

# 单自由度齿轮系统的混沌控制\*

张文 谢建华 李高磊 乐源†

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要** 考虑一类单自由度齿轮动力学系统,其动力学方程表示为一个分段线性二阶微分方程.首先利用变步长龙格-库塔法求解其动力学响应,得到分岔图、相图和 Lyapunov 指数图;其次采用打靶法得到嵌入混沌吸引子中的不稳定周期 1、2、4 和 6 轨道;最后基于 OGY 方法把系统的混沌运动控制到上述轨道.研究表明 OGY 方法成功地实现了对单自由度齿轮系统的混沌控制,并讨论了噪声对混沌控制效果的影响.

**关键词** 齿轮系统, 打靶法, OGY 方法, 混沌控制

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-085

## 引言

齿轮机构广泛应用于机械系统中,存在丰富的动力学现象<sup>[1,2]</sup>,是机械颤振和噪声的重要来源. Kahraman 等<sup>[1]</sup>建立了单自由度齿轮动力学模型,采用数值仿真和谐波平衡法获得了系统的周期响应、次谐波响应和混沌响应.文献[3]建立了三自由度齿轮动力学模型,提出了稳态解的分类准则,确定了混沌、拟周期和次谐波稳态解的存在条件.孙智民等<sup>[4]</sup>建立了星形齿轮传动的非线性动力学模型,通过数值解法进行了求解.研究表明,随着激振频率或者阻尼比变化时,可以发现不同的分岔类型和通向混沌的途径.文献[5-6]采用胞映射算法对齿轮系统进行了全局动力学特性研究,得到了系统的吸引域和吸引子等全局特性.文献[7]采用非光滑系统 Melnikov 理论研究了含间隙齿轮系统异宿轨道全局分岔条件,并讨论了周期解的稳定性.

1990 年美国马里兰州大学 Ott, Grebogi 和 Yorke<sup>[8]</sup>提出 OGY 方法,对系统的参数连续施加微小扰动,将嵌入混沌吸引子内部的不稳定周期轨道稳定化,从而可以实现混沌控制.自从 OGY 方法出现以来,在许多领域得到应用. Dressie 等<sup>[9]</sup>利用延时坐标技术,从时间序列中重构吸引子情形下的 OGY 控制方法. Ogawa<sup>[10]</sup>给出了利用参数的微小变化来稳定鞍型周期  $n$  轨道的 OGY 控制理论.文献[11]采用改进的 OGY 方法控制非线性摆,利用最

近回归点对法确定嵌入混沌吸引子中的不稳定周期轨道,然后采用半连续法将不稳定周期轨道稳定化,并研究了噪音对混沌控制的影响.刘晓宁等<sup>[12]</sup>通过两种途径,采用 OGY 方法,实现了间隙非线性齿轮的混沌控制.文献[13, 14]建立了碰撞系统 Poincaré 映射来分析动力学现象,采用 OGY 方法实现了单自由度单边和双边碰撞系统的混沌控制.

本文考虑一类单自由度齿轮动力学模型,其动力学方程表示为一个分段线性二阶微分方程.通过龙格-库塔法求解其动力学响应,并采用打靶法得到了嵌入混沌吸引子中的不稳定周期 1、2、4 和 6 轨道.采用 OGY 方法把系统的混沌运动控制到上述轨道,并讨论了最大允许扰动的改变对轨道稳定化过程的影响以及噪声对混沌控制效果的影响.

## 1 力学模型及运动微分方程

图 1 为考虑含时变啮合刚度、齿侧间隙和综合误差等因素下的单自由度齿轮模型<sup>[15]</sup>.图中符号意义如下:

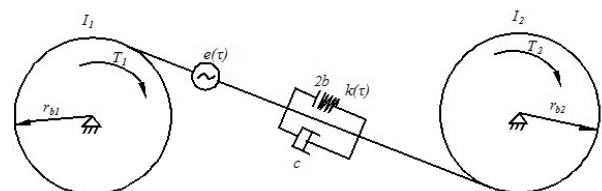


图 1 齿轮机构动力学模型

Fig.1 A dynamic model of gear mechanism

2020-05-05 收到第 1 稿,2020-07-05 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(11672249,11732014)

† 通讯作者 E-mail: leyuan2003@sina.com

$\theta_1, \theta_2$ —主动轮、从动轮的回转角

$I_1, I_2$ —主动轮、从动轮的转动惯量

$r_{b1}, r_{b2}$ —主动轮、从动轮的基圆半径

$c$ —齿轮啮合阻尼系数

$e(\tau)$ —齿轮机构啮合综合误差

$k(\tau)$ —齿轮副的周期时变的啮合刚度

$T_1, T_2$ —作用在主动轮、从动轮上的转矩

$m_1, m_2$ —主动轮、从动轮的质量

系统的运动方程表示为:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + c(r_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(\tau))r_{b1} + \\ k(\tau)f(r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 - e(\tau))r_{b1} = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - c(r_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(\tau))r_{b2} - \\ k(\tau)f(r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 - e(\tau))r_{b2} = -T_2 \end{cases} \quad (1)$$

