

混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估动力学理论^{*}

苏潇阳 康厚军[†] 丛云跃
(湖南大学 土木工程学院,长沙,410082)

摘要 基于斜拉桥的受力特点和形状特征,提出了用于混合体系多塔斜拉桥面内竖弯刚度评估的多梁离散弹簧动力学模型.首先,在课题组相关成果的基础之上,介绍了采用传递矩阵法对不同体系斜拉桥的处理方式.然后,通过使用连续性条件和边界条件,建立了混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估的基本理论.最后,以赤石大桥为例,建立了相应的有限元模型,并将本文方法算出的频率与有限元和实测得到的频率进行对比,表明本文方法的正确性,可用于混合体系多塔斜拉桥面内竖弯刚度的评估.

关键词 混合体系, 斜拉桥, 竖弯刚度, 传递矩阵法, 特征值

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-119

引言

随着我国经济水平的不断提高和桥梁建造技术的不断成熟,斜拉桥的跨径在一次次地突破极限,于 2008 年建成通车的苏通大桥主跨径达到了 1088 米.一方面,随着跨径的增加,斜拉桥将会变得更柔,在环境激励下(例如风荷载^[1],地震荷载和车辆荷载^[2-4]等)容易发生大幅振动,从而影响其动力学特性.另一方面,斜拉桥本身作为一种柔性结构,刚度不足是其主要问题.因此,如何建立准确的力学模型来评估斜拉桥的竖弯刚度,一直是桥梁工作者的研究目标之一.对斜拉桥动力学特性的研究一般通过斜拉梁模型^[5-7]来实现,但斜拉梁模型作为斜拉桥中的一个构件,虽能揭示斜拉桥的部分动力学行为,但在某些方面仍稍显不足,例如斜拉梁模型不能考虑桥塔的振动.因此,众多学者开始注重研究斜拉桥整体的动力学行为.陈恒大等^[8,9]基于 Rayleigh 法和变形协调原理,推导了三塔斜拉桥竖弯振动的频率公式,对多塔斜拉桥的竖向刚度进行分析,避免了概念设计阶段斜拉桥有限元建模的繁琐性.唐冕等^[10]基于 Rayleigh 法,采用主梁的静挠度曲线作为试函数,推导了半漂浮体系和刚构体系斜拉桥多塔部分斜拉桥的基频计算公式,通过与有限元方法和规范中的公式作比较,他们指出所提出的公式可以满足斜拉桥概念设计阶段的需要.李

忠三等^[11]考虑多塔斜拉桥的结构力学特性,采用单位荷载法得到了多塔斜拉桥的拉索弹性支承刚度系数的解析公式.他们指出之所以多塔斜拉桥刚度过低,是因为主梁对中间塔提供的纵向约束刚度太弱.王建国等^[12]指出由于实验室场地有限,多塔斜拉桥的全桥振动台试验大都无法进行,但考虑到多塔斜拉桥多为对称结构,因此他们对半桥结构纵向施加一定地震激励,通过与全桥结构得到的结果进行对比,表明半结构简化的合理性,从而为多塔斜拉桥的室内试验提供了一种思路.孙才志等^[13]以嘉绍跨江大桥为例,采用 ANSYS 有限元软件建立该桥模型,对随机地震动作用下的大跨度多塔斜拉桥的结构动力响应进行了数值模拟.他们指出,地震波波速的不同对结构的地震响应影响较大.

上述对多塔斜拉桥动力学行为的研究多数通过有限元模拟来实现,或者通过能量法给出多塔斜拉桥竖向频率的近似计算公式,而针对多塔斜拉桥整体建立动力学模型却很少见到.鉴于此,本文在课题组已有成果的基础上^[14,15],针对混合体系多塔斜拉桥,建立了相应的多梁离散弹簧动力学模型.本文是文献[14]和[15]的延伸工作,采用传递矩阵法对混合体系多塔斜拉桥的面内特征值问题进行求解,并以赤石大桥为例,对其频率和模态进行了求解,从而对其竖弯刚度进行评估.同时建立赤石大桥的 ANSYS 模型,并将本文结果与

2019-08-28 收到第 1 稿,2019-10-25 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(11972151, 11872176)

[†] 通讯作者 E-mail: khjun@hnu.edu.cn

由于三种体系在点 H 处的受力情况和连续性条件不同,所以这里对三种体系分别考虑.

