

# 具有不等集群结构的离散时空网络间同步<sup>\*</sup>

柳爽 李宽 张润泽<sup>†</sup>

(上海应用技术大学 机械工程学院 上海 201418)

**摘要** 本文研究了一类具有不等集群结构的离散网络间的投影同步问题.根据集群网络的拓扑特性,设计了一种自适应的同步控制方法.基于 Lyapunov 稳定性理论,给出了实现两个离散网络同步所需的控制器以及同步参量的识别率.最后选取三种不同的时空混沌系统作为不同集群所对应的节点进行仿真分析,结果证明了该方法的正确性.

**关键词** 复杂网络, 时空混沌, 同步, 参量辨识

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-102

## 引言

自 1990 年 Ott, Grebogi 和 Yorke 提出非线性系统中 OGY 混沌控制方法后,相关的同步与控制方法日趋成熟和丰富,如驱动-响应同步法、主动-被动同步法、自适应控制同步法、脉冲同步法等<sup>[1-4]</sup>.同时其应用领域也由数学、物理、计算机迅速扩展到生物医学、航空航天等新兴领域,特别是近几年有关同步的研究在机器人协同合作、卫星姿态调整等方面的有着广泛的应用.在不同学科中,由于受控目标本身的动力学特性大有不同,因此如何有针对性的选取更合理的同步策略是研究的重点<sup>[5-8]</sup>.

通过观察自然界以及生活中的同步现象,发现同步问题不仅存在于两个系统间,在多群体的复杂网络中依然适用.比如智能交通网络中,无人驾驶车辆就是利用 360 度视野信息同步,使每辆车即时保存和分享交通网络中的路况,通过信息共享调整车速、控制车距,保证安全有序的交通运输.还有流行性疾病的网络传播等都呈现出群体同步的特征,与系统同步相比,网络同步除了要考虑的受控对象数目的增多外,网络中节点间耦合关系也同样重要,因此复杂网络的建模成为分析网络同步的又一关键.复杂网络模型经历着由简单到复杂、由确定到随机、由时间到时空的发展过程,并取得了很多创新性的研究成果<sup>[9-11]</sup>.Wang 和 Chen<sup>[12]</sup>研究了具有

小世界连接特性的复杂动态网络,发现当改变网络的部分连接时可增强网络的同步的能力.倪等<sup>[13]</sup>讨论了具有局部结构增长的无标度网络模型为基础的传染病动力学系统,给出了网络拓扑结构对传染病传播机制的影响.Wang 等<sup>[14]</sup>分析了无标度梯度网络下的耦合方案,并证明了通过该方法构建的网络比其他同规模网络具有更强的同步性.Li 等<sup>[15]</sup>利用滑模策略实现了一类时空混沌网络的同步问题,同时给出了未知参量的识别率.以上研究工作均围绕着复杂网络的内部网络内部拓扑性质、同步能力展开,可被视为网络内同步研究<sup>[16]</sup>.在此基础上, Li 等<sup>[17]</sup>提出了一类针对两个离散复杂网络间的外同步现象的展开了讨论.这种诠释不同群落间多个体间行为一致的外同步问题,能更贴切的还原真实网络在信息传播时的同步特性.Zhou 和 Li<sup>[18]</sup>讨论了结构不对称的小世界网络间的外部同步问题. Arellano 和 López 等<sup>[19]</sup>对比分析了在以混沌电路系构成的复杂网络间的同步过程中,耦合强度、连接方式对网络同步能力的影响.为了继续探究网络间的同步问题,本文将展开新的讨论.

在社会交往中常常会有这种情况发生,人们会根据自身的社会性格倾向于形成不同的团体群.群体内的成员之间关系非常密切,而不同群体间联系极为微弱.近年来类似这种物以类聚的网络集群的现象在神经网络等研究领域同样引起了人们的

2020-10-03 收到第 1 稿,2020-11-10 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(11602146,11872304),上海市自然科学基金资助项目(18ZR1438200),以及上海市“晨光计划”资助项目(16CG65)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: lsbbsh@126.com

广泛关注.根据网络中节点的方程或角色的不同,我们可以将网络中所有的多智能体分到不同的团体群中,通过设计合适的算法使得网络中各个相互连接的群体内部能够达到某种一致性,而不同群体间仍保持一定的差异性<sup>[20]</sup>.因此针对网络集群同步问题方面的研究显得十分必要,文献[21]研究了具有时滞的多重耦合复杂网络的集群同步问题,针对不同集群中的时滞因素分别分析了时滞以及耦合关联对集群同步能力的影响.在文献[22]研究了一类具有线性耦合的离散的社区网络集群同步问题,通过周期性切换控制器推导出实现集群同步的充分条件.在此类工作中,一般考虑的是所有节点均具有完全相同的动力学行为.然而这种假设,并不能完整的还原出真实网络中个体节点的全部特征,例如在社交网络、新陈代谢网络中,不同聚类中任意一对节点按照其功能划分是不同的<sup>[23]</sup>.文献[24]利用自适应牵制控制方法讨论了具有多混合节点形式复杂网络的集群同步问题,结合节点的动力学特性,通过控制部分重要节点,给出了整个网络的同步条件.文献[25]则根据实际疫情传播情况,通过不同的函数来描述病毒传播过程中个体的内在差异,建立了具有社团结构的网络模型,从理论上分析了不同群落中个体在病毒传播的规律.本文将以此为出发点,建立具有不等聚群结构的网络模型,分析网络间的同步问题.

