

# 面向非线性轨道车辆动力学的广义多步显式积分算法应用\*

杨超<sup>†</sup> 李强 王曦

(北京交通大学 机械与电子控制工程学院, 北京 100044)

**摘要** 为了改善计算效率,在非线形轨道车辆动力学仿真中引入广义多步显式积分算法.针对非线性系统将算法改造为增量格式.列车动力学模型由轨道车辆模型和钩缓装置模型等组成.采用增量格式的广义多步显式积分算法分别研究列车连挂冲击和列车中低速碰撞问题.研究表明:广义多步显式积分算法在测试的算例中具有良好的稳定性,其计算速度约为龙格库塔法的 3.8 倍.干摩擦式钩缓装置模型在过渡状态存在车钩锁死现象.由于车钩锁死列车撞击过程中会出现车体加速度的高频振荡.广义多步显式积分算法可以适用于非线性轨道车辆动力学仿真.

**关键词** 非线性, 算法, 增量式, 轨道车辆, 锁死

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-028

## 引言

随着轨道车辆动力学和计算机技术的快速发展,轨道车辆动态仿真逐渐趋于大型化和复杂化,计算工作量呈指数级增长.列车空气动力学和列车碰撞动力学相关的有限元仿真计算通常需要消耗大量的时间.文献[1]中描述单个车辆的碰撞仿真一般需要几天时间才能完成.为了缩短设计周期,只能使用大型工作站或超算中心完成计算工作.

相对于采用升级硬件的方法,另一种改善软件的方法也可以提高计算效率并减少计算消耗<sup>[2]</sup>,如采用简化的多体动力学方法和新数值积分算法.文献[3,4]建立了二维的轨道车辆模型研究车辆的耐撞性和动态行为.Zhou 采用 Simpack 软件建立了三维的列车碰撞动力学模型研究列车在碰撞情况下的爬车和脱轨问题<sup>[5]</sup>.为了改善算法的计算效率和计算精度,文献[6]中提出了广义多步显式积分算法.该算法包含了当前主流的高效显式积分算法,在非线形振动系统中具有很好的稳定性,算法精度由选择的步数确定,计算速度极快.

目前非线性轨道车辆动力学中,数值算法的选择很少,常用的有龙格库塔法和翟方法<sup>[7]</sup>.本文引入广义多步显式积分算法,将其与轨道车辆动力学结合,针对非线性问题进行算法的适应性改造,提

高计算效率并拓展算法的应用范围.

## 1 增量式广义多步显式算法

针对非线性振动问题,作者在文献[6]中提出了广义多步显式算法(GMEM),该算法与 Adams 线性多步法具有相似的结构和特性.广义多步显式算法在多自由度振动系统中的运动方程、速度和位移公式分别是

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{p}_n - \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n)] \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \sum_{i=1}^s \alpha_i \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-i} \Delta t \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \sum_{i=1}^s \eta_i \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-i} \Delta t^2 \quad (3)$$

式中, $\ddot{\mathbf{u}}$ 、 $\dot{\mathbf{u}}$ 和 $\mathbf{u}$ 分别是加速度向量、速度向量和位移向量, $\mathbf{M}$ 是惯性矩阵, $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{f}$ 是外力和内力向量. $\alpha_i$ 和 $\eta_i$ 为系数, $\sum_{i=1}^s \alpha_i = 1$ , $\eta_i = \sum_{j=i}^s \alpha_j$ , $s$ 为多步算法的步数, $s=1, 2, 3, \dots$ .

广义多步显式算法中较为常用的是单步法 GMEM1 和两步法 GMEM2,分别具有一阶和二阶精度.GMEM1 和 GMEM2 分别等价于蛙跳式中心差分法和无算法阻尼的翟方法,加权系数见表 1.

