

# 弹性预紧约束非线性对结构振动的影响\*

陈金 金栋平†

(南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

**摘要** 针对大型空间可展开结构中存在的关节非线性间隙约束问题,研究弹性预紧约束非线性对结构动态特性的影响.首先,基于轴向拉伸力学模型,构造了轴向拉伸关节三维梁单元.其次,使用 Kelvin-Voigt 接触及 Coulomb 摩擦模型,建立了粘弹性预紧约束下整体结构非线性动力学方程,继而分析了不同预紧约束下关节对结构非线性振动的影响.结果表明,在关节非线性约束下,结构振动传递特性的高频响应增加,低阶振动能量传递到高阶振动上.

**关键词** 弹性预紧, 接触非线性, 非线性振动, 能量传递

DOI: 10.6052/1672-6553-2019-053

## 引言

空间科学和空间应用使得航天器日益趋向大型化和轻量化<sup>[1,2]</sup>.大型空间可展开结构是航天器有效载荷的重要支撑结构,在发射阶段处于折叠状态,入轨后再通过驱动机构实现展开.驱动机构通常含有大量的齿轮等组件,展开后通过拉索等进行结构保持,带来弹性预紧约束下的结构动力学问题.

弹性预紧约束对于大型结构展开动力学具有重要影响,但其对展开后的在轨结构动力学的影响尚不清楚,而采用等效动力学建模方法则不能计入非线性的作用<sup>[3]</sup>.Flores 等对含间隙结构动力学的建模问题进行了深入研究<sup>[4,5]</sup>.李贞靖等对考虑间隙及润滑的平面机构进行了动力学分析<sup>[6]</sup>.胡海岩基于含弹性预紧的单自由度振动系统,揭示了弹性约束非线性使得主共振出现鞍结分岔等新动力学行为<sup>[7]</sup>.Onoda 等建立了弹性预紧关节间隙模型,指出当满足一定强度的振动波经过关节后,关节间隙内摩擦的存在可以抑制结构的振动<sup>[8]</sup>.Nayfeh 等在弹性预紧关节间隙模型的基础上,分析了关节波动传递特性,构造了非线性有限单元<sup>[9]</sup>.然而,上述研究只针对二维弹性预紧间隙建模及其动力学特性分析,无法适用于大型空间结构.

本文建立了三维弹性预紧关节非线性力学模型,研究了弹性预紧约束对结构非线性振动的影响.

## 1 弹性预紧关节力学模型

### 1.1 力学模型

如图 1 所示,研究轴向拉伸下结构的拉伸问题<sup>[8]</sup>,其中右侧柔性构件的末端通过铰柱与左侧连接,铰柱可在左侧间隙滑槽里滑动并能够通过弹簧预紧力进行预紧.

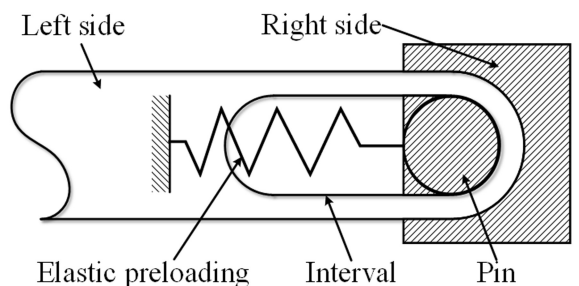


图 1 轴向拉伸预紧物理模型

Fig.1 Axial tensile preloading model

将铰柱视为刚性节点,使用 Kelvin-Voigt 线弹性模型描述右侧柔性体的接触问题<sup>[10]</sup>,即

$$F = k\delta \quad (1)$$

式中, $\delta$ 为弹性变形量, $k$ 为材料弹性刚度.简化力学模型如图 2 所示.

2019-01-19 收到第 1 稿,2019-03-19 收到修改稿.