混沌是非线性系统较普遍存在的一种行为,通过对非线性系统的混沌特性研究,使我们对系统的复杂性有了更深刻的认识.其实生产实际中系统行为除了随时间变化之外,当空间位置的改变时,系统将会展现出更复杂的动力学行为.在时间网络研究的基础上,郑等<sup>[26]</sup>研究了群结构时空网络中的同步现象,给出了判断时空网络是否能发生群同步的判据,得到网络从完全不同步到完全同步的多种路径.Lv等<sup>[27]</sup>针对具有不同动力学行为的时空网络展开了网络间同步问题的讨论,并对网络中的未知参量进行了有效的识别.在此工作的基础上,本文将选取具有时空混沌特征的离散系统作为网络节点,构建不等集群结构的复杂网络模型,并以Lyapunov稳定性原理为基础,分析两个具有不对称拓扑结构的复杂时空网络间的外同步问题.分别以Gibbs时空混沌系统,Bragg时空混沌系统,一维对流方程为网络节点构建具有不等集群结构的驱动网络模型,分区域展开同步控制,通过数值模拟的结果验证同

步控制方案的正确性与有效性.

## 1 网络模型与问题描述

实际的系统行为除了随时间变化之外,当空间位置改变时,系统将会展现出更复杂的动力学行为.考虑一个由 $N$ 个节点互相耦合而成的离散型动力学网络,其中第 $i$ 个节点的状态方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(m, n+1) &= F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) + \\ &\xi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} \mathbf{x}_j(m, n) \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_i(m, n) \in R^s$  为节点 $i$ 的状态变量,  $m$ 和 $n$ 分别代表节点系统中的空间变量和时间变量,  $F_i: R^s \rightarrow R^s$  是节点 $i$ 在未构成网络时的状态方程,  $\xi_i$ 代表节点间的耦合强度,  $\mathbf{B} = (b_{ij})_{N \times N}$  是耦合矩阵, 表示网络中不同节点间的连接方式和作用程度, 当两节点 $i$ 和 $j$ 间存在相互作用时  $b_{ij} \neq 0$ , 反之  $b_{ij} = 0$ , 满足  $b_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N b_{ij}$ . 将该网络分成 $r$ 个具有不等节点数的集群, 即  $\{1, 2, \dots, N\} = C_1 \cup C_2 \dots \cup C_r$ ,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1, \dots, l_1\}, \quad C_2 = \{l_1 + 1, \dots, l_2\}, \\ C_r &= \{l_{r-1} + 1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (2)$$

网络中同一集群具有相同的节点方程, 不同集群中节点方程不同. 若将方程(1)作为驱动网络, 则响应网络可整理为:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_i(m, n+1) &= \Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) + \\ &\xi_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{y}_j(m, n) + \mathbf{u}_i(m, n) \quad i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{y}_i(m, n) \in R^s$  为节点 $i$ 的状态变量,  $\Theta: R^s \rightarrow R^s$  代表响应网络中节点在未构成网络时的状态方程,  $\xi_i$ 代表耦合强度,  $\mathbf{D} = (d_{ij})_{N \times N}$  是网络耦合矩阵,  $\mathbf{u}_i(m, n)$  是驱动网络和响应网络间实现同步的控制器. 定义网络间对应误差方程

$$\mathbf{e}_i(m, n) = \mathbf{y}_i(m, n) - \phi_i \mathbf{x}_i(m, n) \quad (4)$$

其中 $\phi_i$ 是投影同步因子. 将网络方程带入误差表达式中可进一步整理得到

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(m, n+1) &= \mathbf{y}_i(m, n+1) - \phi_i \mathbf{x}_i(m, n+1) \\ &= \Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) + \xi_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{y}_j(m, n) - \phi_i F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) \\ &\quad - \phi_i \xi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} \mathbf{x}_j(m, n) + \mathbf{u}_i(m, n) \end{aligned} \quad (5)$$

## 2 控制器设计和同步分析

从驱动和响应网络的模型可以看出,网络节点是具有时空混沌特性的离散系统,并且网络本身呈现出有不等集群的结构特征. 本文将以 Lyapunov 稳定性为基础,结合自适应控制策略,通过对响应网络实施同步控制,实现两个耦合矩阵不对称的离散网络的同步追踪. 为了实现同步控制的目的,需要做如下的定义:如果满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_i(m, n)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}_i(m, n) - \phi_i \mathbf{x}_i(m, n)\| = 0$ , 那么驱动网络与响应网络之间的投影同步就能实现,其中  $\phi_i$  是投影同步因子.

定理1:驱动网络为具有不等集群的离散时空网络,当控制器以及同步调节参量满足如下要求时,可实现耦合矩阵不对称离散网络的同步追踪.

$$\begin{aligned} u_i(m, n) = & -\Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) + \phi_i F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) - \\ & \xi_i \sum_{j=1}^N \phi_i (d_{ij} - b_{ij}) \mathbf{x}_j(m, n) + \\ & (\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n) - 1) \Xi_i(m, n) - \\ & \theta_i(n) \mathbf{e}_i(m, n) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\hat{\theta}_i(n+1) = \theta_i + (\hat{\theta}_i(n) - \theta_i) \Psi_i(m, n) \quad (7)$$

上式中的  $\Xi_i(m, n)$  和  $\Psi_i(m, n)$  待定的同步设计函数,  $\mu_i$  是同步调节参量,  $\lambda_i$  是耦合矩阵  $d_{ij}$  的本征值,  $\theta_i$  为自适应调控参量,  $\hat{\theta}_i(n)$  是参量的辨识率.