为了进行非线性轨道车辆动力学的数值模拟计算,需要将 GMEM 改为适用于非线性系统的增

2019-06-26 收到第 1 稿,2020-03-16 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11790281),国家重点研发计划(2016YFB1200403,2016YFB1200505)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: ychao@bjtu.edu.cn

表1 算法的加权系数

Table 1 Weighted coefficient for the method

Symbol	s	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\eta_1$	$\eta_2$
GMEM1	1	1	-	1	-
GMEM2	2	3/2	-1/2	1	-1/2

量格式.增量格式就是将非线性问题切分为有限数量的分段,每个分段足够小,然后对每一段计算加速度、速度和位移的增量.首先将式(2)和(3)改写为增量格式,表达式如下

$$\Delta \dot{\mathbf{u}}_n = \sum_{i=1}^s \alpha_i \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-i} \Delta t \quad (4)$$

$$\Delta \mathbf{u}_n = \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \sum_{i=1}^s \eta_i \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-i} \Delta t^2 \quad (5)$$

$t_n$ 时刻的速度和位移分别加上速度及位移增量,可以得到 $t_{n+1}$ 时刻的速度和位移

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta \dot{\mathbf{u}}_n \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n \end{cases} \quad (6)$$

$t_{n+1}$ 时刻的运动方程可以写为

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1})] \quad (7)$$

用式(7)减去式(3),运动方程的增量格式可以写为

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{M}^{-1} [\Delta \mathbf{p}_n - \Delta \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n)] \quad (8)$$

式中,  $\Delta \ddot{\mathbf{u}}_n = \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} - \ddot{\mathbf{u}}_n$ ,  $\Delta \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n$ ,  $\Delta \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) = \mathbf{f}_{n+1}(\mathbf{u}_{n+1}, \dot{\mathbf{u}}_{n+1}) - \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n)$ .

增量式广义多步显式算法由式(4),(5)和(8)组成.它继承了广义多步显式算法的精度和稳定性等特性.该算法是条件稳定的,增量式GMEM1和GMEM2分别具有一阶和二阶精度,在相同条件下其计算速度比Newmark算法快.该算法的缺点是在线性系统中时间步长比隐式算法小.

增量式广义多步显式算法适用于非线性振动问题.该算法在非线性和振动系统中的执行过程如图1所示.下文将阐述该算法在非线性和轨道车辆动力学仿真中的应用.

## 2 列车动力学模型

列车为4节编组,包含两节头车和两节中间车,如图2所示.首先建立二维的列车动力学模型,该模型由几个相同的轨道车辆动力学模型和车钩模型等组成.如图3所示,轨道车辆动力学模型由车体、构架和轮对7个刚体构成.车体和构架都具有3个平面内的平动和转动自由度,轮对具有平面内的2个平动自由度.列车内部相邻车辆之间用干摩擦式钩缓装置连接.

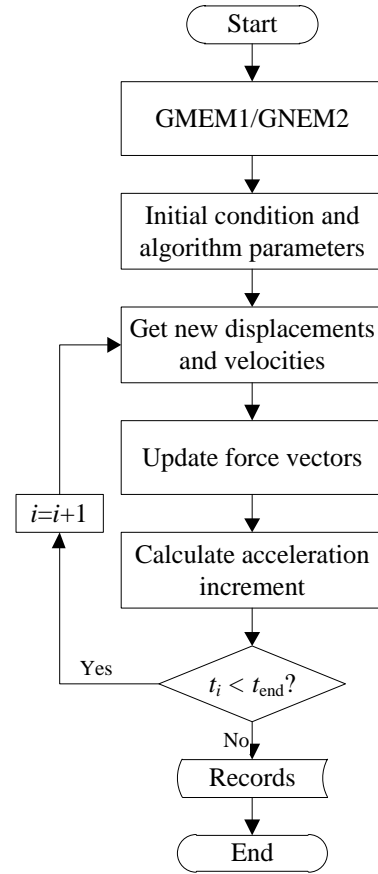


图1 算法执行过程

Fig. 1 Implementation process of the method

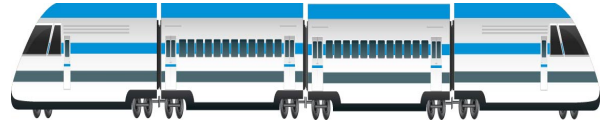


图2 列车模型

Fig. 2 Train model

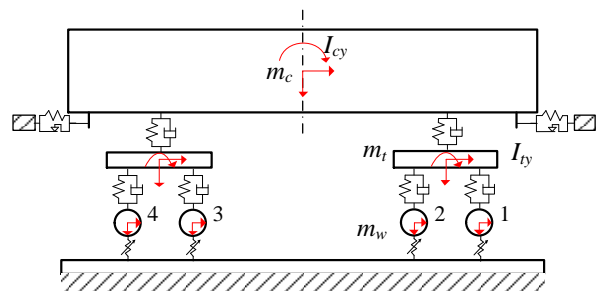


图3 轨道车辆模型

Fig. 3 Rail vehicle model

列车动力学模型的运动方程如下:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{f}_n(\mathbf{u}_n, \dot{\mathbf{u}}_n) = \mathbf{p}_n \quad (9)$$

式中,惯性矩阵 $\mathbf{M}$ 是对角分块矩阵,每个分块子矩阵见式(9).分块子矩阵对应的位移向量见式(10).