\* 装备预研基金资助课题(6140210010202)

† 通讯作者 E-mail:jindp@nuaa.edu.cn

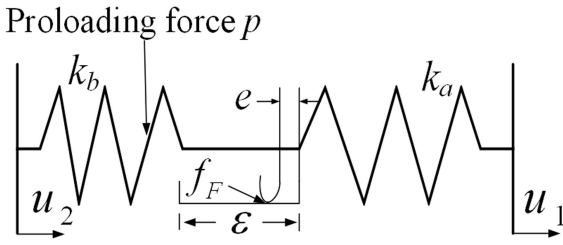


图2 轴向拉伸预紧力学模型

Fig.2 Axial tensile preloading mechanical model

式中,  $k_a$  表示弹性绞刚度,  $k_b$  为预紧弹簧刚度,  $p$  为施加在预紧弹簧上的预紧力,  $f_F$  为摩擦力,  $\varepsilon$  为关节间隙长度,  $e$  为铰柱在间隙内的滑动距离。  $u_1$  表示右侧柔性体上节点轴向位移,  $u_2$  表示左侧柔性体上节点轴向位移,  $s = u_2 - u_1$ 。

将左侧滑槽结构与右侧弹性结构分离进行受力分析。当  $e=0$  时, 左侧结构受到弹性力和滑槽右侧接触力; 当  $\varepsilon > e > 0$  时, 左侧结构仅受到弹性力; 当  $e = \varepsilon$  时, 左侧结构受到弹性力和滑槽左侧接触力。对于关节右侧而言, 其所受关节内传递力为右侧与铰柱固连的柔性端传递的弹性力。因此, 关节间传递弹性力可用右侧柔性端传递的弹性力描述。

根据不同状态下右侧柔性端传递的弹性力, 获得结构关节间传递弹性力为<sup>[9]</sup>

$$q = \begin{cases} k_a s, & \text{if } s \leq \frac{p+f_F}{k_a} \\ \frac{k_a k_b}{k_a+k_b} s + \frac{p+f_F}{k_a+k_b} k_a, & \text{if } \frac{p+f_F}{k_a} \leq s \leq \frac{(k_a+k_b)e+p+f_F}{k_a} \text{ and } e > 0 \\ \frac{k_a k_b}{k_a+k_b} s + \frac{p-f_F}{k_a+k_b} k_a, & \text{if } \frac{p-f_F}{k_a} \leq s \leq \frac{(k_a+k_b)e+p-f_F}{k_a} \text{ and } e < 0 \\ k_a(s-e), & \text{if } s \geq \frac{(k_a+k_b)e+p+f_F}{k_a} \end{cases} \quad (2)$$

由于  $e$  作为关节内铰柱的滑动位移是一个独立自由度, 上述求取关节传递弹性力的过程并没有给出  $e$  的具体表达式。为求出  $e$  和  $u_1$ 、 $u_2$  的关系, 下面对铰柱进行单独受力分析。为简化起见, 设摩擦

力为库伦摩擦, 即最大静摩擦与动摩擦大小相等。

当  $e=0$  时, 若  $k_a s - p \leq f_F$ , 则铰柱在滑槽内不发生滑动; 当  $e = \varepsilon$  时, 若  $p + (k_a + k_b)\varepsilon - k_a s \leq f_F$ , 则铰柱不发生滑动; 当  $0 < e < \varepsilon$  时, 因  $|p + (k_a + k_b)e - k_a s| = f_F$ , 故铰柱滑动时, 有

$$e = -\frac{p - k_a s + f_F}{k_a + k_b} \quad \text{if } \dot{e} > 0 \quad (3)$$