证明:构造 Lyapunov 函数如下

$$\begin{aligned} V(n) = & \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| + \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \end{aligned} \quad (8)$$

其中函数  $\Xi_i(m, n)$  满足

$$\Xi_i(m, n+1) = \mu_i \mathbf{e}_i(m, n) + \Xi_i(m, n) \quad (9)$$

上式中  $\mu_i > 0$  为同步调节系数. 整理后可以得到:

$$\begin{aligned} \Delta V = & V(n+1) - V(n) \\ = & \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n+1) + \mathbf{e}_i(m, n+1) \right| + \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| \\ & - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| + \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \end{aligned} \quad (10)$$

根据本文定义的误差方程(5),上述方程可表示为

$$\begin{aligned} \Delta V = & \sum_{i=1}^N \left| \begin{aligned} & \mu_i \mathbf{e}_i(m, n) + \Xi_i(m, n) + \Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) + \\ & \xi_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{y}_j(m, n) - \phi_i F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) - \\ & \phi_i \xi_i \sum_{j=1}^N b_{ij} \mathbf{x}_j(m, n) + \mathbf{u}_i(m, n) \end{aligned} \right| \\ & + \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| - \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \\ = & \sum_{i=1}^N \left| \begin{aligned} & \mu_i \mathbf{e}_i(m, n) + \Xi_i(m, n) + \Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) + \\ & \xi_i \sum_{j=1}^N d_{ij} \mathbf{e}_j(m, n) \\ & + \xi_i \sum_{j=1}^N \phi_i (d_{ij} - b_{ij}) \mathbf{x}_j(m, n) - \phi_i F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) + \\ & \mathbf{u}_i(m, n) \end{aligned} \right| \quad (11) \\ & + \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| - \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \\ = & \sum_{i=1}^N \left| \begin{aligned} & \Xi_i(m, n) + \Theta(\mathbf{y}_i(m, n)) - \phi_i F_i(\mathbf{x}_i(m, n)) + \\ & (\mu_i + \xi_i \lambda_i) \mathbf{e}_i(m, n) \\ & + \xi_i \sum_{j=1}^N \phi_i (d_{ij} - b_{ij}) \mathbf{x}_j(m, n) + \mathbf{u}_i(m, n) \end{aligned} \right| \\ & + \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| - \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \end{aligned}$$

将定理1中的同步控制器(6)整理代入得到

$$\begin{aligned} \Delta V = & \sum_{i=1}^N \left| \begin{aligned} & (\mu_i + \xi_i \lambda_i) \mathbf{e}_i(m, n) - \hat{\theta}_i(n) \mathbf{e}_i(m, n) + \\ & \Xi_i(m, n) + \hat{\theta}_i(n) \mathbf{e}_i(m, n) \\ & + (\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n) - 1) \Xi_i(m, n) - \\ & \theta_i(n) \mathbf{e}_i(m, n) \end{aligned} \right| \\ & + \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| - \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \\ \leq & \sum_{i=1}^N \left| \mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n) \right| \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| + \\ & \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \left| \mathbf{e}_i(m, n) \right| - \sum_{i=1}^N \left| \Xi_i(m, n) + \mathbf{e}_i(m, n) \right| + \\ & \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i \right| - \sum_{i=1}^N \eta_i \left| \hat{\theta}_i(n) - \theta_i \right| \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\hat{\theta}_i(n)$  为自适应调控参量的辨识率,根据定理1,上式可改写为

$$\begin{aligned}
\Delta V &\leq \sum_{i=1}^N (|\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n)| - 1) |\Xi_i(m, n) + e_i(m, n)| + |\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| |e_i(m, n)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \eta_i |\hat{\theta}_i(n+1) - \theta_i| - \sum_{i=1}^N \eta_i |\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| \\
&= \sum_{i=1}^N (|\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n)| - 1) |\Xi_i(m, n) + e_i(m, n)| + |\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| |e_i(m, n)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \eta_i (|\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| \Psi_i(m, n)) - \sum_{i=1}^N \eta_i |\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| \\
&\leq \sum_{i=1}^N (|\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n)| - 1) |\Xi_i(m, n) + e_i(m, n)| \\
&\quad + |\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| (|e_i(m, n)| + \eta_i |\Psi_i(m, n)| - \eta_i)
\end{aligned} \tag{13}$$

观察发现, 方程中  $|\Xi_i(m, n) + e_i(m, n)| \geq 0$ ,  $|\hat{\theta}_i(n) - \theta_i| \geq 0$ , 当调节函数同时满足如下条件

$$|\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n)| - 1 \leq 0 \tag{14}$$

$$|e_i(m, n)| + \eta_i |\Psi_i(m, n)| - \eta_i = 0 \tag{15}$$

最终得到:

$$\Delta V \leq 0 \tag{16}$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 当同步调整参数满足  $|\mu_i + \xi_i \lambda_i - \hat{\theta}_i(n)| - 1 \leq 0$ , 且  $|\Psi_i(m, n)| = 1 - \frac{1}{\eta_i} |e_i(m, n)|$ ,  $\Delta V \leq 0$ . 表明具有不等集群结构的复杂网络(1)和(3)在定理1的作用下实现了网络间的同步, 证明完毕.

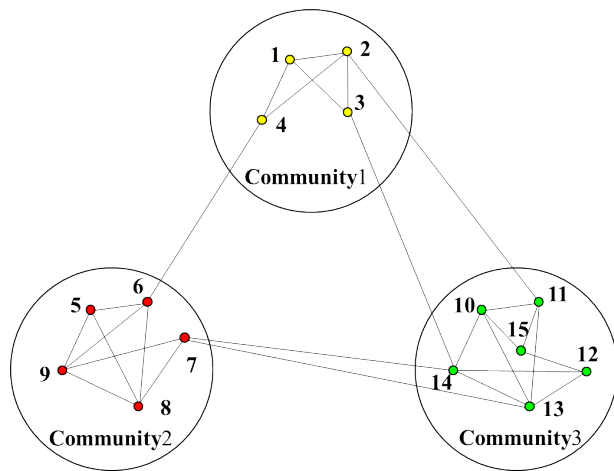


图1 具有不等集群结构的离散时空网络模型

Fig.1 A networks with three communities consisting of fifteen non-identical nodes

### 3 仿真计算

为了验证本文所述同步策略的有效性, 建立如图1所示的复杂网络模型. 该网络中共有15个节点, 包含3个不等集群. 节点1-4为第1集群, 5-9为第2集群, 10-15为第3集群, 只有同一集群中的节

点方程相同(初值不同), 系统维数为一. 选定第1个集群中节点方程为 Gibbs 离散时空系统<sup>[28]</sup>

$$\begin{aligned}
x_i(m, n+1) &= (1 - \varepsilon) A \sin^2(x_i(m, n+1) - x_b) \\
&\quad + \varepsilon A \sin^2(x_i(m, n-1) - x_b) \quad (i = 1, \dots, 4)
\end{aligned} \tag{17}$$

其中, 参量  $x_b = 0.85\pi$ ,  $A = 3$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $n$  表示离散化的时间,  $m$  表示空间格点坐标 ( $m = 1, 2, 3, \dots, L$ ), 其最大值用  $L$  表示. 当取初始条件  $x(i, 1) = 0.1$ , 周期性边界条件  $x(1, n) = 0$ ,  $x(L, n) = 0$ ,  $i \in (1, L)$ ,  $L = 100$ . 其相图如图2所示, 表示其随时空变化的时空演化轨迹.

