够有效地提高其稳定性以及静态承载能力,而非线性阻尼特性能够帮助隔振结构在高频范围内振动隔离效果的改进^[6].非线性刚度元件有很多实现形式,如通过排布磁铁产生负刚度^[7],对称安装的片弹簧^[8],两端固支屈曲梁准零刚度隔振器^[9],利用平行四边形不稳定性产生的负刚度并入正刚度^[10],含凸轮-滚轮机构的准零刚度隔振器^[11],滚球型准零刚度隔振器^[12],通过排布可调气动弹簧形成准零刚度^[13]等.还有一种获得高静-低

动特性的非线性刚度的常见方法是将弹簧进行几何排布,如 Carrella^[14]提出的准零刚度结构,它由一个垂直弹簧和两个斜置弹簧组成,系统的力位移特性可以用一个三次方程来近似.剪型结构(X 型结构)是近几年出现的一种实现方式^[15].

基于 X 型结构的隔振器已有大量的研究,这是一种新颖、理想、无源的非线性刚度、阻尼的实现方式.由于具有十分有益的非线性刚度和非线性阻尼,可调参数众多,开始受到关注.已有研究对常规的 X 型结构的系统参数做了全面的分析,如杆长比例、层数和装配角度等影响因素^[16].还有结构参数对非线性阻尼、刚度产生影响的研究^[17],结果发现转动阻尼也起到和线性阻尼同样重要的作用.一些研究关注耦合非线性惯性后结构响应的优化,如一项研究为模仿人体行走时摆动手臂,在 X 型结构上增加了一组质量旋转单元,结果显示非线性惯性可以产生优越的反共振特性^[18].另有研究着眼于非线性刚度的进一步设计,如设计非标准形态的 X 型支架来制造更为有益的非线性刚度^[19].但是以上研究中 X 型结构使用的都是线性弹簧.

受到线性刚度经过 X 型结构优化为非线性刚度启发,将已有的准零刚度与 X 型结构结合,得到的系统理论上可能会具有更好的隔振性能.

本文将系统地研究 X 型准零刚度隔振器的非线性特性.通过建立数学模型,通过拉格朗日方程

2020-10-12 收到第 1 稿,2020-12-27 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11772181)

[†] 通讯作者 E-mail: dinghu3@shu.edu.cn

建立动力学方程,并使用谐波平衡法获得系统的近似稳态响应的解析解,并通过与数值解的对比,实现近似解析解与数值解的相互验证.研究不同参数系统受到基底位移激励下系统的稳态响应,并与QZS系统进行对比,获得X-QZS系统性能优于QZS系统性能时的参数条件.

1 力学模型

本节建立X型准零刚度(X-QZS)结构的力学模型,给出了结构的几何参数以及它们之间的几何关系,并进行了初步的力学分析.X-QZS结构的设计如图1所示,由X型结构和准零刚度弹簧组组成.