$$e = -\frac{p - k_a s - f_F}{k_a + k_b} \quad \text{if } \dot{e} < 0$$

## 1.2 轴向拉伸关节三维梁单元

根据图1所示的轴向拉伸预紧关节, 可以抽象出轴向拉伸关节三维梁单元模型, 如图3所示。

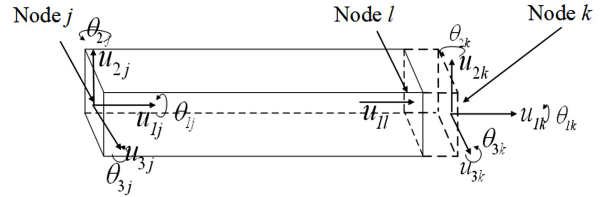


图3 轴向拉伸关节三维梁单元

Fig.3 Axial tension joint 3D beam element

单元包含  $j$ 、 $l$  和  $k$  共 3 个节点, 其中,  $j$  节点表示梁单元左侧节点,  $l$  为虚拟节点, 并与  $k$  共同代表关节。对于  $l$  和  $k$ , 除关节间轴向拉伸自由度不同外, 其余方向自由度均相同, 并均可用  $k$  节点自由度表示。  $k$  节点包含完整的空间六个自由度。轴向拉伸关节三维梁单元自由度列阵为

$$\mathbf{u} = [u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \theta_{1j}, \theta_{2j}, \theta_{3j}, u_{1l}, u_{2l}, u_{3l}, \theta_{1k}, \theta_{2k}, \theta_{3k}]^T \quad (4)$$

上式含  $j$  节点空间 6 个自由度,  $l$  节点轴向拉伸自由度, 以及  $k$  节点空间 6 个自由度, 共 13 个自由度。

按照轴向拉伸预紧关节的力学模型分析节点  $l$  和  $k$  之间的轴向力关系。令  $s = u_{1k} - u_{1l}$ , 关节内铰滑动位移为  $e$ , 由此得关节间传递力为  $f_{jk} = k_a(s + e)$ , 写成矩阵形式, 有

$$\begin{cases} f_{1l} \\ f_{1k} \end{cases} = k_a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_{1l} \\ u_{1k} \end{cases} + k_a \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} e \quad (5)$$

根据轴向拉伸梁单元自由度列阵  $\mathbf{u}$ , 假设每个自由度发生单位位移, 通过单位位移刚度法可求得节点自由度位移与力关系式为

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{b}k_a e \quad (6)$$

根据上述公式及有限元理论, 13 个自由度的轴向拉伸关节梁单元相关矩阵为

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \tag{7}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & & & & & & & \text{sym} & & \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & & & & & & & & \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_a + \frac{EA}{L} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_a & k_a & & & & & & \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & & & & & \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_x}{L} & & & \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & & \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{M} = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{13}{35} & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{13}{35} & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & & & & & & & \text{sym} & & \\ 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & & & & & & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & \frac{13}{35} & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_x}{3A} & & & \\ 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & & \\ 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & \end{bmatrix} \tag{9}$$

通过上述单元矩阵,可组装获得整体结构的动力学方程.

### 1.3 整体结构动力学

在单元矩阵的基础上,可以根据具体结构建立动力学方程.在不考虑阻尼的情况下,组装后得到的动力学方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}+\mathbf{B}\mathbf{e}=\mathbf{F} \quad (10)$$

式中, $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{K}$ 为结构整体质量矩阵和刚度矩阵, $\mathbf{e}=[e_1, e_2, \dots]^T$ 描述所有关节, $\mathbf{B}=[k_{a1}\mathbf{b}_1, k_{a2}\mathbf{b}_2, \dots]$ 为每个关节对应的关节内弹性力分配矩阵.

若去除式(10)中 $\mathbf{B}\mathbf{e}$ 项,则 $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{0}$ 为线性动力学方程,记其特征值矩阵为 $\mathbf{w}$ ,特征向量矩阵为 $\Psi$ ,取坐标变换 $\mathbf{u}=\Psi\mathbf{q}$ ,并对方程(10)左乘 $\Psi^T$ ,得

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}_e\mathbf{q}+\Psi^T\mathbf{B}\mathbf{e}=\Psi^T\mathbf{F} \quad (11)$$