选定第2个集群中节点方程为 Bragg 离散时空系统<sup>[29]</sup>

$$\begin{aligned}
x_i(m, n+1) &= (1 - \beta) \pi [r - v \sin^2(x_i(m+1, n) - V_b)] \\
&\quad + \beta \pi [r - v \sin^2(x_i(m-1, n) - V_b)] \quad (i = 5, \dots, 9)
\end{aligned} \tag{18}$$

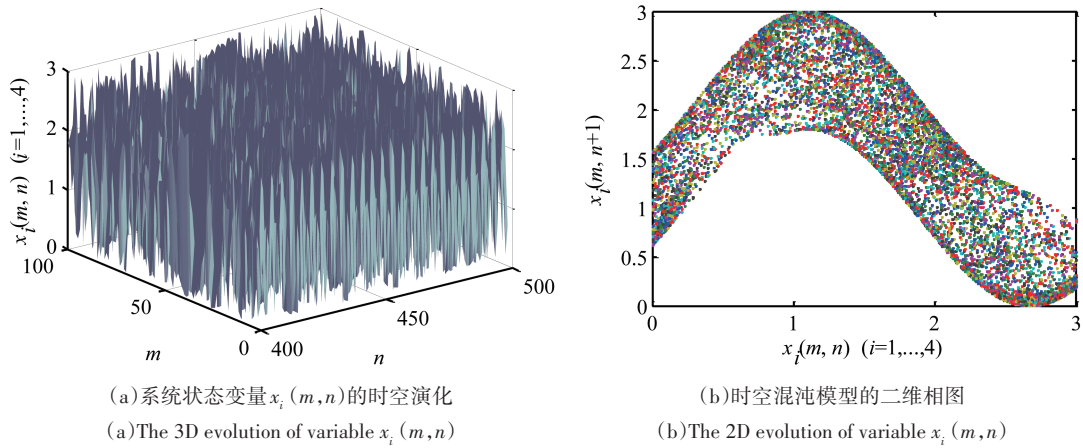
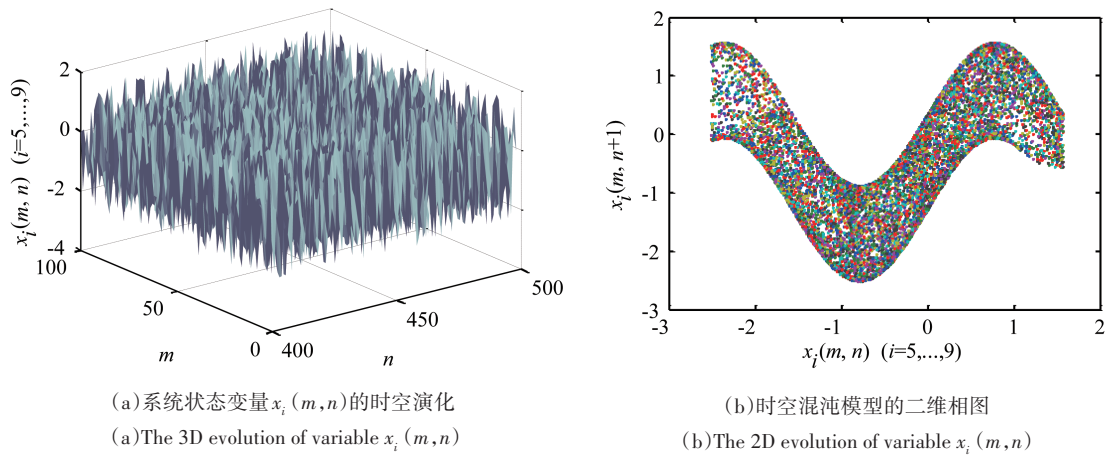
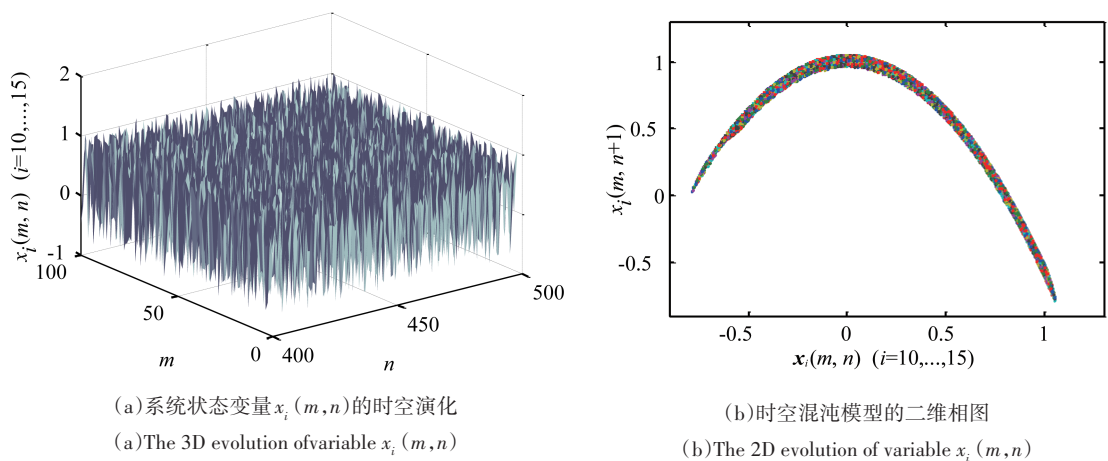
其中, 参量  $r = 0.5$ ,  $v = 1.5$ ,  $V_b = 0.25\pi$ ,  $\beta = 0.4$ ,  $n$  表示离散化的时间,  $m$  表示空间格点坐标 ( $m = 1, 2, 3, \dots, L$ ), 其最大值用  $L$  表示. 当取初始条件  $x(i, 1) = 0.1$ , 周期性边界条件  $x(1, n) = 0$ ,  $x(L, n) = 0$ ,  $i \in (1, L)$ ,  $L = 100$ . 其相图如图3所示, 表示其随时空变化的时空演化轨迹.