1.1 刚构体系

式(3)中 U_H 的表达式为

$$U_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

HE , HF 和 HG 在点 H 处应满足位移协调关系,即

$$D_{HE}Z_{HE} = D_{HF}Z_{HF} \quad (4)$$

$$D_{HE}Z_{HE} = D_{HG}Z_{HG} \quad (5)$$

式中,

$$D_{HE} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{HF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{HG} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

为便于书写,引入以下变量

$$Z_{l,0} = t_{l,0} = \begin{bmatrix} Z_A \\ Z_B \\ Z_C \end{bmatrix}, t_{n+1} = \begin{bmatrix} Z_{HE} \\ Z_{HF} \\ Z_{HG} \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中,

$$Z_A = [u_{1,0} \quad w_{1,0} \quad \varphi_{1,0} \quad M_{1,0} \quad Q_{1,0} \quad T_{1,0}]^T,$$

$$Z_B = [\bar{u}_{1,0} \quad \bar{w}_{1,0} \quad \bar{\varphi}_{1,0} \quad \bar{M}_{1,0} \quad \bar{Q}_{1,0} \quad \bar{T}_{1,0}]^T,$$

$$Z_C = [\tilde{u}_{1,0} \quad \tilde{w}_{1,0} \quad \tilde{\varphi}_{1,0} \quad \tilde{M}_{1,0} \quad \tilde{Q}_{1,0} \quad \tilde{T}_{1,0}]^T$$

根据式(1),可以得到

$$Z_{HE} = U_A Z_{l,0}, Z_{HF} = U_B Z_{l,0}, Z_{HG} = U_C Z_{l,0} \quad (7)$$

对于梁段 HK ,根据传递矩阵法可以得到

$$Z_K = U_{HK} Z_{HK} \quad (8)$$

将式(2)和(3)代入式(8)

$$Z_K = U_{HK} U_H (E_{HE} Z_{HE} + E_{HF} Z_{HF} + E_{HG} Z_{HG}) \quad (9)$$

将式(7)代入式(9),(4)和(5)可以得到

$$Z_K = U_{HK} U_H (E_{HE} U_A + E_{HF} U_B + E_{HG} U_C) Z_{l,0} \quad (10)$$

$$(D_{HE} U_A - D_{HF} U_B) Z_{l,0} = 0 \quad (11)$$

$$(D_{HE} U_A - D_{HG} U_C) Z_{l,0} = 0 \quad (12)$$

联立式(10) - (12),可以得到

$$U_{all} Z_{all} = 0 \quad (13)$$

式中,

$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{HK} U_H (E_{HE} U_A + E_{HF} U_B + E_{HG} U_C) & -I_{6 \times 6} \\ D_{HE} U_A - D_{HF} U_B & O_{3 \times 6} \\ D_{HE} U_A - D_{HG} U_C & O_{3 \times 6} \end{bmatrix},$$

$$Z_{all} = \begin{bmatrix} Z_{l,0} \\ Z_K \end{bmatrix}$$

1.2 半漂浮体系

式(3)中 U_H 的表达式为

$$U_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

HE , HF 和 HG 在点 H 处应满足位移协调关

系,即

$$D_{HE1} Z_{HE} = D_{HF} Z_{HF} \quad (14)$$

$$D_{HE2} Z_{HE} = D_{HG} Z_{HG} \quad (15)$$

式中,

$$D_{HE1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_{HF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D_{HE2} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0],$$

$$D_{HG} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

采用与刚构体系相同的处理方法,最终可以得到

式(13), U_{all} 的表达式为

$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{HK} U_H (E_{HE} U_A + E_{HF} U_B + E_{HG} U_C) & -I_{6 \times 6} \\ D_{HE1} U_A - D_{HF} U_B & O_{5 \times 6} \\ D_{HE2} U_A - D_{HG} U_C & O_{1 \times 6} \end{bmatrix}$$