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_c, m_t, m_t, m_w, m_w, m_w, m_w, I_{cy}, I_{ty}, I_{ty}, m_c, m_t, m_t, m_w, m_w, m_w, m_w) \quad (10)$$

式中, $m$ 为质量;下标 $c, t$ 和 $w$ 分别表示车体、构架

和轮对; $I_{c_y}$ 是车体点头转动惯量; $I_{b_y}$ 是构架点头转动惯量。

$$\mathbf{u} = [z_c, z_{t1}, z_{t2}, z_{w1}, z_{w2}, z_{w3}, z_{w4}, \beta_c, \beta_{t1}, \beta_{t2}, x_c, x_{t1}, x_{t2}, x_{w1}, x_{w2}, x_{w3}, x_{w4}]^T \quad (11)$$

式中, $x$ 、 $z$ 和 $\beta$ 分别是纵向位移、垂向位移和点头角位移。

车辆模型参数见文献[8]。轮轨垂向接触力计算基于赫兹接触理论。干摩擦式钩缓装置不仅具有迟滞特性,而且存在车钩力过渡不平滑问题。本文采用基于正则化速度的迟滞车钩力模型<sup>[9]</sup>,车钩力公式如下

$$F_d = \begin{cases} f_s + f_{hys} \text{sign}(\delta_d v_d) & |v_d| \geq v_e \\ f_s + \frac{|v_d|}{v_e} f_{hys} \text{sign}(\delta_d v_d) & |v_d| < v_e \\ 0 & |F_d| > f_{max} \end{cases} \quad (12)$$

式中, $f_s$ 是无阻尼情况下的车钩力, $f_s = \frac{1}{2}(f_i(\delta_d, v_d) + f_{ul}(\delta_d, v_d))$ ;  $f_{hys}$ 代表车钩阻尼力, $f_{hys} = \frac{1}{2}(f_i(\delta_d, v_d) - f_{ul}(\delta_d, v_d))$ ;  $\delta_d$ 和 $v_d$ 分别是车钩的轴向相对位移和相对速度; $v_e$ 是用于判断车钩过渡状态的正则化速度; $f_i$ 和 $f_{ul}$ 分别是车钩的加载函数和卸载函数; $f_{max}$ 是车钩的剪断力。

一种具有稳定压缩力平台的车钩力加载和卸载函数为

$$f_i = \begin{cases} f_0 \tanh(a_l \delta_d) & |\delta_d| \leq \delta_c \\ k_r(\delta_d + \delta_c) - f_0 & |\delta_d| > \delta_c \end{cases} \quad (13)$$

$$f_{ul} = k_{ul} \delta_d \quad (14)$$

式中, $f_0$ 是稳态压缩力; $a_l$ 是放大系数; $k_r$ 是刚性冲击刚度; $\delta_c$ 是钩缓装置的总行程; $k_{ul}$ 是车钩卸载曲线的刚度。

头车和中间车的钩缓装置模型参数见表2和表3。

表2 头车钩缓装置模型参数

Table 2 Parameters of the leading coupler model

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
$v_e$	0.001	m/s	$k_r$	$1 \times 10^8$	N/m
$\delta_c$	0.573	m	$a_l$	50	$\text{m}^{-1}$
$f_0$	$1 \times 10^6$	N	$k_{ul}$	$1 \times 10^4$	N/m

### 3 列车动力学应用

在列车纵向动力学和列车碰撞动力学中,列车之间的低速连挂冲击问题和中低速碰撞问题通常

表3 中间钩缓装置模型参数

Table 3 Parameters of the middle coupler model

Symbol	Value	Unit	Symbol	Value	Unit
$v_e$	0.001	m/s	$k_r$	$1 \times 10^8$	N/m
$\delta_c$	0.473	m	$a_l$	20	$\text{m}^{-1}$
$f_0$	$1 \times 10^6$	N	$k_{ul}$	$1 \times 10^4$	N/m