选定第3个集群中节点方程为离散后的一维对流方程<sup>[30]</sup>

$$\begin{aligned}
x_i(m, n+1) &= 1 - \sigma x_i(m+1, n) - \chi [(1 + \\
&\quad \sigma) x_i(m-1, n)]^2 \quad (i = 10, \dots, 15)
\end{aligned} \tag{19}$$

其中,  $\sigma$  和  $\chi$  均为系统参量,  $n$  表示离散化的时间,  $m$  表示空间格点坐标 ( $m = 1, 2, 3, \dots, L$ ), 其最大值用  $L$  表示. 当我们取  $\sigma = 0.05$ ,  $\chi = 1.75$ , 初始条件  $x(i, 1) = 0.1$ , 周期性边界条件  $x(1, n) = 0$ ,  $x(L, n) = 0$ ,  $i \in (1, L)$ ,  $L = 100$ , 其相图如图4所示, 表示其随时空变化的时空演化轨迹.

分别选取时空混沌系统 Gibbs, Bragg, 一维对流方程构建具有不等集群结构的复杂网络, 其拓扑

图2 Gibbs时空混沌系统相图 $x_i(m, n)$  ( $i=1, \dots, 4$ )Fig.2 Phase portrait of the Gibbs laser spatiotemporal model  $x_i(m, n)$  ( $i=1, \dots, 4$ )图3 Bragg时空混沌系统相图 $x_i(m, n)$  ( $i=5, \dots, 9$ )Fig.3 Phase portrait of the Bragg laser spatiotemporal model  $x_i(m, n)$  ( $i=5, \dots, 9$ )图4 一维对流方程时空混沌系统相图 $x_i(m, n)$  ( $i=10, \dots, 15$ )Fig.4 Phase map of one-dimensional convective equation  $x_i(m, n)$  ( $i=10, \dots, 15$ )

结构如图1所示.该网络中总节点数 $N=15$ ,节点1-4为Gibbs时空混沌系统,节点5-9为Bragg时空混沌系统,节点10-15为一维对流方程.从图1-图4

可以看出,本文以3个无论是随时间还是空间均存在较大差异时空混沌系统为网络节点,根据图1的连接方式构建不等集群的复杂网络模型.然后建立

响应网络,响应网络中节点数亦为 $N=15$ ,节点方程选取 Gibbs 时空系统(均具不同初值).节点间以环形网络结构相连.驱动响应网络中节点方程不全相同,拓扑结构完全不相同.

按照本文介绍的同步追踪方案,响应网络中节点 $i=1-4$ ,将以投影因子 $\phi_i$ 同步于驱动网络集群1所对应的同步目标 Gibbs 时空混沌系统;节点 $i=5-8$ ,将以投影因子 $\phi_i$ 投影同步于驱动网络集群2所对应的同步目标 Bragg 时空混沌系统,节点 $i=10-15$ ,将以投影因子 $\phi_i$ 投影同步于驱动网络集群3所对应的同步目标一维对流方程.根据定理1,选定

同步控制器以及同步参量辨识率,驱动网络(1)和响应网络(3)间可实现投影追踪同步,具体同步情况如图7-图10所示.

考虑到网络中节点数为15,不便于逐一列举,选择来自3个不同集群的6个代表性节点为例进行讨论.分别为集群1中节点1、节点4,集群2中节点5、节点9,集群3中节点12和节点15.投影同步的比例因子分别为 $\phi_1=1/2, \phi_4=1/2, \phi_5=1, \phi_9=1, \phi_{12}=2, \phi_{15}=2$ 以逐倍递增的方式分析其同步过程,如图5所示.图5分别展示了时空网络中节点1、4、5、9、12和15随时间以及空间演化的相图.在本文所