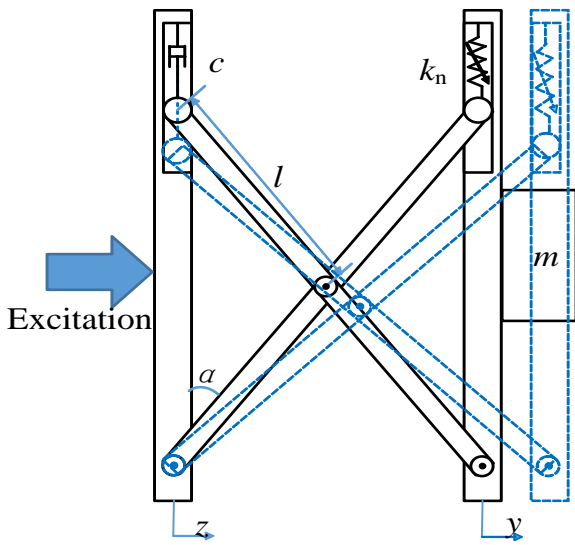


图1 X型准零刚度隔振器的力学模型

Fig.1 Schematic diagram of X-QZS

准零刚度弹簧组由非线性弹簧 k_n 表示.X型结构由两根长为 $2l$ 的杆铰结而成,装载时与底座成夹角 α .一个非线性刚度为 k_n 的弹簧组被装在杆的一端,与之并联的是阻尼系数为 c 的阻尼器.准零刚度弹簧组如图2所示,由一个线性弹簧 k_1 和两个与其垂直的预压缩线性弹簧 k_2 构成,预压缩弹簧原长 s 压缩后长度为 s' .如图3所示,X型准零刚度可能被用于在轨卫星捕捉目标时为防止卫星偏移、翻滚而隔离受到的冲击或者周期性激励.

2 动力学方程

2.1 几何关系

设隔振器上的主质量为 m ,其绝对位移为 y .基底的绝对位移为 z ,主质量与基底之间的相对位移 $u=y-z$,杆的角位移为 θ .从图1可以得到几个位移变量之间的几何关系为

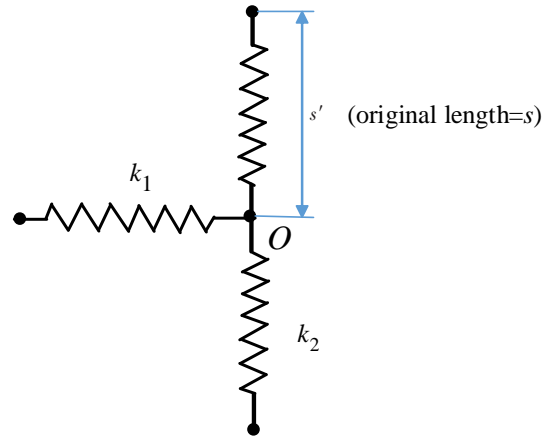


图2 准零刚度弹簧组示意图

Fig.2 Schematic diagram of QZS

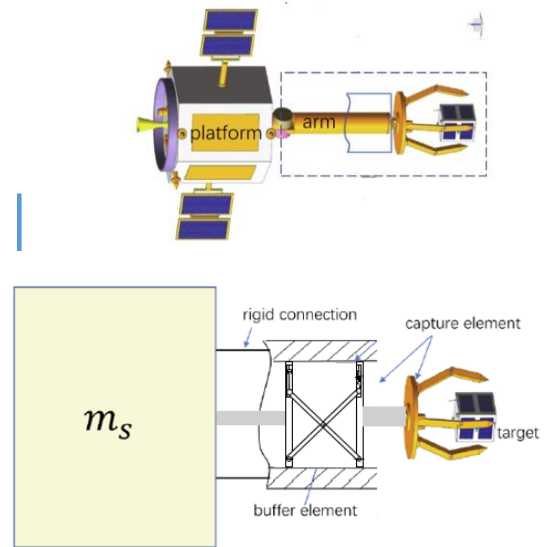


图3 在轨卫星防冲击捕捉系统图示^[20]

Fig.3 Schematic diagram of anti-impact satellite manipulator^[20]

$$x = 2l(\cos\alpha - \cos(\alpha + \theta)) \tag{1}$$

$$u = 2l(\sin(\alpha + \theta) - \sin\alpha) \tag{2}$$

将以上二式相结合,可以得到位移 x 、 θ 与 u 之间的关系

$$x = 2l \cos\alpha - \sqrt{4l^2 - (2l \sin\alpha + u)^2} \tag{3}$$

$$\tan(\alpha + \theta) = \frac{2l \sin\alpha + u}{\sqrt{4l^2 - (2l \sin\alpha + u)^2}} \tag{4}$$