涉及到复杂的非线性因素,如钩缓装置的迟滞现象和摩擦力的平滑过渡等。本节将用两个算例展示广义多步显式积分算法在列车连挂冲击和低速碰撞方面的应用,默认算法为GMEM2。

#### 3.1 列车连挂冲击

运动列车A以3km/h的速度与静止并制动的另一列同型列车B进行连挂,要求车钩缓冲装置能够吸收冲击动能。缓冲器的最大压缩力为500kN。算法时间积分步长0.2ms,仿真时长1s。

列车连挂界面和列车A离连挂界面最近的中间车钩的车钩轴向力随位移变化情况见图4。车钩压缩情况下的车钩力为负值,头车车钩在压缩过程中出现两次明显的卸载情况,中间车钩出现一次卸载。车钩力在由加载转卸载的过渡过程中几乎是直线跳水,没有良好的保持能力。车钩过渡状态的卸载刚度接近无穷大。大量文献将这种现象称为车钩锁死,无穷大的卸载刚度称为锁死刚度<sup>[10]</sup>。

#### 3.2 列车低速碰撞

直线轨道上,两列同型列车发生低速正面碰撞,主动列车A以10.8km/h的速度撞击静止无制动的被动列车P。

采用广义多步显式积分算法对列车碰撞系统进行时间积分,时间步长为0.2ms。主动列车A和被动列车P的速度随时间变化曲线如图5所示。主动列车速度减小而被动列车速度增大,列车碰撞结束阶段两列车的速度趋于相同,速度曲线关于一条水平直线对称。碰撞界面头车的车体加速度随时间变化曲线见图6。碰撞结束阶段,在车体速度趋于相同的过程中,头车的加速度出现了高频往复振荡,这是由车钩锁死刚度造成的。

时间算法的计算效率在列车动力学中尤为重要。用不同编组的列车正面碰撞算例对比龙格库塔法(RK4)和两步广义多步显式积分算法(GMEM2)的计算效率,仿真结束时间设置为2s。表4给出了4种编组情况下列车碰撞的计算耗时,龙格库塔法的计算消耗时间约为GMEM2的3.8倍,因此后者计算效率高于前者。

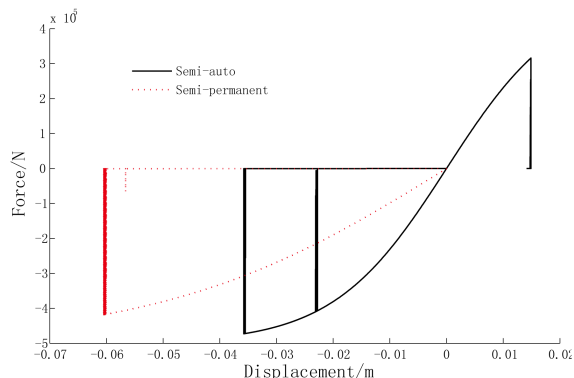


图4 车钩力-位移响应

Fig.4 Response of coupler forces versus displacements

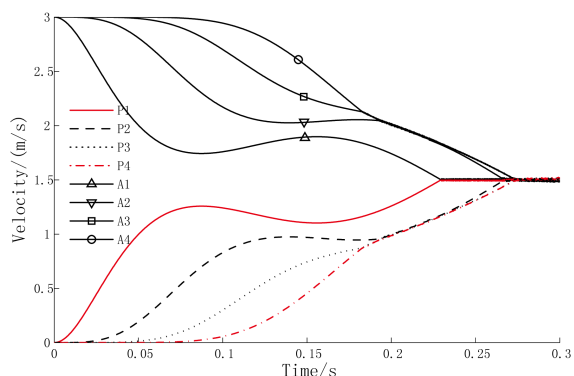


图5 车体速度时间历程

Fig. 5 Velocity time history of carriages

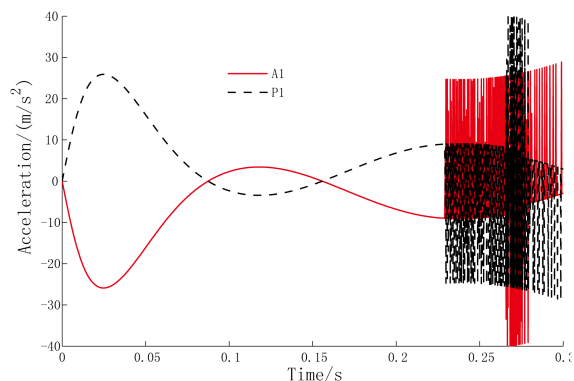


图6 头车的加速度时间历程

Fig. 6 Acceleration time history of leading vehicles

表4 算法消耗时间对比

Table 4 Comparison of consumed time of algorithms

Numbers	1	2	4	8
GMEM2/s	3.06	6.60	15.95	42.63
RK4/s	11.71	25.05	61.28	160.64
Ratio	3.83	3.80	3.84	3.77