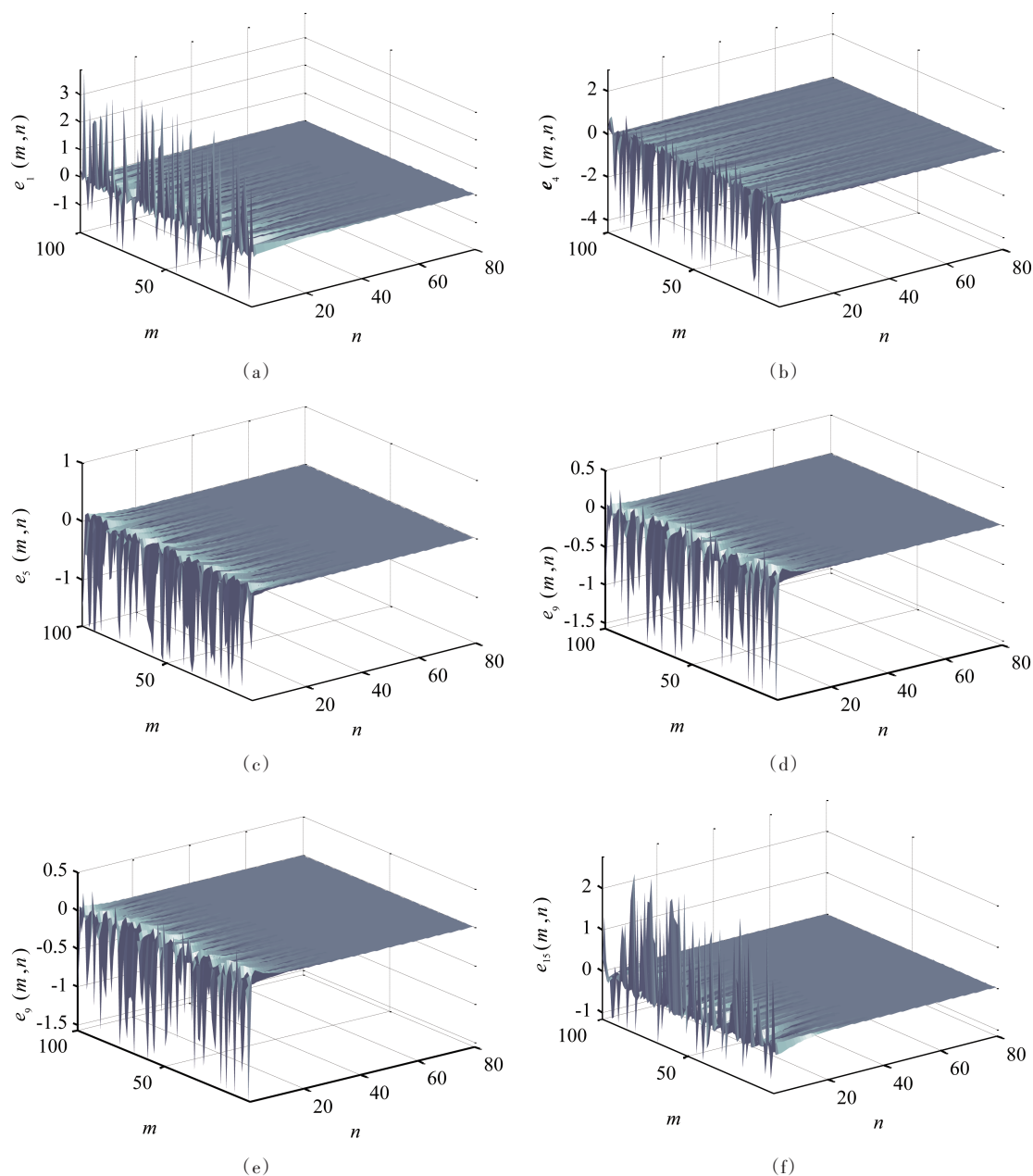


图5 具有不等集群结构的网络间对应节点误差 $e_i(m, n)$ ( $i=1, 4, 5, 9, 12, 15$ )的时空演化规律

Fig.5 Evolution of network error  $e_i(m, n)$ ( $i=1, 4, 5, 9, 12, 15$ )

设计的同步方法控制下,具有不同初值不同节点方程,不同耦合关联的6个节点,分属于3个不同集群,以及不同的投影比例因子.在控制器实施的最

初阶段,驱动相应网络间对应节点间存在较大的误差,在经过短暂的时间演变后误差方程迅速趋于零.