2.2 拉格朗日方程

该结构的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \tag{5}$$

该结构的势能可以写为

$$V = k_1 x^2 + 2k_2 (\sqrt{x^2 + s'^2} - s)^2 \tag{6}$$

由拉格朗日方程

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = -D \quad (7)$$

其中耗散能 D 可以表示为

$$D = c\dot{x} \quad (8)$$

拉格朗日函数为

$$L = T - V \quad (9)$$

将上式带入计算得到系统的运动方程为

$$m\ddot{u} + k_1 x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + 2k_2 \frac{x(\sqrt{x^2 + s'^2} - s)}{\sqrt{x^2 + s'^2}} \quad (10)$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \dot{u} = -m\ddot{z}$$

为了计算简便,定义以下几个非线性方程

$$f_1(u) = x \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (11)$$

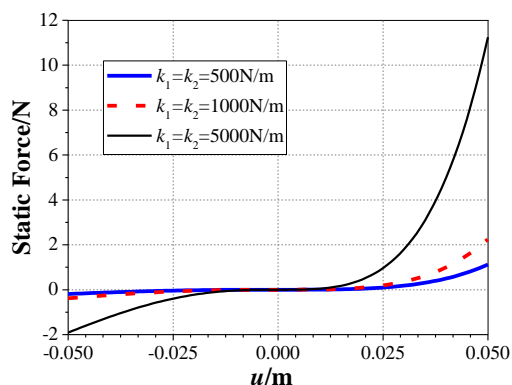
$$f_2(u) = \frac{2x(\sqrt{x^2 + s'^2} - s)}{\sqrt{x^2 + s'^2}} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (12)$$

$$f_3(u) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (13)$$

将上述非线性方程带入运动方程得到

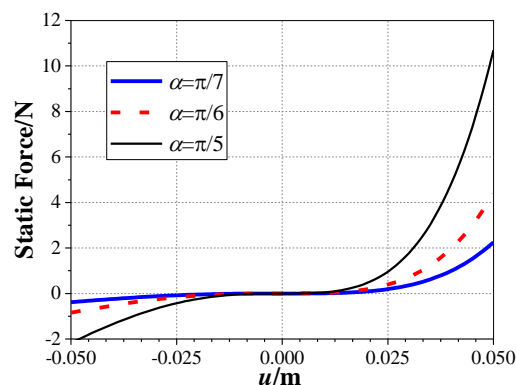
$$m\ddot{u} + f_1(u)k_1 + f_2(u)k_2 + cf_3(u)\dot{u} = -m\ddot{z} \quad (14)$$

根据非线性方程可以得到图4所示不同弹簧刚度和装载角下平衡状态时位移和静力之间的关系图.



(a)不同刚度对比

(a) With different k_1 and k_2



(b)不同装载角对比

(b) With different α

图4 X-QZS的回复力曲线

Fig.4 Static force-displacement curve of X-QZS

3 动力学分析

3.1 谐波分析

将非线性方程在零点进行五阶泰勒展开为

$$F_1(u) = \gamma_0 + \gamma_1 u + \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3 + \gamma_4 u^4 + \gamma_5 u^5 \quad (15)$$

$$F_2(u) = \sigma_0 + \sigma_1 u + \sigma_2 u^2 + \sigma_3 u^3 + \sigma_4 u^4 + \sigma_5 u^5 \quad (16)$$

$$F_3(u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u^3 + \lambda_4 u^4 + \lambda_5 u^5 \quad (17)$$

将泰勒展开形式的非线性方程替换原方程得到

$$m\ddot{u} + F_1(u)k_1 + F_2(u)k_2 + cF_3(u)\dot{u} = -m\ddot{z} \quad (18)$$

位移激励 z 的形式为

$$z = z_0 \sin(\omega t) \quad (19)$$

上式可以变形为

$$\ddot{u} = -\omega_0^2 F_1(u) - \omega_0^2 \kappa F_2(u) - 2\omega_0 \zeta F_3(u)\dot{u} + z_0 \omega^2 \sin(\omega t) \quad (20)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}, \zeta = \frac{c}{2m\omega_0}, \kappa = \frac{k_2}{k_1} \quad (21)$$