若令

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, F(\tau) = \frac{m}{m_1} F_1 + \frac{m}{m_2} F_2 - m\ddot{e}(\tau),$$

$$F_m = \frac{m}{m_1} F_1 + \frac{m}{m_2} F_2, F_h(\tau) = -m\ddot{e}(\tau)$$

式中,  $m$  为轮副的等效质量,  $F_m$  为等效外部激励,  $F_h(\tau)$  为等效内部误差激励, 则有  $F(\tau) = F_m + F_h(\tau)$ . 引入齿轮啮合线的相对位移坐标  $q = r_{b1}\theta_1 - r_{b2}\theta_2 - e(\tau)$ , 将上述方程转化为:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + k(\tau)f(q) = F(\tau) \quad (2)$$

设齿轮副的齿侧间隙为  $2b$ , 间隙分段线性函数为:

$$f(q) = \begin{cases} q - b & q > b \\ 0 & -b \leq q \leq b \\ q + b & q < -b \end{cases} \quad (3)$$

将(2)式进行无量纲化处理: 取  $b$  为坐标尺度,  $x(\tau) = q(\tau)/b$ ,  $\omega_n = \sqrt{k_0/m}$ ,  $t = \tau\omega_n$ ,  $\zeta = c/(2m\omega_n)$ ,  $\bar{k}(t) = k(t)/(m\omega_n^2)$ ,  $\omega_h = \omega_e/\omega_n$ , 其中  $k_0$  平均啮合刚度,  $\omega_e$  为齿轮副的啮合圆周率,  $\bar{F}_m = F_m/(m\omega_n^2)$ ,  $\bar{F}_h(t) = F_h(t)/(m\omega_n^2)$ , 得:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \bar{k}(t)f(x) = \bar{F}_m + \bar{F}_h(t) \quad (4)$$

式中间隙分段线性函数为

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ 0 & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & x < -1 \end{cases} \quad (5)$$

若刚度和啮合综合误差均取一阶谐波分量, 则有:

$$\bar{k}(t) = 1 + \bar{k}_1 \cos(\omega_h t + \varphi_h) \quad (6)$$

$$\bar{F}_h(t) = \bar{F}_e \omega_h^2 \cos(\omega_h t + \varphi_h) \quad (7)$$

式中,  $\bar{k}_1 = k_a/k_0$ ,  $\bar{F}_e = e/b$ , 其中  $k_a$  为时变啮合刚度幅值,  $e$  为误差幅值, 取啮合相位角  $\varphi_h = 0$ .

## 2 OGY 控制原理

设二维动力系统的映射方程为:

$$X_{n+1} = F(X_n, p) \quad (8)$$

式中,  $X_n \in R^2$ ,  $p$  为系统控制参数, 且在微小的范围内变化,  $p \in (p_0 - \delta p_{\max}, p_0 + \delta p_{\max})$ ,  $\delta p_{\max}$  为最大扰动幅值.  $X_F = F(X_F, p)$  表示混沌吸引子上的不稳定不动点. 控制思想是对迭代系统进行监控, 直到接近期望的不动点, 然后对  $p$  进行微小的改变, 使下一个状态  $X_{n+1}$  落入不动点的局部稳定流形方向. 在目标周期轨道微小邻域内, 可以将动力系统近似看作线性, 将方程(8)在  $p_0$  处线性近似展开得到:

$$\delta X_{n+1} \cong A \delta X_n + w \delta p_n \quad (9)$$

这里,  $\delta X_n = X_n - X_F$ ,  $A = D_x F(X_F, p_0)$ ,  $\delta p_n = p_n - p_0$ ,  $w = \partial F(X_F, p_0)/\partial p$ , 将矩阵  $A$  进行奇异值分解:

$$A = \lambda_u e_u f_u + \lambda_s e_s f_s \quad (10)$$

其中,  $\lambda_u, \lambda_s$  和  $e_s, e_u$  分别为矩阵  $A$  特征值和特征向量 ( $|\lambda_u| > 1 > |\lambda_s|$ ),  $e_s, e_u$  为不动点的局部稳定和不稳定流形的方向. 设  $f_u, f_s$  为其对应的逆变基矢量, 满足关系  $f_s \cdot e_s = f_u \cdot e_u = 1$ ,  $f_s \cdot e_u = f_u \cdot e_s = 0$ .  $X_{n+1}$  落入不动点的局部稳定流形的条件为,  $f_u \cdot \delta X_{n+1} = 0$ , 生成新的控制参数  $p_n = p_0 + \delta p_n$ .  $\delta p_n$  表示为:

$$\delta p_n = -\frac{\lambda_u}{f_u \cdot w} f_u \cdot \delta X_n \quad (11)$$

当参数  $\delta p_n$  的绝对值小于最大允许扰动  $\delta p_{\max}$  时才施加控制, 否则,  $\delta p_n = 0$ .