根据有限元理论可知, $\mathbf{M}_e$ 、 $\mathbf{K}_e$ 为对角矩阵,则

$$\mathbf{M}_e=\text{dig}(m_1, m_2, \dots, m_n, \dots) \quad (12)$$

$$\mathbf{K}_e=\text{dig}(m_1\omega_1^2, m_2\omega_2^2, \dots, m_n\omega_n^2, \dots) \quad (13)$$

式中, $m_i$ 为第*i*阶模态质量,为 $\omega_i$ 第*i*阶固有频率,因此,写成模态坐标方程组的形式为

$$\ddot{q}_i+\omega_i^2q_i+\frac{1}{m_i}\Psi^T\mathbf{B}\mathbf{e}(i, :)=\Psi^T\mathbf{F}(i, :) \quad (14)$$

根据上式可以分析结构各阶振动.

## 2 算例分析

### 2.1 弹性预紧约束下的振动传递特性

研究图4所示双柔性悬臂梁结构,上、下两悬臂梁相互独立,仅由带轴向拉伸弹性预紧关节的支撑梁连接,下方悬臂梁末端施加激励,研究上方悬臂梁末端响应传递特性.

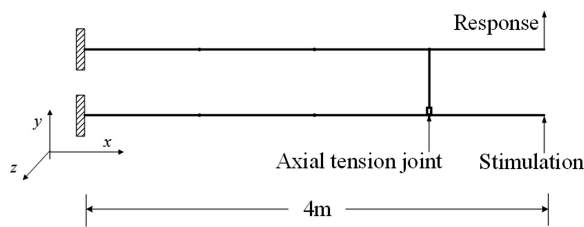


图4 有关节双悬臂梁

Fig.4 Double cantilever beams with a joint

表1 双悬臂梁结构参数

Table 1 Structure parameters of cantilever beams

Parameters	Values
Cross-sectional area, $\text{m}^2$	$0.01 \times 0.02$
Density, $\text{kg}/\text{m}^3$	$2.65 \times 10^3$
Elasticity modulus, Pa	$6.96 \times 10^{10}$
Shear modulus, Pa	$2.6 \times 10^{10}$
Length of beams, m	0.2

表2 轴向拉伸预紧关节参数

Table 2 Parameters of axial tensile preloading joint

Parameters	value
Elastic stiffness, $k_a$	1000EA
Spring elastic stiffness, $k_b$	0.001EA
Length of Joint clearance, $\varepsilon/\text{m}$	0.005

双悬臂梁结构参数及轴向拉伸预紧关节参数如表1和2所示.给定激励为扫频激励 $f(t)=20\sin(170\pi t^2/6+30\pi t)$ ,预紧力 $P=1000\text{N}$ ,计算得到的动态传递特性如图5所示.

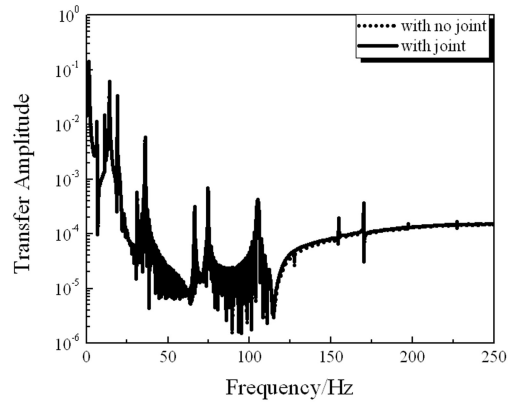


图5  $P=1000\text{N}$ 时传递曲线

Fig.5 Transmission characteristics,  $P=1000\text{N}$

在图5中,横坐标表示频率,纵坐标为传递特性幅值.可以看出,当预紧力比较大时,弹性预紧约束对结构的传递特性几乎没有影响,这是因为预紧力过大,间隙相当于被锁紧,故运动过程中不会产生非线性振动现象.

降低预紧力, $P=400\text{N}$ ,计算得到的动态传递如图6所示.