1.3 漂浮体系

式(3)中 U_H 的表达式为

$$U_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

HE 和 HF 在点 H 处应满足位移协调关系,即

$$D_{HE} Z_{HE} = D_{HF} Z_{HF} \quad (16)$$

式中

$$D_{HE} = D_{HF} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

采用与刚构体系相同的处理方法,最终可以得到式(13), U_{all} 的表达式为

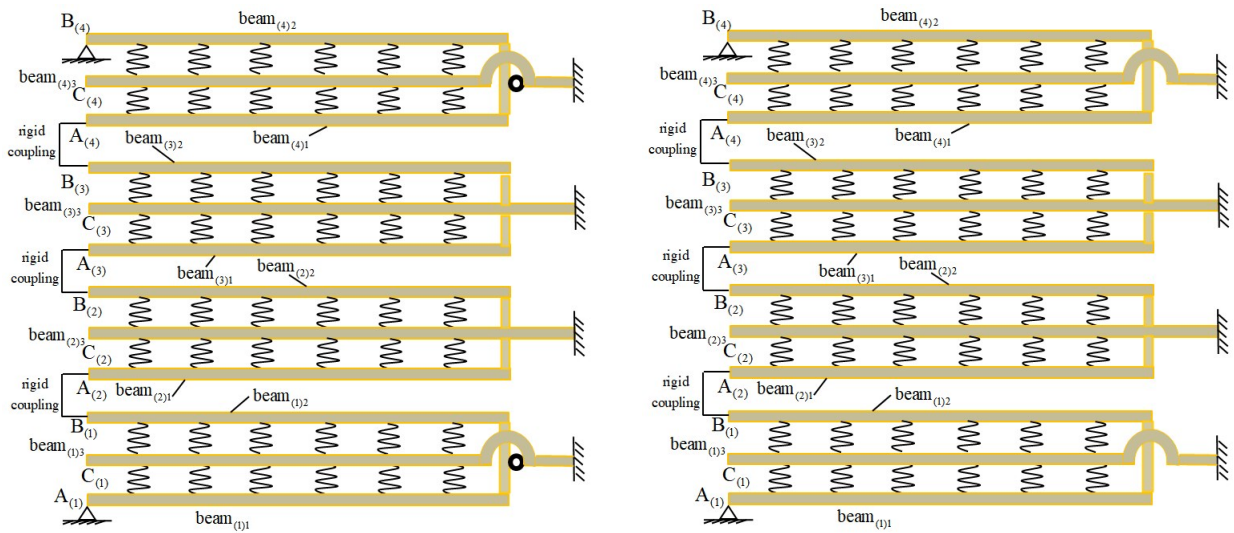
$$U_{all} = \begin{bmatrix} U_{HK}U_H(E_{HE}U_A + E_{HF}U_B + E_{HC}U_C) & -I_{6 \times 6} \\ D_{HE}U_A - D_{HF}U_B & O_{6 \times 6} \end{bmatrix}$$

2 混合体系斜拉桥多梁离散弹簧模型和理论

混合体系多塔斜拉桥可以看作是由上述三种不同体系的单塔斜拉桥相互组合构成.一般而言,

大跨度混合体系斜拉桥多为刚构体系和半漂浮体系,或者刚构体系与漂浮体系之间的组合.根据文献[14]和[15],每一座单塔斜拉桥都对应一个三梁离散弹簧动力学模型,这些模型通过连续性条件相互联系,于是我们可以得到与混合体系多塔斜拉桥对应的多梁离散弹簧力学模型,如图4所示.接下来我们以图4(a),即刚构体系和半漂浮体系相组合的四塔斜拉桥为例进行面内特征值问题求解.