## 3 齿轮系统的 OGY 混沌控制

将微分方程(4)表示为:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t + T, p) = f(x, t, p) \\ x(t_0) = x_0 \quad x \in R^2 \quad p \in R \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $T$  为外激励周期, 当  $p = p_0$  时, 系统出现混沌运动. 设(12)式的解为  $\phi_t(x_0, t_0, p)$ , 将连续系统离散化, 定义 Poincaré 映射:

$$F_N(x, p) = \phi_{t_0+T}(x, t_0, p) \quad (13)$$

设嵌入混沌吸引子内部的不稳定周期轨道为  $\phi_t(x^*, t_0, p_0)$ , 满足  $\phi_t(x^*, t_0, p_0) = \phi_{t+T}(x^*, t_0, p_0)$ ,  $x^*$  为周期轨道上的任意点. 可将系统不稳定周期轨道表示为 Poincaré 映射上的不动点:

$$x_F = F_N(x_F, p_0) \quad (14)$$

定义  $\Phi_t(x_0, t_0, p_0) = D_{x_0} \phi_t(x_0, t_0, p_0)$ ,  $\Psi_t(x_0, t_0, p_0) = D_{p_0} \phi_t(x_0, t_0, p_0)$ , 则可以得到以下微分方程<sup>[16]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_i(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = f(\phi_i, p_0) \\ \dot{\Phi}_i(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = D_x f(\phi_i, p_0) \Phi_i(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) \\ \dot{\Psi}_i(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = D_x f(\phi_i, p_0) \Psi_i(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) + D_{p_0} f(\phi_i, p_0) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \phi_{i_0}(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = \mathbf{x}_0 \\ \Phi_{i_0}(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = I \\ \Psi_{i_0}(\mathbf{x}_0, t_0, p_0) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

将上式(15)进行数值积分,分别获得系统的连续时间序列、Jacobi矩阵A和关于参数p敏感度向量w,进而可以由(11)式求出 $\delta p_n$ .

### 4 数值模拟

取参数 $\zeta = 0.06, \bar{F}_e = 0.2, \bar{k}_1 = 0.06, \bar{F}_m = 0.1$ .以激振频率 $\omega_h$ 为变参数,分析系统的动力学现象.

#### 4.1 系统的动力学特性研究

取 $\omega_h \in (0.01, 1.5)$ ,系统的分岔图和最大Lyapunov指数图分别如图2和图3所示.由图2可

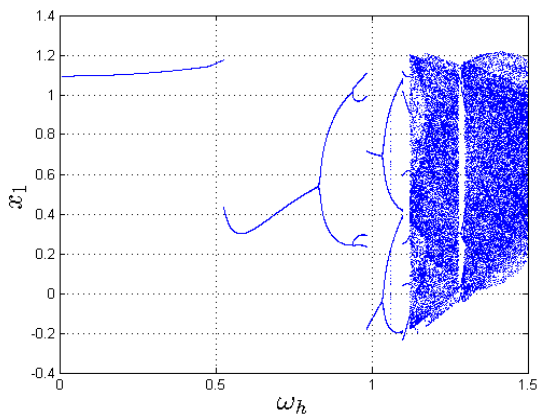


图2 分岔图  
Fig.2 Bifurcation diagram

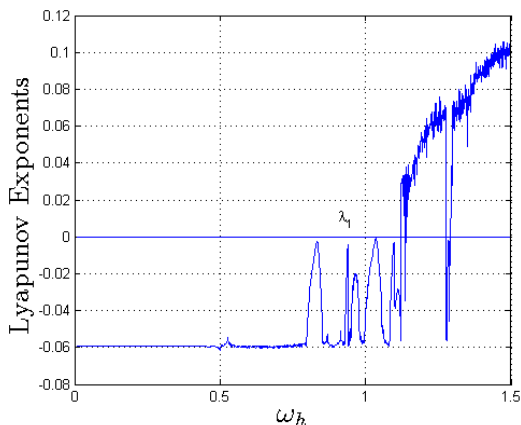
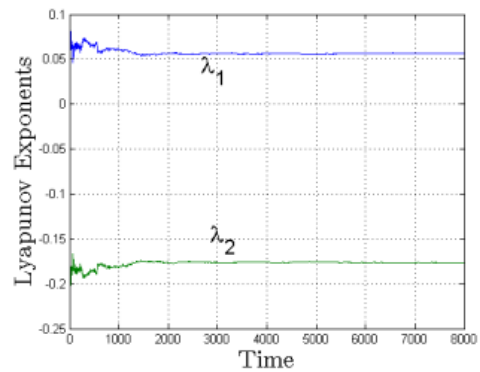