使用谐波平衡法对方程进行求解,假设位移 u 的解析形式为

$$u(t) = a_0(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^n b_i(t) \cos(i\omega t) \quad (22)$$

其中 i 是谐波次数, $i=0, 1, 2, \dots, n$. 基于上式,速度响应和加速度响应分别为

$$\dot{u}(t) = \dot{a}_0 + \sum_{i=1}^n (\dot{a}_i - i\omega b_i) \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^n (\dot{b}_i + i\omega a_i) \cos(i\omega t) \quad (23)$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{a}_0 + \sum_{i=1}^n (\ddot{a}_i - 2i\omega \dot{b}_i - (i\omega)^2 a_i) \sin(i\omega t) + \sum_{i=1}^n (\ddot{b}_i + 2i\omega \dot{a}_i - (i\omega)^2 b_i) \cos(i\omega t) \quad (24)$$

将以上三式带入动力学方程平衡谐波后得到

$$\ddot{a}_0 = H_0(V)$$

$$\ddot{a}_i - 2i\omega\dot{b}_i - (i\omega)^2 a_i = H_{s,i}(V) \quad (25)$$

$$\ddot{b}_i + 2i\omega\dot{a}_i - (i\omega)^2 b_i = H_{c,i}(V)$$

$$V = a_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dot{a}_0, \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \dot{\mathbf{a}} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dots, \dot{a}_n)^T \quad (26)$$

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T, \dot{\mathbf{b}} = (\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dots, \dot{b}_n)^T$$

可以求得质量块 m 的绝对位移 y 的幅值 y_0 为

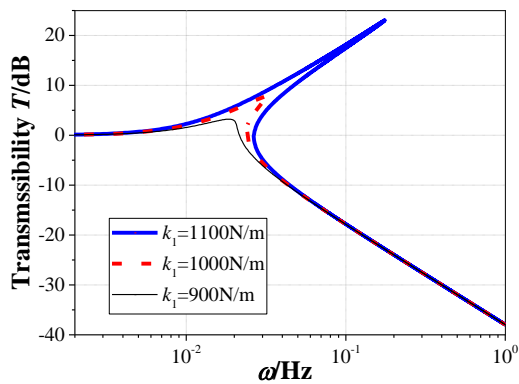
$$y_0 = \sqrt{(z_0 + a_1)^2 + b_1^2} \quad (27)$$

定义传递率

$$T = 20 \lg \left| \frac{y_0}{z_0} \right| \quad (28)$$

本文没有特殊说明时的参数值参照表 1. 为验证假设解得到结果的正确性, 用龙格-库塔法对方程进行求解, 并对解析解进行稳定性分析. 使用龙格-库塔法在每个频率下计算 2×10^3 s, 取最后 10 s 计算位移传递率. 正向扫频的初始频率设为 9.97×10^{-4} Hz, 初始位移 -1.58×10^{-4} m, 初始速度 -3.23×10^{-9} m/s, 在图中由 x 形表示; 反向扫频的初始值分别设为 1 Hz, -3.93×10^{-5} m, -1.26×10^{-2} m/s, 在图中用正方形表示. 解析解的稳定部分由实线表示, 不稳定部分由虚线表示.

图 5 为系统的位移传递特性, 由图 5 可以看出, 龙格-库塔法的正向扫频和反向扫频结果均符合近似解析解的稳定部分, 在不稳定区域存在跳跃现象. 该图显示解析解和数值解的误差较小, 一致性较好, 所以在计算解析解时所做的假定可以满足计算的精确性, 解析结果是可靠的, 可以使用该方法计算系统的响应.