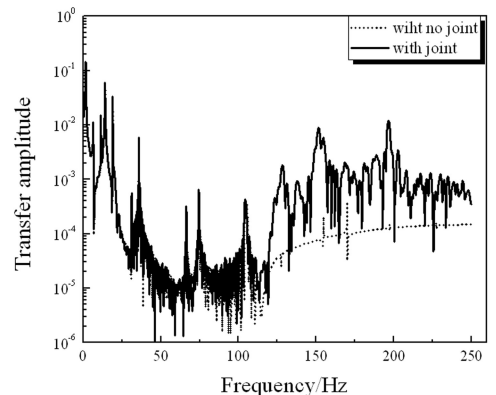


图6  $P=400\text{N}$ 时传递曲线

Fig.6 Transmission characteristics,  $P=400\text{N}$

从图6可以发现,当 $P=400\text{N}$ 时,低频区弹性

预紧间隙对动态传递特性无明显影响,但在高频区域增大了动态传递幅值,也就是说在关节影响下,高频响应增加。

继续降低预紧力,  $P = 140\text{N}$ , 计算得到的动态传递曲线如图 7 所示。

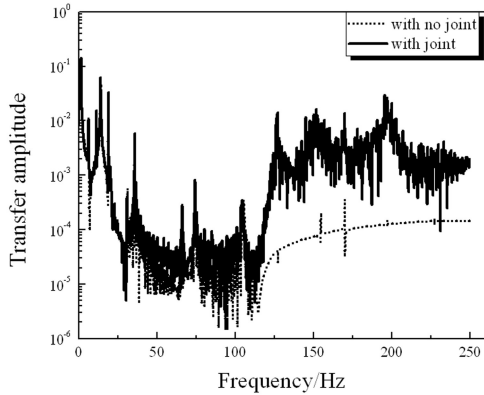


图 7  $P = 140\text{N}$  时传递曲线

Fig.7 Transmission characteristics,  $P = 140\text{N}$

从图 7 可见,相对于  $P = 400\text{N}$  的情形,  $P = 140\text{N}$  时高频响应的增加更加明显,且在部分低阶频率范围,动态传递幅值有所降低。

通过上述算例可以发现,弹性预计关节间隙的非线性特性可以在部分低阶频率范围降低动态传递幅值,在部分高阶频率范围提高动态传递幅值,这种特性可以在结构的被动振动抑制中提供作用。

### 2.2 非线性关节内共振及振动转移效应

建立如图 8 所示的刚架结构,结构参数不变。

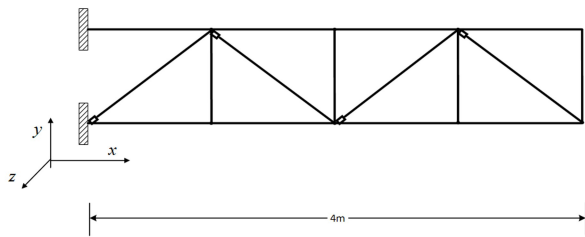


图 8 关节刚架结构

Fig.8 Truss structure with joints

在图 8 所示刚架结构中部分斜杆处安装有有关节,根据上文整体动力学建模可知,由式(14)可以分析结构中线性部分的各阶振动.因此,给定初始条件为结构面内一阶模态速度  $\dot{q}_1 = 50$ .在不考虑摩擦力的情况下,给定预紧力  $P = 1000\text{N}$ ,计算上端梁末端响应,结果如图 9 和 10 所示。