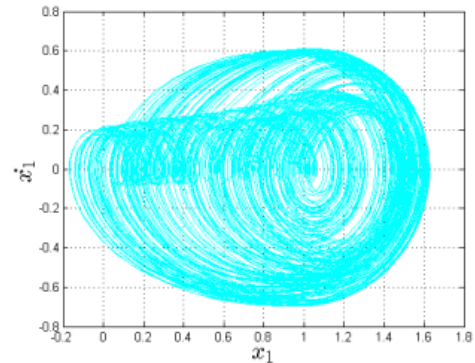
图3 系统随激振频率变化的最大李雅普诺夫指数图  
Fig.3 Largest Lyapunov exponents diagram of the system with varying excitation frequency

知,随着激振频率的增大,系统运动由单周期运动经过倍化分岔进入多周期运动,然后由多周期运动突变为混沌运动.当参数 $\omega_h > 1.1221$ 时,系统出现了混沌运动,但是 $\omega_h \in (1.2775, 1.2923)$ 时,系统出现了周期运动窗口(如图3所示,最大Lyapunov指数在这段区间小于零).

当 $\omega_h = 1.2$ 时,系统的Lyapunov指数如图4(a)所示,其中最大Lyapunov指数 $\lambda_1 = 0.0568 > 0$ ,系统出现了混沌响应.图4(b)为相应的混沌吸引子相图.以下将对此参数下的混沌运动进行控制.



(a)



(b)

图4  $\omega_h = 1.2$ 时系统动力学:(a)李雅普诺夫指数图,(b)相图  
Fig.4 Dynamics of the system:(a)Lyapunov exponents diagram, and (b)phase diagram, when  $\omega_h = 1.2$

#### 4.2 确定不稳定周期轨道(OUPs)

根据混沌理论,在混沌吸引子的闭区域内,存在无数条不稳定的周期轨道<sup>[8]</sup>.采用打靶法得到系统的周期1、周期2、周期4和周期6轨道(如图5所示).

周期1:(0.7224, 0.0487)

周期2:(0.7032, 0.3145), (0.2941, -0.1600)

周期4:(0.4165, 0.3212), (0.5976, -0.1080), (1.1417, 0.2671), (-0.0414, -0.1475)

周期6: (0.7769, -0.0612), (0.8568, 0.1372),  
 (0.4062, -0.0589), (1.1859, 0.2924),  
 (-0.1239, -0.1662), (0.2611, 0.3112)

这些周期轨道的稳定性可以由其 Floquet 乘子判别, 分别为

$$\lambda_1 = (-1.9433, -0.2745)$$

$$\lambda_2 = (-1.9050, -0.1494)$$

$$\lambda_4 = (-4.8783, -0.0166)$$

$$\lambda_6 = (-16.9187, -0.0014)$$

由于4个周期轨道均有一个模大于1的 Floquet 乘子, 所以轨道都是不稳定的。

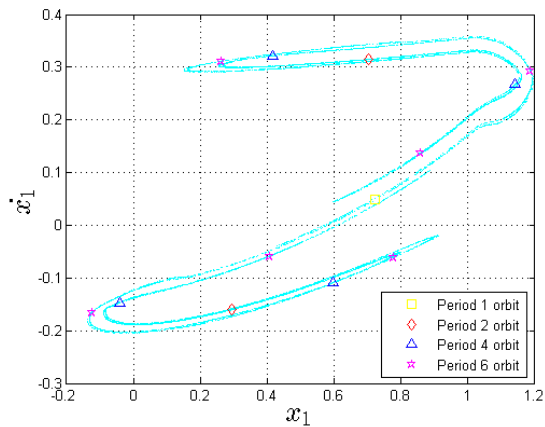


图5 嵌入混沌吸引子中的不稳定周期轨道

Fig.5 Unstable periodic orbits embedded in chaotic attractors

### 4.3 周期轨道的稳定化

现基于上述不稳定周期轨道, 以  $\bar{F}_m$  作为控制参数, 运用 OGY 方法进行混沌控制, 每 1000 次迭代控制一个不同的周期轨道, 顺序如下: 1、2、4 和 6, 分别取最大允许扰动  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.1 \bar{F}_m$  和  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.01 \bar{F}_m$ , 周期轨道稳定化的控制图如图 6 和图 7 所示. 图 6 说明了 OGY 方法能成功把混沌运动控制到