(a) 不同刚度对比
(a) With different k_1

表 1 参数
Table 1 The parameters

Name	Notation	Value	Unit
Mass	m	2	kg
Damping	c	0.66	N·s/m
Stiffness of the linear spring	k_1	1000	N/m
Stiffness of the pre-stressed spring	k_2	1000	N/m
Initial length of the pre-stressed spring	s	0.15	m
Length of the pre-stressed spring	s'	0.10	m
Half the length of the rod	l	0.2	m
Angle	α	$\pi/7$	rad
Displacement excitation amplitude	z_0	0.002	m

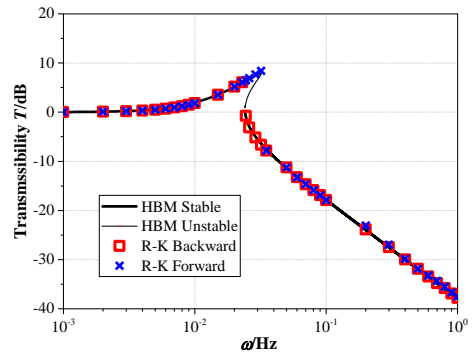
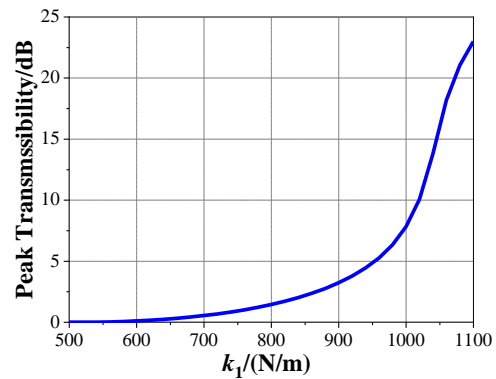


图 5 X-QZS 的位移传递特性
Fig.5 Displacement transmissibility of X-QZS

3.2 参数分析

图 6(a) 比较了不同弹簧刚度的结构传递率, 从图中可以看出降低弹簧刚度可以减小共振峰值, 扩大有效隔振频率的范围. 图 6(b) 展示了弹簧刚度与传递率峰值的关系, 当弹簧刚度降至 500 N/m 时传递率峰值降至 0, 实现了全频带的隔振. 但是弹簧刚度并不是越小越好, 当刚度从 1100 N/m 降低至 900 N/m 传递率峰值急速减小, 小于一定值后系



(b) 弹簧刚度与传递率峰值关系图
(b) k_1 -peak transmissibility curve

图 6 弹簧刚度的影响

Fig.6 Influence of stiffness on transmissibility

统的传递率峰值降为0,继续减小弹簧刚度对降低峰值没有明显效果.

图7(a)比较了不同弹簧原长的结构传递率.由图可以看出增加 s 可以使共振峰值减小,有效隔振范围扩大,但是和弹簧刚度对传递率的影响一样,超过一定范围后减小传递率的效果就不明显

了,且弹簧原长越长,压缩后越不稳定,这也是该值不宜无限制增加的原因.图7(b)对比了 $\alpha=\pi/7, \pi/7\pm\pi/180$ 三个角度的传递率.从图可以看出,装载角变小,传递率峰值降低,隔振频带变宽,高频的传递率也有所降低.总体来说小的装载角有利于本结构的隔振性能.