由图 9 和 10 可知,在预紧力比较大时,关节非线性不起任何作用,关节结构与线性结构一致。由

于初始条件为一阶模态速度,此时结构响应中只有一阶模态响应。

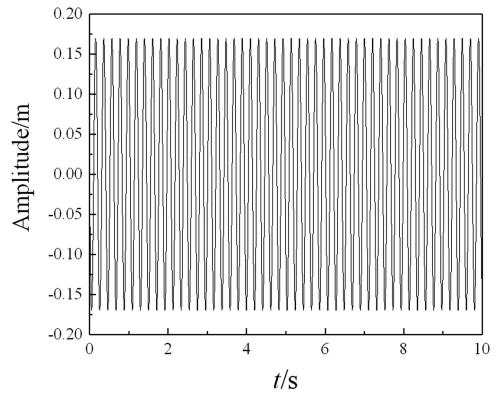


图 9 关节结构时域响应

Fig.9 Time history of structural response

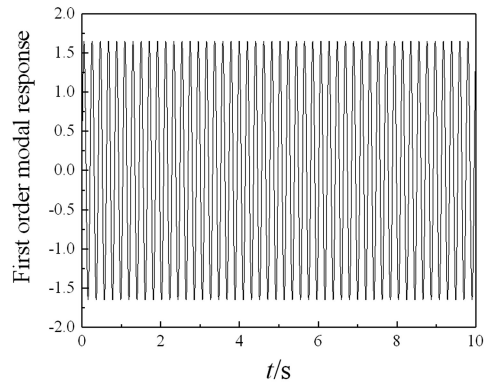


图 10 关节结构一阶模态响应

Fig.10 First order modal response

为说明关节非线性,可以将结构低阶模态转移到高阶振动,降低关节预紧力至  $P = 200\text{N}$ ,结果如图 11 所示。

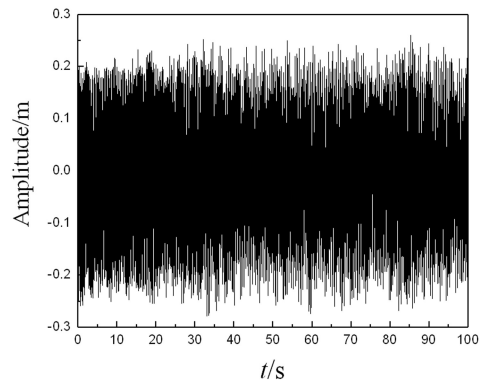


图 11 关节结构时域响应

Fig.11 Time history of structural response

从图 11 可见,虽然结构振动并未衰减,但响应包含了多个频率成份。

关节结构的一阶模态响应及振动能量分别如图 12 和 13 所示。

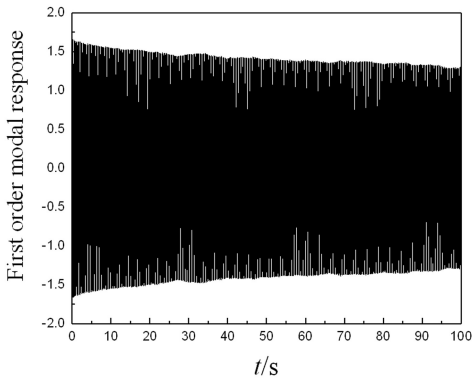


图 12 关节结构一阶模态响应

Fig.12 First order modal response

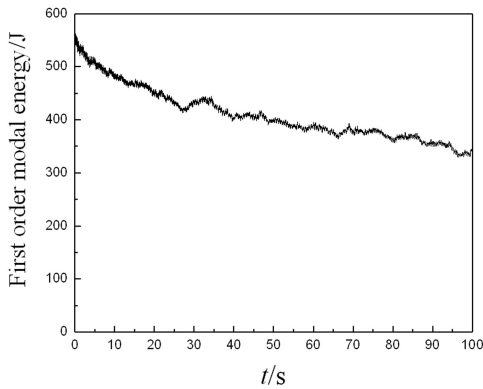


图 13 关节结构一阶模态振动能量

Fig.13 First order modal energy

从图 12 和 13 可以发现,在关节间隙非线性的影响下,结构的一阶模态响应随着时间而逐渐减小,转移到了高阶模态上。频域响应如图 14 所示。

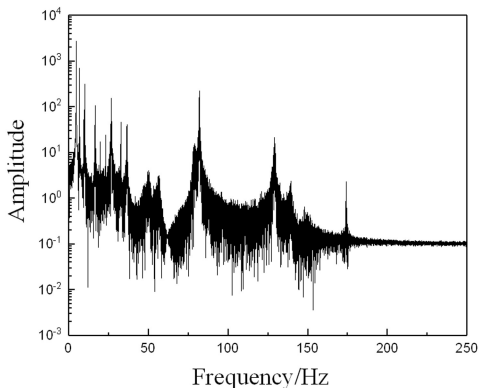


图 14 关节结构频域响应

Fig.14 Frequency domain response

从上述分析中可以发现,同样给定初始条件为结构一阶振动,当预紧力较大时,结构呈现线性特

性,此时结构保持一阶振动;当预紧力较小时,关节非线性特性对结构振动产生了不可忽略的影响。从图 11 可以发现,结构响应出现了多个频率成分;图 12 和 13 说明结构原始一阶振动的衰减;从图 14 可以发现,由于关节非线性内共振的影响,结构初始一阶响应激发了高阶频率,振动能量从一阶振动传递到了各阶振动。

### 3 结论

相对于无关节的线性结构,弹性预紧约束下的关节非线性对结构动态传递特性的作用为:一方面会增加高阶传递特性,另一方面将结构低阶振动传递到高阶振动。

### 参 考 文 献

- 1 Puig L, Barton A, Rando N. A review on large deployable structures for astrophysics missions. *Acta Astronautica*, 2010,67(1):12~26
- 2 Santiago-Prowald J, Baier H. Advances in deployable structures and surfaces for large apertures in space. *CEAS Space Journal*, 2013,5(3-4):89~115
- 3 刘福寿. 大型空间结构动力学等效建模与振动控制研究[博士学位论文]. 南京:南京航空航天大学, 2015 (Liu F S. Dynamic equivalent modeling and vibration control of large space structures [PH.D Thesis]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2015 (in Chinese))
- 4 Flores P, Ambrosio J, Claro J C P, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. *Mechanism and Machine Theory*, 2006,41(3):247~261
- 5 Flores P, Ambrosio J, Claro J P. Dynamic analysis for planar multi-body mechanical systems with lubricated joints. *Multibody System Dynamics*, 2014,12(1):47~74