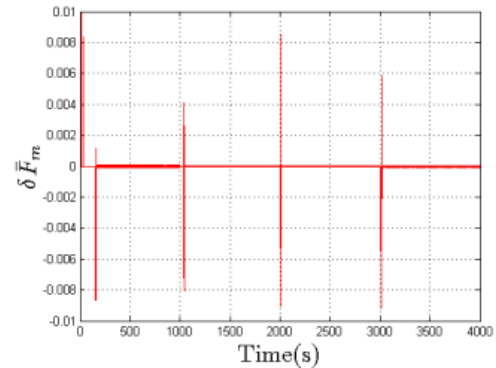
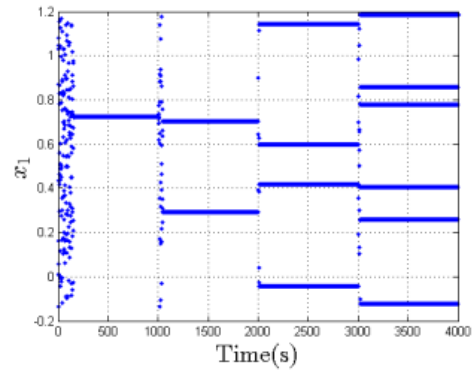


图6  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.1 \bar{F}_m$  时的控制效果: (a) 系统响应图, (b) 控制扰动

Fig.6 The effect of controlling when  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.1 \bar{F}_m$ :

(a) System response diagram, (b) control disturbance

不同的周期轨道上. 图 8 给出了周期轨道稳定化过程的时间历程图, 由图可知周期 1 和周期 2 轨道分别需要约 160 和约 50 个周期进入稳定状态, 而周期 4 和周期 6 能在较短周期内进入稳态. 需要注意的是, 首先, 在每一步控制过程中,  $\delta \bar{F}_m \neq 0$ , 即有一个连续扰动 (如图 9 表示控制扰动局部放大图, 对应图 6(b) 中的周期 6 轨道稳定化过程). 这是由于数值计算得到的目标轨道、Jacobi 矩阵和敏感度向

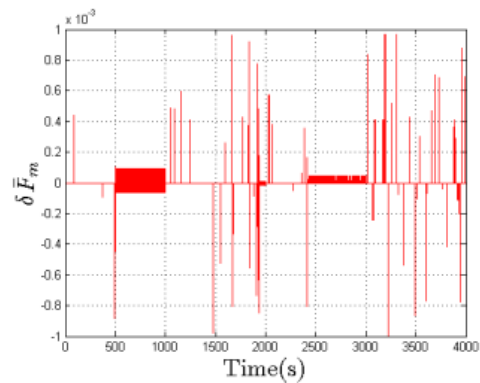
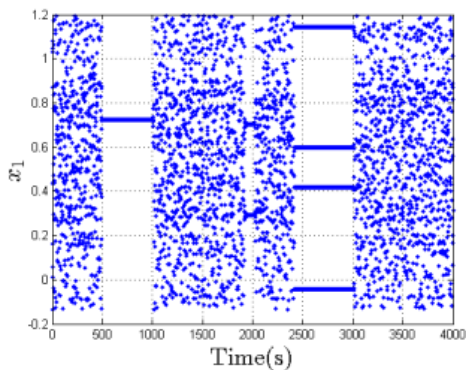


图7  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.01 \bar{F}_m$  时的控制效果: (a) 系统响应图, (b) 控制扰动

Fig.7 The effect of controlling when  $\delta \bar{F}_{m, \max} = 0.01 \bar{F}_m$ : (a) System response diagram, (b) control disturbance

量  $w$  都存在误差,在每次迭代之后,运动偏离了目标轨道,需要微小控制扰动来矫正.其次,减小最大允许扰动,周期轨道稳定化时间变长,如图 7 中周期 1、周期 2 和周期 4 轨道都比图 6 中的稳定化时间

长,并且周期 6 轨道在 1000 次迭代下仍处于混沌状态,所以需要更长的时间才能使其稳定化.当  $\delta \bar{F}_{m,max} = 0.1 \bar{F}_m$  时,图 10 表示系统在连续微小扰动作用下,不稳定周期轨道稳定后的相图.