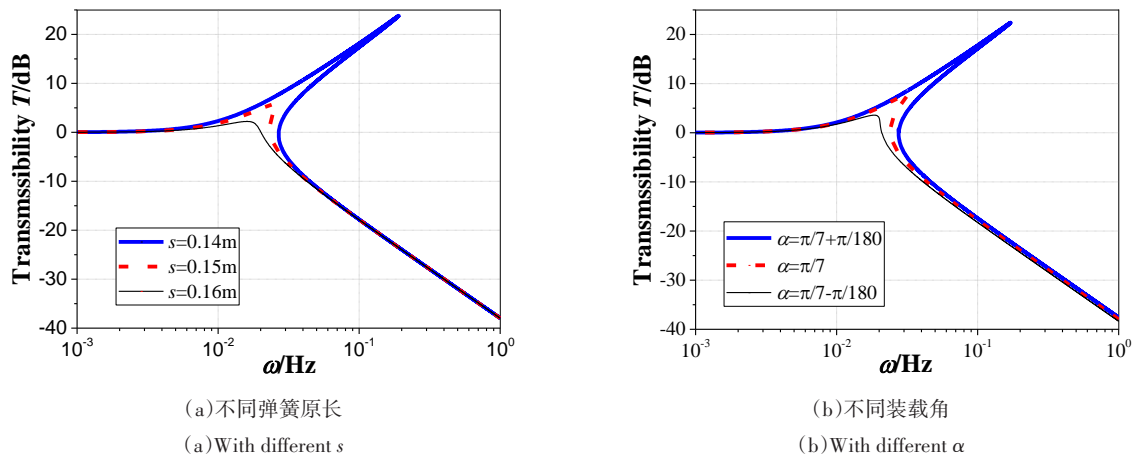


图7 系统参数对传递率的影响

Fig.7 Influence of parameters on transmissibility

3.3 与准零刚度对比

由于X-QZS相比QZS结构,额外可以调节的参数为 l 和 α ,由于 l 对结构性能的影响较小,所以以下对比主要调整 α .图8(a)对比了不同装载角的X-QZS结构与QZS结构的位移传递率,图线为在 $c=1\text{Ns/m}$,X-QZS装载角 α 分别为 $\pi/5, \pi/5+\pi/180$ 和 $\pi/5-\pi/180$ 下的稳态对比,当 $\alpha\leq\pi/5$ 时,该参数下的X-QZS结构隔振频带范围大于QZS结构,且在隔振

频带范围内传递率比QZS结构小,虽然小于共振峰频率处QZS的传递率更小; $\pi/5+\pi/180$ 时由于硬特性明显,X-QZS结构的隔振频带范围开始小于QZS结构,且传递率峰值大幅增加超过QZS结构.图8(b)是 $\alpha=\pi/5$,X-QZS阻尼系数 c 分别为2.800,1.000,1.1000和0.975下的稳态对比,X-QZS阻尼系数在 $0.975<c<2.800$ 的范围内隔振频带和低频传递率均低于QZS结构.