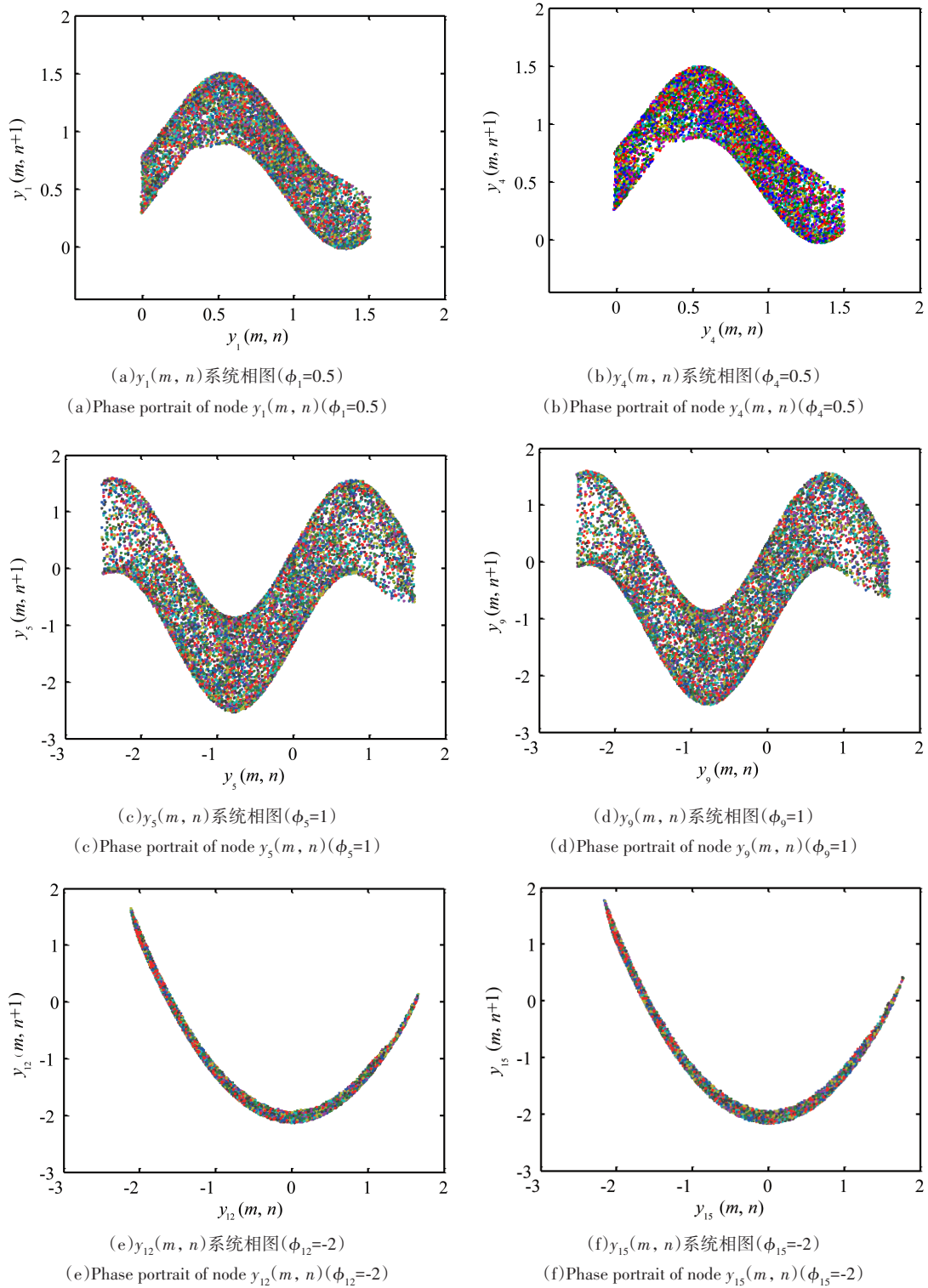


图6 在实施同步控制后响应网络中对应节点的系统相图

Fig.6 Phase portraits of nodes  $y_i(m, n)$  ( $i=1, 4, 5, 9, 12, 15$ ).

对比图2-4以及图6,响应网络是由15个具有不同初值的Gibbs时空混沌系统耦合而成,其状态

变量随时间空间的演化规律如图2所示.在本文提出的控制器的作用下,响应网络中对应节点的相图

也随之改变,节点1-节点4同步追踪以 $\phi_i=1/2(i=1, \dots, 4)$ 同步于目标网络的Gibbs系统,节点1-节点4同步追踪以 $\phi_i=1(i=5, \dots, 9)$ 同步于目标网络的Bragg时空混沌系统,节点10-节点15同步追踪以 $\phi_i=-2(i=10, \dots, 15)$ 同步于目标网络的一维对流方程.证明了本文所述方法的有效性.考虑到网络节点数目偏多,对应节点间的同步追踪不便于一一展示,我们定义驱动响应网络对应节点间的平均误差以及总的累积误差 $E(m, n) = 1/N \sum_{i=1}^N \sqrt{e_i(m, n)^2}$ ,具体如图7和图8所示.

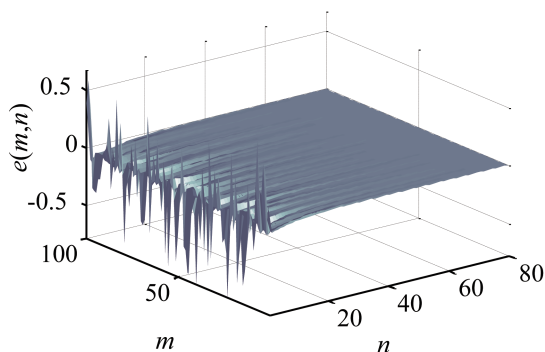


图7 平均误差 $e(m, n)$ 时空演化轨迹  
Fig.7 Evolution of network average error  $e(m, n)$

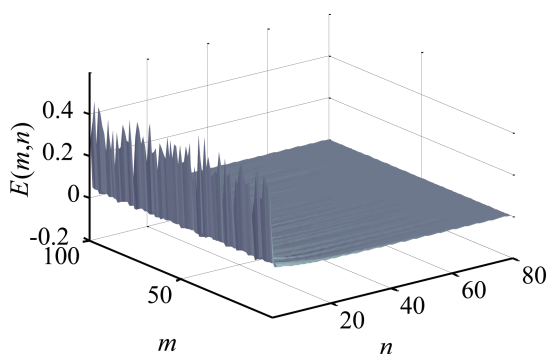


图8 总误差 $E(m, n)$ 时空演化轨迹  
Fig.8 Evolution of network error  $E(m, n)$

从图7和图8中可以看出,驱动响应网络的平均误差和累积误差在短暂的时间演变后,迅速趋于零,进一步证明该同步方法可以有效地实现两个具有不等集群结构的复杂网络间的同步.

## 4 结论

本文主要讨论了具有集群结构的两个复杂时空网络间的投影同步问题.考虑到实际中的动力学系统随时空演变的动力学特性,以时空混沌系统为节点构建复杂网络模型.并以Lyapunov稳定性为基础,结合网络的集群结构特性,分区域展开同步

控制,通过同步控制器以及参量的自适应识别率实现了两个网络间的投影同步.为了进一步验证该方法的有效性,选取Gibbs时空混沌系统,Bragg时空混沌系统,一维对流方程为不同集群中的节点进行仿真分析,对应的节点误差在短暂的时间演变后迅速趋于零,结果验证了同步控制方案的可行性.

## 参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821
- 2 Albert R, Barabási A L. Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 47~97
- 3 李特,袁建宝,吴莹.一类不确定分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制方法. *动力学与控制学报*, 2017, 15(2): 110~118 (Li T, Yuan J B, Wu Y. A method of adaptive sliding mode control for synchronization of one class of uncertain fractional-order chaotic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(2): 110~118 (in Chinese))
- 4 管曙光.复杂网络上的爆炸式同步. *中国科学*, 2020, 1: 010504 (Guan S G. Explosive synchronization in complex networks. *Scientia Sinica*, 2020, 1: 010504 (in Chinese))
- 5 刘田,杨晓丽.离散混沌网络系统中共同噪声诱导同步的条件. *动力学与控制学报*, 2019, 17(1): 27~34 (Liu T, Yang X L. Condition of common noise induced synchronization in discrete chaotic network systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(1): 27~34 (in Chinese))
- 6 Du H, Li S, Qian C. Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2711~2717
- 7 Pratap A, Raja R, Cao J, et al. Quasi-pinning synchronization and stabilization of fractional order BAM neural networks with delays and discontinuous neuron activations. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, 131: 109491
- 8 郭翔鹰,陈璐璐,张伟. Z型折叠机翼的气动力计算及非线性动力学分析. *动力学与控制学报*, 2018, 16(5): 430~439 (Guo X Y, Chen L L, Zhang W. Aerodynamic force calculation and nonlinear dynamic analysis of z-type morphing wings. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(5): 430~439 (in Chinese))
- 9 Watts D J, Strogatz S H. Collectivedynamics of small world networks. *Nature*, 1998, 393(6684): 440~442
- 10 Newman M E J, Watts D J. Renormalizationgroup analysis of the small-world network model. *Working Papers*, 1999, 263(4-6): 341~346
- 11 Barahona M, Pecora L M. Synchronization in small-world