在上节中,我们对单个体系斜拉桥进行了求解,混合体系多塔斜拉桥的求解则是通过将不同结构体系对应的(13)式联立起来,然后应用 $A_{(k)}$ 与 $B_{(k+1)}$ ($k=1, 2, 3$) 之间的连续性条件,以及 $A_{(1)}$ 与 $B_{(4)}$ 处的边界条件,最终可以得到系统的总的传递矩阵



(a) The model with semi-floating side towers and rigid-frame middle towers (b) The model with floating side towers and rigid-frame middle towers

图 4 多梁离散弹簧动力学模型

Fig.4 The dynamic multi-beam model with discrete springs

$$\bar{U}_{all} \bar{Z}_{all} = 0 \quad (17)$$

根据克拉默法则,式(17)有非平凡解,则

$$\Delta = |\bar{U}_{all}| = 0 \quad (18)$$

式(18)为结构自振频率的超越方程,可采用数值分析方法求其数值解,进而求得斜拉桥整体模态.

3 算例分析

为验证本文方法的正确性,以赤石大桥为例进行算例分析.赤石大桥是中国湖南省郴州市境内的高速通道,位于青头江河道之上,是厦门—成都高速公路(国家高速G76)湖南段的重要构成部分之一,主体结构为165m+3×380m+165m四塔预应力混凝土双索面斜拉桥,边塔采用半漂浮体系,中塔

采用刚构体系,边、中跨之比为0.4342,桥塔呈H形索塔,主索塔高近290m,下塔柱高达186m,主桥各塔均布置为23对斜拉索,拉索纵向呈扇形布置^[16].表1给出了本文方法,Ansys模型以及实测得到的前五阶频率,从表中可以看出本文方法与另外两种方法计算出的频率之间虽有一定的误差,可以看出有限元法和本文方法计算结果与实验对比,结果偏小,主要原因在于本文计算和有限元模型均有较大的简化.因此,本文建立的方法满足多塔斜拉桥概念设计阶段的要求.限于篇幅,图5给出了赤石大桥前两阶模态对比图,从图中可以看出有限元模型和本文方法计算出的模态吻合较好,从而验证了本文方法的正确性.

表1 赤石大桥前五阶频率

Table 1 The first five frequencies of Chishi cable-stayed bridge

Mode No.	1	2	3	4	5
Anslys/Hz	0.232	0.255	0.309	0.407	0.522
Field test/Hz	0.296	0.348	0.427	0.538	0.586
Proposed theory/Hz	0.253	0.264	0.318	0.501	0.532
Errors between the results obtained by Ansys and proposed theory/%	8.300	3.410	2.830	18.760	1.880
Errors between the results of field test and theory/%	14.530	24.140	25.530	6.880	9.220