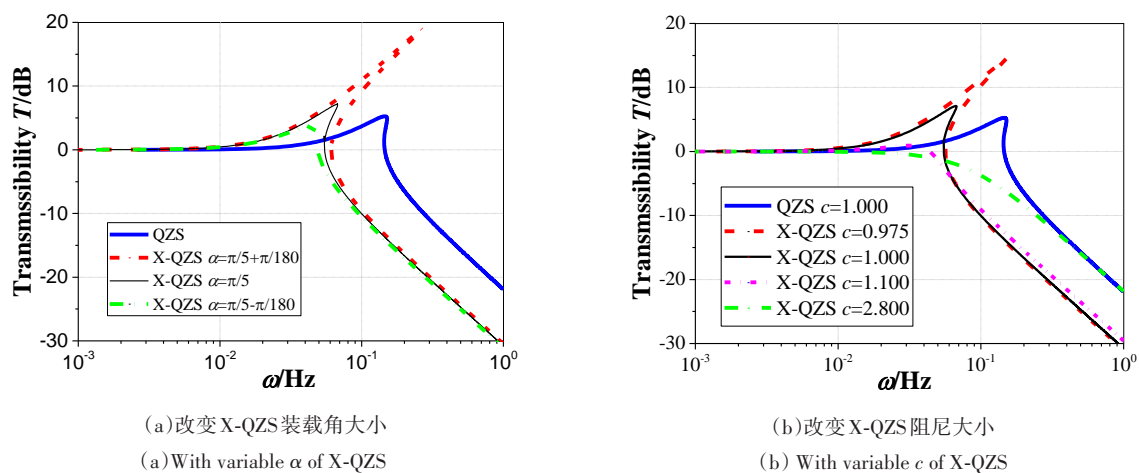


图8 QZS与X-QZS的对比

Fig.8 Comparison between X-QZS and QZS

通过对X-QZS和QZS结构的响应可以发现,对于不变的非线性弹簧组,装载角小于一定角

度时X-QZS的整体表现均优于QZS结构,但是在临界附近对于角度十分敏感,即使 1° 的增幅X-

QZS的硬特性也会十分明显,所以在允许的情况下尽量小的角度是更好的选择.而对于选定的装载角,降低阻尼可能使共振峰偏移超过QZS结构,增大阻尼可以有效抑制共振峰,且阻尼在较大的增长空间内都不会使高频传递率超过QZS结构,也就是说阻尼在一定的区间内X-QZS的表现优于QZS,将QZS结构置于X型结构中时可以适当调高阻尼.

4 结论

提出将准零刚度结构和X型结构结合形成的X型准零刚度隔振器,并以隔离无重力环境下太空中存在的超低频振动为例,展示该结构的高效隔振性能.使用谐波平衡法和龙格库塔法求解运动控制方程,数值结果和解析结果能够很好地吻合.然后,研究表明,刚度、装载角的增大以及弹簧原长、阻尼的减小会引起共振峰的急剧增加,所以设计时要留有冗余.较小的刚度、装配角和较大的阻尼、弹簧原长都降低了振动强度.因此,X-QZS系统有着出色的低频隔振性能,在一定条件下,优于QZS系统,共振频率极大地降低,使隔振频带得到进一步拓宽.

参 考 文 献

- Denys J. Passive vibration control. Wiley & Sons, 1999
- 董瑶海,周徐斌,申军烽,等. FY-4卫星微振动抑制技术研究. 上海航天, 2017, 34(4): 20~27(Dong Y H, Zhou X B, Shen J F, et al. Study on micro-vibration suppression technology of FY-4 satellite. *Aerospace Shanghai*, 2017, 34(4): 20~27(in Chinese))
- 南一冰,倪国强. 卫星振动频率和振幅对高光谱成像质量影响的仿真分析和实验研究. 光谱学与光谱分析, 2016, 36(10): 3226~3231(Nan Y B, Ni G Q. Simulation analysis & experimental study of the effects of satellite vibration frequency and amplitude on hyperspectral image. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2016, 36(10): 3226~3231(in Chinese))
- 胡晓滢,周春燕. 用于航天器微振动试验的高静刚度-低动刚度隔振器研究进展. 航天器环境工程, 2020, 37(4): 315~322(Hu X Y, Zhou C Y. Isolators with high static stiffness and low dynamic stiffness for spacecraft micro-vibration experiments. *Spacecraft Environment Engineering*, 2020, 37(4): 315~322(in Chinese))
- Ibrahim R A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314(3-5): 371~452
- 彭志科,郎自强,孟光,等. 一类非线性隔振器振动传递特性分析. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 314~320(Peng Z K, Lang Z Q, Meng G, et al. Analysis on transmissibility for a class of nonlinear vibration isolators. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 9(3): 314~320(in Chinese))
- Robertson W S, Kidner M R F, Cazzolato B S, et al. Theoretical design parameters for a quasi-zero stiffness magnetic spring for vibration isolation. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(1): 154
- 彭超,龚兴龙,宗路航,等. 新型非线性低频被动隔振系统设计及实验研究. 振动与冲击, 2013, 32(3): 6~11(Peng C, Gong X L, Zong L H, et al. Design and tests for a new type nonlinear low-frequency passive vibration isolation system. *Journal of Vibration and Shock*, 2013, 32(3): 6~11(in Chinese))
- 王云峰,李博,王利桐. 两端固支屈曲梁准零刚度隔振器的微振动隔振性能分析. 振动与冲击, 2018, 37(15): 124~129(Wang Y F, Li B, Wang L T. Micro-vibration isolation performance of a clamped-clamped buckled beam quasi-zero-stiffness isolator. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, 37(15): 124~129(in Chinese))
- 杜宁,胡明勇,毕勇,等. 一种车载设备的低频水平减振方法. 振动与冲击, 2017, 36(7): 184~190(Du N, Hu M Y, Bi Y, et al. A low frequency horizontal vibration reduction method for a vehicle-borne photoelectric instrument. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(7): 184~190(in Chinese))
- 周加喜,王心龙,徐道临,等. 含凸轮-滚轮机构的准零刚度系统隔振特性实验研究. 振动工程学报, 2015, 28(3): 449~455(Zhou J X, Wang X L, Xu D L, et al. Experimental study on vibration isolation characteristics of the quasi-zero stiffness isolator with cam-roller mechanism. *Journal of Vibration Engineering*, 2015, 28(3): 449~455(in Chinese))
- 王毅,徐道临,周加喜. 滚球型准零刚度隔振器的特性分析. 振动与冲击, 2015, 34(4): 142~147(Wang Y, Xu D L, Zhou J X. Characteristic analysis of a ball-type vibration isolator with quasi-zero-stiffness. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(4): 142~147(in Chinese))
- 徐道临,赵智,周加喜. 气动可调式准零刚度隔振器设计及特性分析. 湖南大学学报(自然科学版), 2013, 40(6): 47~52(Xu D L, Zhao Z, Zhou J X. Design and analysis of an adjustable pneumatic vibration isolator with quasi-zero-stiffness Characteristic. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2013, 40(6): 47~52(in Chinese))
- Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Static analysis of a passive vibration isolator with quasi-zero-stiffness characteristic. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301(3-4): 477~488