- systems. *Physical Review Letters*, 2002, 89(5):054101
- 12 Wang X F, Chen G. Synchronization in small-world dynamical networks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(1):187~192
  - 13 倪顺江, 翁文国, 范维澄. 具有局部结构的生长无标度网络中传染病传播机制研究. *物理学报*, 2009, 58(6):3707~3713 (Ni S J, Weng W G, Fan W C. Spread dynamics of infectious disease in growing scale-free networks. *Acta Physica Sinica*, 2009, 58(6):3707~3713 (in Chinese))
  - 14 Wang X, Lai Y C, Lai C H. Enhancing synchronization based on complex gradient networks. *Physical Review E*, 2007, 75(5):056205
  - 15 Lv L, Li C R, Li G, et al. Projective synchronization of uncertain scale-free network based on modified sliding mode control technique. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2017, 473:511~521
  - 16 Li C, Sun W, Kurths J. Synchronization between two coupled complex networks. *Physical Review E*, 2007, 76(4):046204
  - 17 Li C, Xu C, Sun W, et al. Outer synchronization of coupled discrete-time networks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2009, 19(1):013106
  - 18 Zhou G, Li C, Li T, et al. Outer synchronization investigation between WS and NW small-world networks with different node numbers. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2016, 457:506~513
  - 19 Arellano-Delgado A, López-Gutiérrez R M, Martínez-Clark R, et al. Small-world outer synchronization of small-world chaotic networks. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2018, 13(10):101008
  - 20 胡丽萍, 杨晓丽, 孙中奎. 混合突触作用下耦合时滞对模块神经网络簇同步的影响. *动力学与控制学报*, 2015, 13(6):462~467 (Hu L P, Yang X L, Sun Z K. Effect of coupled time-delay on bursting synchronization in modular neuronal network with hybrid synapses. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(6):462~467 (in Chinese))
  - 21 Thomas D, Judith L, Eckehard S. Cluster and group synchronization in delay-coupled networks. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2012, 86:016202
  - 22 Gan Q, Xiao F, Qin Y, et al. Fixed-time cluster synchronization of discontinuous directed community networks via periodically or aperiodically switching control. *IEEE Access*, 2019, 7:83306~83318
  - 23 汤泽, 轩德利, 王艳, 等. 奇异 Lur'e 网络的自适应牵制聚类同步控制. *控制理论与应用*, 2020, 37(10):2107~2114 (Tang Z, Xuan D L, Wang Y, et al. Cluster synchronization of heterogeneous Lur'e networks via pinning adaptive control. *Control Theory & Applications*, 2020, 37(10):2107~2114 (in Chinese))
  - 24 Zhou P, Cai S, Shen J, et al. Adaptive exponential cluster synchronization in colored community networks via aperiodically intermittent pinning control. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(3):905~921
  - 25 Xu Z P, Li K Z, Sun M F, et al. Interaction between epidemic spread and collective behavior in scale-free networks with community structure. *Journal of Theoretical Biology*, 2019, 462:122~133
  - 26 郑志刚, 冯晓琴. 群结构时空网络的同步. *复杂系统与复杂性科学*, 2008, 4:75~83 (Zheng Z G, Feng X Q. Synchronization of group network. *Complex Systems and Complexity Science*, 2008, 4:75~83 (in Chinese))
  - 27 Lv L, Li C R, Bai S Y, et al. Cluster synchronization between uncertain networks with different dynamics. *Physica A Statistical Mechanics & its Applications*, 2017, 469:429~437
  - 28 Gibbs H M, Hopf FA, Kaplan D L, et al. Observation of chaos in optical bistability. *Physical Review Letters*, 1981, 46(7):474~477
  - 29 Vallee R, Delisle C, Chrostowski J. Noise versus in acousto-optic bistability. *Physical Review A*, 1984, 30(1), 336~342
  - 30 Chen G, Liu S T. On spatial periodic orbits and spatial chaos. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2003, 13(4):935~941

# OUTER SYNCHRONIZATION BETWEEN COMMUNITY SPATIOTEMPORAL NETWORKS WITH NONIDENTICAL NODES \*

Liu Shuang Li Kuan Zhang Runze<sup>†</sup>

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

**Abstract** In this paper, projective synchronization between spatiotemporal networks with community structure and nonidentical nodes is investigated. Nodes in the same community are governed by the same dynamical function, while the functions for different communities are different. Based on topological characteristics of discrete spatiotemporal networks, an adaptive synchronous control method is designed. Several sufficient conditions for achieving projective synchronization are obtained by Lyapunov stability theory, which are further verified numerically by three different spatiotemporal chaotic networks.

**Key words** complex networks, spatiotemporal chaos, synchronization, parameter identification

---

Received 3 October 2020, revised 10 November 2020.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11602146, 11872304), the Science Foundation of Shanghai (18ZR1438200) and the Chen Guang Project supported by Shanghai Municipal Education Commission and Shanghai Education Development Foundation (16CG65)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: lsbbsh@126.com