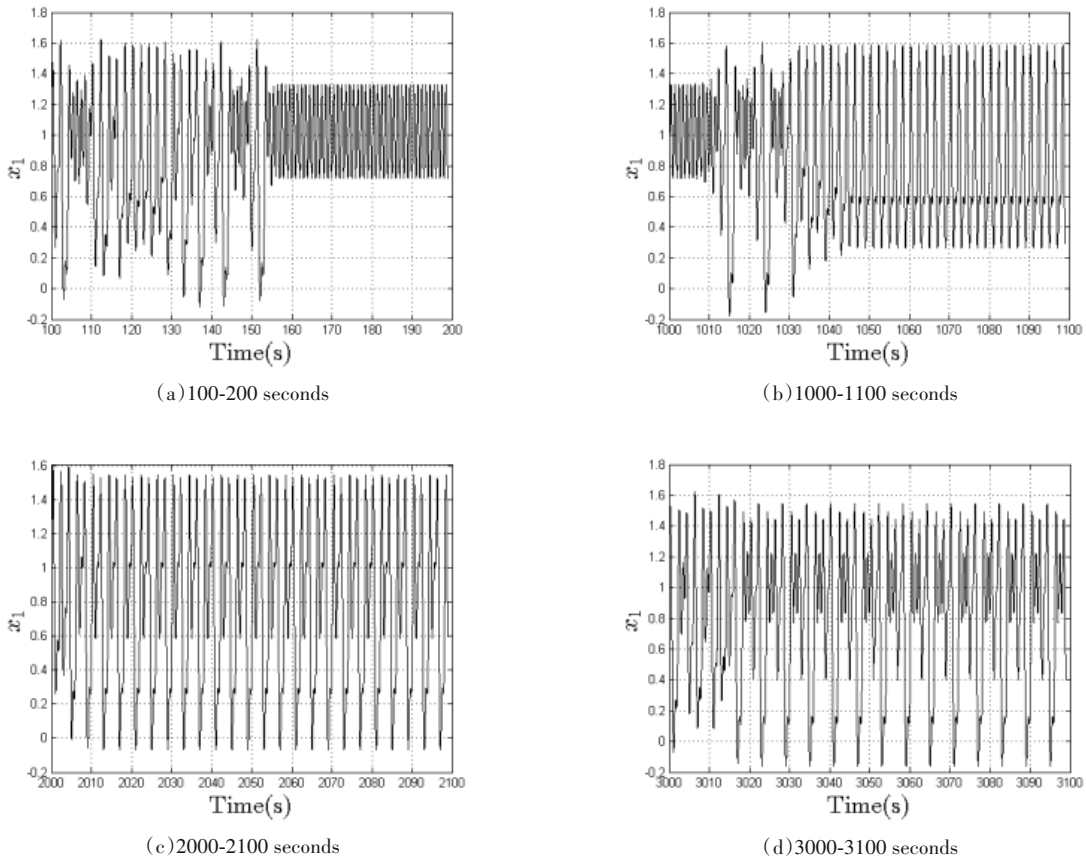


图 8 时间历程图

Fig.8 Time history responses

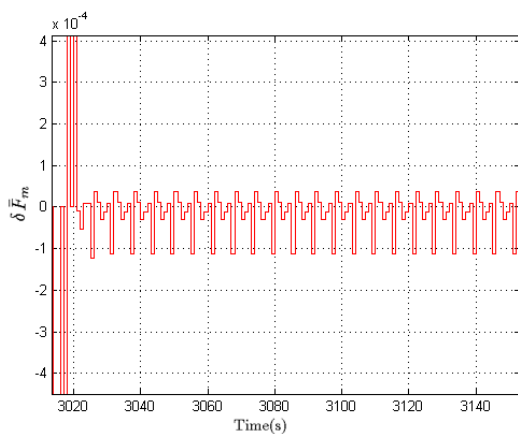


图 9 控制扰动局部放大图

Fig.9 Local enlarged drawing of control disturbance

4.4 噪声对控制效果的影响

齿轮机构在实际工作中,噪声是不可避免.因此,讨论噪声对控制效果的影响是必要的.在(13)

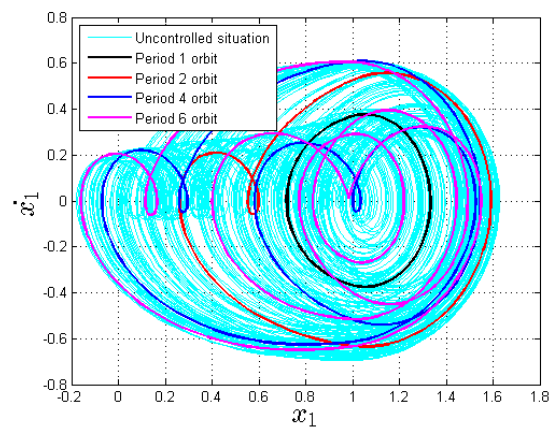


图 10  $\delta \bar{F}_{m,max} = 0.1 \bar{F}_m$ , 不稳定周期轨道稳定后的系统相图

Fig.10 Phase diagrams of the unstable periodic orbits after being stabilized, when  $\delta \bar{F}_{m,max} = 0.1 \bar{F}_m$

式右端加一个随机噪声  $\varepsilon \delta_{nx}, \varepsilon \delta_{ny}, \delta_{nx}, \delta_{ny}$  的期望值为 0、均方差为 1 具有高斯随机分布变量且是相互独

立,其中 $\varepsilon$ 为噪声强度小量.取 $\varepsilon = 0, 0.0023$ 和 $0.0027$ .在10000次迭代下周期1轨道控制情况,如图11(a),(b),(c)所示.图11(b)显示加噪声后,周期轨道猝发间隙,周期性会被随机性打断,一段时

间后又呈现周期性;图11(c)显示若增大噪声强度,出现间隙的频率变大,最终会使系统控制失效,这一结论也适用于其他周期轨道.