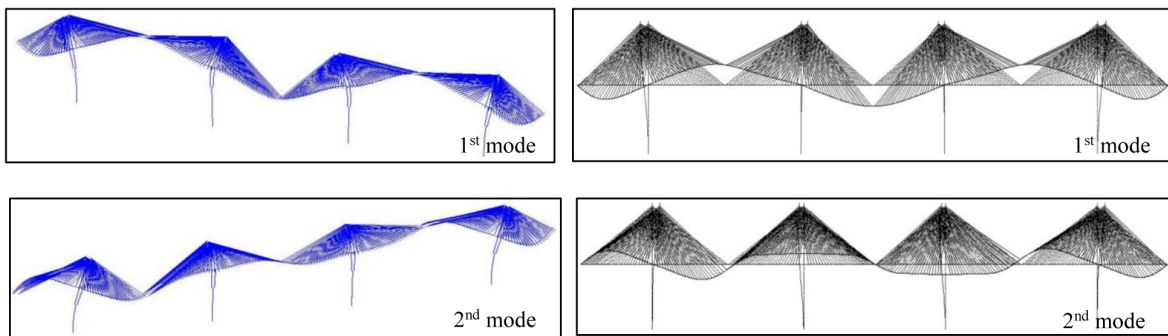


图5 赤石大桥前两阶模态

Fig. 5 The first two mode shapes of Chishi cable-stayed bridge

4 结论

本文基于斜拉桥的形状特征和受力特点,建立了混合体系多塔斜拉桥的多梁离散弹簧动力学模型.在课题组已有成果的基础之上,介绍了如何采用传递矩阵法对不同体系斜拉桥进行求解的基本方法.然后,通过不同三梁离散弹簧模型之间的连续性条件以及边界条件,建立了混合体系多塔斜拉桥竖弯刚度评估的基本理论.最后,以赤石大桥为例,对桥梁的面内特征值问题进行研究.为了验证本文方法的正确性,采用Ansys建立了赤石大桥的有限元模型,并将本文结果与有限元模型和实测得到的结果进行比较.结果表明本文所建立的模型和方法可用于混合体系多塔斜拉桥的竖弯刚度评估,能够满足多塔斜拉桥计算分析和竖弯刚度评估的需要.文中虽以半漂浮体系和刚构体系相混合的赤石大桥为例,但本文的方法和模型也可用于其他混合体系(例如漂浮体系和刚构体系)多塔斜拉桥的竖弯刚度评估.

参 考 文 献

- 1 梁剑青, 欧进萍. 大跨斜拉桥桥面风致抖振的粘滞阻尼控制分析. 地震工程与工程振动, 2006, 26(1): 139~144 (Liang J Q, Ou J P. Lateral buffeting control of long-span cable-stayed bridge deck by viscous dampers. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2006, 26(1): 139~144 (in Chinese))
- 2 王贵春, 潘家英, 陈淮. 考虑约束扭转的斜拉桥车激横向振动分析. 地震工程与工程振动, 2008, 28(5): 65~70 (Wang G C, Pan J Y, Chen H. The lateral dynamic analysis of cable-stayed bridge due to vehicle when considering restrained torsion. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2008, 28(5): 65~70 (in Chinese))
- 3 刘星, 李韶华, 司春棣, 等. 曲线梁桥在车辆荷载下的动力响应研究. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 50~58 (Liu X, Li S H, Si C D, et al. Dynamic response of curved girder bridge under random vehicle loads. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(2): 50~58 (in Chinese))
- 4 陈代海, 王雅南, 李整. 基于板单元形函数的公路桥梁车桥耦合振动分析方法研究. 动力学与控制学报, 2019, 17(4): 318~325 (Chen D H, Wang Y N, Li Z. Study on highway bridge vehicle bridge coupling vibration based on interpolation function of plate element. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(4): 318~325 (in Chinese))
- 5 Fujino Y, Warnitchai P, Pacheco B M. An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3DOF model of cable stayed-beam. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4(2): 111~138
- 6 赵跃宇, 王涛, 康厚军. 斜拉索主参数共振的稳定性分析. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 112~117 (Zhao Y