- 6 李贞靖,姚文莉,宋克伟. 考虑含间隙与润滑平面机构的简化算法. 动力学与控制学报, 2018,16(2):108~114 (Li Z J, Yao W L, Song K W. A simplified algorithm for planar mechanism with clearance and lubrication. *Journal of Dynamics and Control*, 2018,16(2):108~114 (in Chinese))
- 7 胡海岩. 预紧弹性约束对系统主共振的影响. 应用力学学报, 1997(4):92~95 (Hu H Y. Effect of set-up elastic stops on primary resonance of a harmonically forced

- oscillator. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1997 (4):92~95 (in Chinese))
- 8 Onoda J, Sano T, Minesugi K. Passive damping of truss vibration using preloaded joint backlash. *AIAA Journal*, 2012,33(7):1335~1341
- 9 Nayfeh T A, Vakakis A F. Passive transient wave confinement due to nonlinear joints in coupled flexible systems. *Nonlinear Dynamics*, 2001,25(4):333~354
- 10 Gilardi G, Sharf I. Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism & Machine Theory*, 2002,37(10):1213~1239

## EFFECT OF NONLINEAR ELASTIC PRELOAD ON VIBRATION OF STRUCTURES\*

Chen Jin Jin Dongping<sup>†</sup>

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,  
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract** The paper studies the effect of elastic preloading constraints on structural dynamics of large space deployable structures with joint clearances. Based on the axial tension model, a 3D beam element of the axial tension joint was constructed. Then, considering the nonlinear mechanical behavior of the elastic pre-tensioned joint, the dynamic equations of the full structure were established based on Kelvin-Voigt contact model and Coulomb friction model. The influence of preload force on the structural vibrations was analyzed. The results showed that under the nonlinear joint constraints, the vibration transmission at high frequency increases, and the energy of low-order modes is transferred to the higher-order ones.

**Key words** elastic preloading, contact nonlinearity, nonlinear vibration, energy transfer