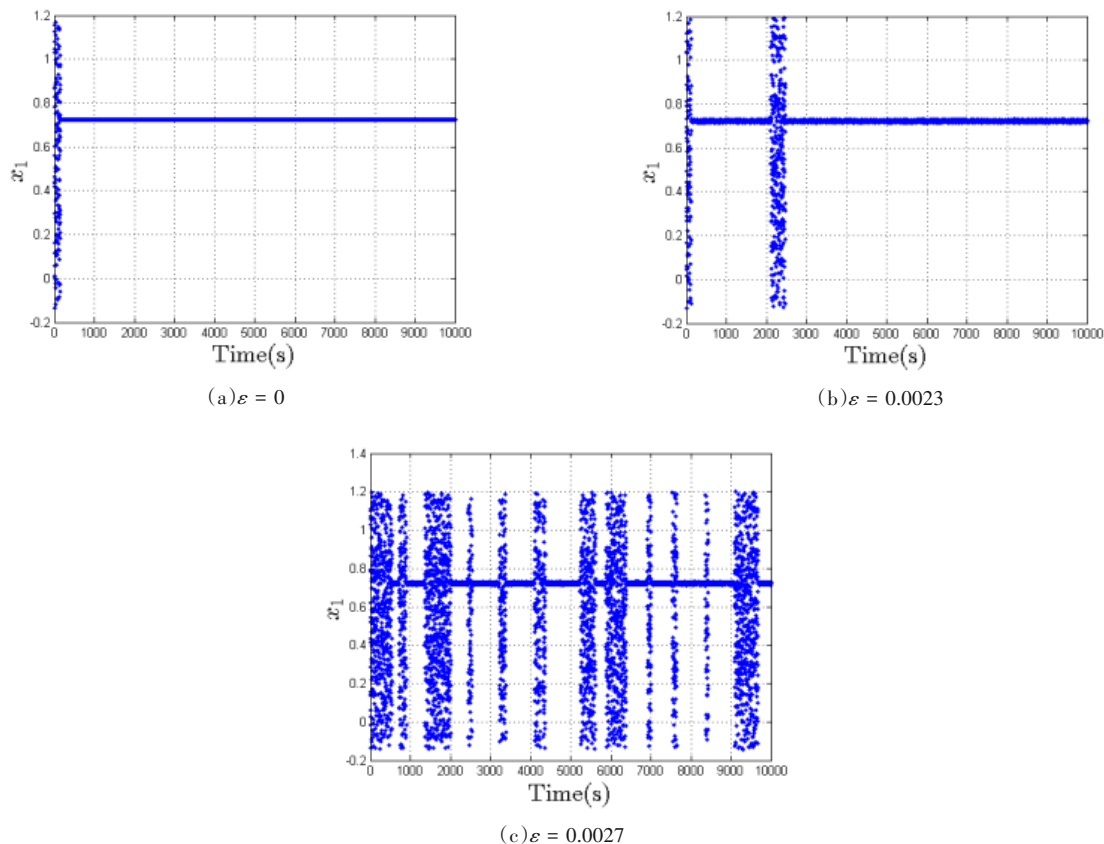


图11  $\delta \bar{F}_{m,max} = 0.1 \bar{F}_m$ , 系统响应图

Fig.11 System response diagram, when  $\delta \bar{F}_{m,max} = 0.1 \bar{F}_m$

## 5 结论

本文考虑一类单自由度齿轮动力学模型,采用变步长龙格-库塔法求解其动力学响应,得到了分岔图、相图和最大Lyapunov指数图.采用打靶法找到了嵌入混沌吸引子中的不稳定周期1,2,4,6轨道,基于Floquet乘子判别其不稳定性.采用OGY方法把齿轮系统的混沌运动分别控制到上述不稳定周期1、2、4和6轨道,并讨论了噪声对混沌控制效果的影响.结果表明:每一个控制过程均需施加扰动,这是因为每次迭代之后的结果偏离了目标轨道,则需要微小扰动进行矫正.另外,若减少最大允许扰动,周期轨道稳定化时间将会相应的变长.最后,若系统在每一步迭代过程中施加一个随机噪声,目标轨道在控制过程中会猝发间隙,若增大噪声强度,出现间隙的频率变大,最终会使控制失效.