- Y, Wang T, Kang H J. Analysis of the stability of principle parametric resonance of stayed-cable. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 112~117 (in Chinese))
- 7 Gattulli V, Morandini M, Paolone A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2010, 31(6): 1281~1300
- 8 陈恒, 邬晓光, 王希财. 多塔斜拉桥竖弯基频估算实用公式. 沈阳大学学报(自然科学版), 2017, 29(2): 146~152(Chen H D, Wu X G, Wang X C. Formula for vibration of cable-stayed bridges with three towers. *Journal of Shenyang University (Natural Science Edition)*, 2017, 29(2): 146~152 (in Chinese))
- 9 陈恒, 姚丝思, 邬晓光. 基于变形协调原理的多塔斜拉桥竖向刚度分析. 武汉大学学报(工学版), 2018, 51(9): 790~797(Chen H D, Yao S S, Wu X G. Analysis of vertical stiffness of multi-tower cable-stayed bridge based on principle of deformation coordination. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2018, 51(9): 790~797 (in Chinese))
- 10 唐冕, 丁千夏, 宋旭明. 多塔部分斜拉桥自振频率的实用简化算法. 铁道科学与工程学报, 2018, 15(11): 147~152(Tang M, Ding Q X, Song X M. The practical simplification algorithm of multi-pylon extradosed cable-stayed bridge fundamental frequency. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2018, 15(11): 147~152 (in Chinese))
- 11 李忠三, 雷俊卿. 多塔斜拉桥拉索支承刚度系数的求解与分析. 长安大学学报(自然科学版), 2015, 35(2): 83~90(Li Z S, Lei J Q. Analysis and solution of cable supporting stiffness coefficient of multi-span cable-stayed bridges. *Journal of Chang'an University (Natural Science Edition)*, 2015, 35(2): 83~90 (in Chinese))
- 12 王建国, 杨浩林, 陆元春, 等. 多塔斜拉桥地震作用简化分析方法. 地震工程与工程振动, 2016, 36(5): 145~150(Wang J G, Yang H L, Lu Y C, et al. The simplified method for the longitudinal seismic response analysis of the multi-tower cable stayed bridge. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2016, 36(5): 145~150 (in Chinese))
- 13 孙才志, 赵雷, 王菲. 大跨度多塔斜拉桥随机地震响应分析. 地震工程学报, 2014, 36(4): 911~918(Sun C Z, Zhao L, Wang F. Stochastic seismic response of a large-span multi-span cable-stayed bridge. *China Earthquake Engineering Journal*, 2014, 36(4): 911~918 (in Chinese))
- 14 康厚军, 苏潇阳, 龚平, 等. 漂浮式独塔斜拉桥竖弯刚度评估新方法. 湖南大学学报(自然科学版), 2017, 44(11): 126~134(Kang H J, Su X Y, Gong P, et al. A new method for vertical bending stiffness evaluation of floating single-tower cable-stayed bridge. *Journal of Hunan University (Natural Sciences Edition)*, 2017, 44(11): 126~134 (in Chinese))
- 15 龚平, 苏潇阳, 蔡向阳, 等. 拉索对斜拉桥竖向频率的影响研究. 振动工程学报, 2018, 31(6): 53~61(Gong P, Su X Y, Cai X Y, et al. The influence of cables on vertical frequency of cable-stayed bridge. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, 31(6): 53~61 (in Chinese))
- 16 苏潇阳, 康厚军, 丛云跃, 等. 不同斜拉索模型对多塔斜拉桥力学性能的影响. 公路工程, 2017, 42(2): 42~46, 66(Su X Y, Kang H J, Cong Y Y, et al. Influence of different cable models on mechanical performance of multi-tower cable-stayed bridge. *Highway Engineering*, 2017, 42(2): 42~46, 66 (in Chinese))

DYNAMIC THEORY FOR EVALUATION ON VERTICAL BENDING STIFFNESS OF MULTI-TOWER CABLE-STAYED BRIDGE WITH HYBRID SYSTEM *

Su Xiaoyang Kang Houjun[†] Cong Yunyue

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha, 410082)

Abstract Based on the configuration and mechanical characteristics of the cable-stayed bridge, a dynamic multi-beam dynamic model with discrete springs is proposed for evaluating the in-plane vertical bending stiffness of the multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system. First, based on the relevant achievements of our group, the treatment methods of cable-stayed bridges with different systems by transfer matrix method are introduced. Then, by using the continuity and boundary conditions, the basic theory for the evaluation on the vertical bending stiffness of the multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system is established. Finally, taking the Chishi bridge as an example, the corresponding finite element model is established and the frequencies calculated by the method in this paper are compared with those by the finite element method and field measurement. The results show that the method in this paper is feasible and can be used for the evaluation of the vertical bending stiffness in the multi-tower cable-stayed bridge with hybrid system.

Key words hybrid system, cable-stayed bridge, vertical bending stiffness, transfer matrix method, eigenvalue

Received 28 August 2019, revised 25 October 2019.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China (11972151, 11872176)

[†] Corresponding author E-mail: khjun@hnu.edu.cn