## 4 小结

为了改善非线性轨道车辆动力学的仿真计算效率,文中引入广义多步显式积分算法并对算法进

行非线性问题的适应性改造.建立列车动力学模型,通过列车连挂冲击和列车中低速碰撞算例说明广义多步显式积分算法可以适用于非线性轨道车辆动力学仿真,并且算法具有良好的稳定性,其计算速度约为龙格库塔法的3.8倍.常用的干摩擦式钩缓装置模型在车钩状态切换的过渡过程中会出现车钩锁死,可以用于描述钩缓装置在相对速度为零时的卡死行为.然而,车钩锁死现象会造成车体加速度的高频振荡.

## 参考文献

- Kirkpatrick S W, Schroeder M, Simons J W. Evaluation of passenger rail vehicle crashworthiness. *International Journal of Crashworthiness*, 2001, 6(1): 95~106
- 都琳, 侯平兰. Duffing 方程的辛精细积分方法研究. *动力学与控制学报*, 2017, 15(1): 1~5 (Du L, Hou P L. Symplectic precise integration method for duffing equation. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(1): 1~5 (in Chinese))
- Milho J F, Ambrosio J A C, Pereira M F O S. Validated multibody model for train crash analysis. *International Journal of Crashworthiness*, 2003, 8(4): 339~352
- Milho J F, Ambrosio J A C, Pereira M F O S. A multibody methodology for the design of anti-climber devices for train crashworthiness simulation. *International Journal of Crashworthiness*, 2002, 7(1): 7~20
- Zhou H C, Wang W B, Hecht M. Three-dimensional over-ride analysis of crashed railway multiple units. *Vehicle System Dynamics*, 2012, 50(4): 663~674
- 杨超, 朱涛, 杨冰, 等. 结构动力学中的广义多步显式积分算法. *西南交通大学学报*, 2017, 52(1): 133~140 (Yang C, Zhu T, Yang B, et al. Generalized multi-step explicit integration method in structural dynamics. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2017, 52(1): 133~140 (in Chinese))
- Zhai W M. Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering. *International Journal for Numerical in Engineering*, 1996, 39: 4199~4214
- Chao Yang, Qiang Li, Shoune Xiao, et al. On the overriding issue of train front end collision in rail vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics*, 2018, 56(4): 506~528
- Zhang Z, Li G, Chu G, et al. Compressed stability analysis of the coupler and buffer system of heavy-haul locomotives. *Vehicle System Dynamics*, 2015, 53(6): 833~855
- Wu Q, Cole C, Luo S, et al. A review of dynamics modelling of friction draft gear. *Vehicle System Dynamics*, 2014, 52(6): 733~758

# APPLICATION OF A GENERALIZED MULTI-STEP EXPLICIT INTEGRATION METHOD TO NONLINEAR RAIL VEHICLE DYNAMICS \*

Yang Chao<sup>†</sup> Li Qiang Wang Xi

(School of Mechanical, Electronic and Control Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract** A generalized multi-step explicit integration method (GMEM) was used to improve the computational efficiency for nonlinear rail vehicle dynamics. The increment formulation of the explicit integration algorithm was developed for nonlinear systems. The train dynamic model consisting of the vehicle and couplers, etc., was established. Both the coupling impacts and the medium- and low-speed collisions of the vehicles were studied by using the GMEM. The results indicated that the GMEM is endowed with good stability in the testing examples. The computational speed of the GMEM is approximately 3.8 times of that of the Runge-Kutta method. The locking phenomenon occurs in the transition stage for the dry friction coupler model. The carbody acceleration oscillates with high frequencies due to the locked state in the train impact. Therefore, the GMEM is appropriate for the simulation of the nonlinear rail vehicle dynamics.

**Key words** nonlinear, algorithm, incremental form, rail vehicle, locking

---

Received 26 June 2019, revised 16 March 2020.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11790281) and the National Key Research and Development Program of China (2016YFB1200403, 2016YFB1200505)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: ychao@bjtu.edu.cn