## 参 考 文 献

- 1 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49~75
- 2 李润方,王建军. 齿轮系统动力学. 北京: 科学出版社, 1997 (Li R F, Wang J J. Gear system dynamics. Beijing: science press, 1997 (in Chinese))
- 3 Kahraman A, Singh R. Non-linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(3): 469~506
- 4 孙智民,沈允文,王三民,等. 星形齿轮传动系统分岔与混沌的研究. 机械工程学报, 2001, 37(12): 11~15 (Sun Z M, Shen Y W, Wang S M, et al. Study on bifurcation and chaos of star gear transmission system. *Journal of Mechanical Engineering*, 2001, 37(12): 11~15 (in Chinese))

- 5 唐进元,熊兴波,陈思雨.基于图胞映射方法的单自由度非线性齿轮系统全局特性分析.机械工程学报,2011,47(5):59~65(Tang J Y, Xiong X B, Chen S Y. Global characteristics analysis of nonlinear gear system with single degree of freedom based on cell mapping method. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(5): 59~65 (in Chinese))
- 6 周杜,乐源,李高磊,等.两自由度齿轮传动系统全局动力学研究.动力学与控制学报,2019,17(6):514~519(Zhou D, Le Y, Li G L, et al. Study on global dynamics characteristic of two-degree-of-freedom gear transmission system. *Journal of Dynamics and Control*, 2019, 17(6): 514~519(in Chinese))
- 7 张思进,王紫业,文桂林.含间隙齿轮碰振系统的全局动力学分析.动力学与控制学报,2018,16(2):129~135(Zhang S J, Wang J Y, Wen G L. Global dynamic analysis of gear vibration system with clearance. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(2): 129~135 (in Chinese))
- 8 Edward O, Celso G, James Y A. Controlling chaos. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196~1199
- 9 Dressler U, Nitsche G. Controlling chaos using time delay coordinates. *Physical Review Letters*, 1992, 68(1):1
- 10 Ogawa T, Endo T. Stabilization of the saddle-type periodic points in phase-locked loop equation by the OGY-control method. *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, 1995, 78(7): 41~48
- 11 Pereira-Pinto F H I, Ferreira A M, Savi M A. Chaos control in a nonlinear pendulum using a semi-continuous method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(3): 653~668
- 12 刘晓宁,沈允文,王三民,等.基于OGY方法的间隙非线性齿轮系统混沌控制.机械工程学报,2005,41(11):26~31(Liu X N, Shen Y W, Wang S M, et al. Chaos control of nonlinear gear system based on OGY method. *Journal of Mechanical Engineering*, 2005, 41(11): 26~31 (in Chinese))
- 13 王子俊.利用OGY方法控制单自由度碰撞振动系统的混沌行为[硕士学位论文].成都:西南交通大学,2013(Wang Z J. Control of chaotic behavior of single degree of freedom collision vibration system by OGY method [Master Thesis]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2013 (in Chinese))
- 14 吕小红,朱喜锋,罗冠炜.含双侧约束碰撞振动系统的OGY混沌控制.机械科学与技术,2016,35(4):531~534(Lu X H, Zhu X F, Luo G W. Chaos control of OGY with two-sided constrained collision vibration system. *Mechanical Science and Technology*, 2016, 35(4): 531~534 (in Chinese))
- 15 周杜,乐源.采用Melnikov方法的齿轮传动系统的分岔及混沌分析.重庆理工大学学报(自然科学),2018,32(1):92~99(Zhou D, Le Y. Bifurcation and chaos analysis of gear transmission system using Melnikov method. *Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science)*, 2018, 32(1): 92~99 (in Chinese))
- 16 Thomas S P, Leon O C. Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York: Springer, 1992

## CHAOS CONTROL OF A SINGLE DEGREE OF FREEDOM GEAR SYSTEM \*

Zhang Wen Xie Jianhua Li Gaolei Le Yuan<sup>†</sup>

(School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

**Abstract** A class of single-degree-of-freedom gear dynamic system is considered, and its dynamic equation is expressed as a piecewise linear second-order differential equation. Firstly, the dynamic response is solved by Runge-Kutta method with variable step sizes, and the bifurcation diagram, phase diagram and Lyapunov exponent diagram are obtained. Secondly, the unstable periodic 1, 2, 4 and 6 orbits embedded in chaotic attractors are obtained by shooting method. Finally, the chaotic motion of the system is controlled on to the above orbit based on OGY method. The research shows that the OGY method can successfully control the chaos of the single-degree-of-freedom gear system, and the influence of noise on the chaos control is discussed.

**Key words** gear system, shooting method, OGY method, chaos control

Received 5 May 2020, revised 5 July 2020.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11672249, 11732014)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: leyuan2003@sina.com