- 5): 678~689
- 15 Xue B C. Simulation study on scissor-like element vibrations [Master Thesis]. Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University, 2012
- 16 Wang Y, Jing X J. Nonlinear stiffness and dynamical response characteristics of an asymmetric X-shaped structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 125(15): 142~169
- 17 Sun X T, Jing X J. Analysis and design of a nonlinear stiffness and damping system with a scissor-like structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 66-67: 723~742
- 18 Feng X, Jing X J, Xu Z, et al. Bio-inspired anti-vibration with nonlinear inertia coupling. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 124(1): 562~595
- 19 Jiang G, Jing X J, Guo Y Q. A novel bio-inspired multi-joint anti-vibration structure and its nonlinear HSLDS properties. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 138: 106552
- 20 Dai H H, Cao X Y, Jing X J, et al. Bio-inspired anti-impact manipulator for capturing non-cooperative spacecraft: theory and experiment. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 142: 106785

DYNAMIC DESIGN AND ANALYSIS OF X-SHAPED QUASI-ZERO STIFFNESS ISOLATOR *

Yin Mengmeng Ding Hu[†] Chen Liqun

(School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract By combining the quasi-zero stiffness structure (QZS) with an X-shaped isolator, a new passive X-shaped quasi-zero stiffness isolator (X-QZS) is designed. By replacing the linear spring of the X-shaped isolator with the QZS, excellent performance in ultra-low frequency band is obtained. Harmonic balance method and arc length method are used to solve the motion equations established by the Lagrange equations in order to obtain approximate analytical solutions, which are then verified by numerical method. Steady-state responses to harmonic displacement excitation with different structural parameters are compared. The vibration isolation performance are analyzed. The results demonstrate that X-QZS can achieve better isolation than QZS in the ultra-low frequency range, with lower resonance frequency and wider vibration isolation band.

Key words passive vibration isolation, ultra-low frequency, quasi-zero stiffness, X-shaped structure, harmonic balance method

Received 12 October 2020, Revised 27 December 2020.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11772181)

[†] Corresponding author E-mail: dinghu3@shu.edu.cn