

# 基于最大 Lyapunov 指数的行星齿轮传动系统 混沌特性分析<sup>\*</sup>

王靖岳<sup>1,2†</sup> 刘宁<sup>1</sup> 王浩天<sup>3</sup>

(1. 沈阳理工大学 汽车与交通学院, 沈阳 110159) (2. 重庆大学 机械传动国家重点实验室, 重庆 400044)

(3. 沈阳航空航天大学 自动化学院, 沈阳 110136)

**摘要** 为了分析行星齿轮系统的混沌特性, 基于集中参数理论, 考虑时变啮合刚度、齿隙和综合啮合误差等非线性因素, 建立行星齿轮系统扭转振动模型. 采用 Runge-Kutta 数值解法求解振动方程, 利用分岔图和最大 Lyapunov 指数图分析系统随各种参数变化的分岔与混沌特性. 数值仿真得出: 随激励频率的增加, 系统首先从周期运动进入阵发性混沌, 再通过逆倍化分岔由混沌回到周期运动, 之后再次通过跳跃激变和倍化分岔由周期运动进入混沌运动, 最后通过逆倍化分岔稳定到 1 周期运动. 随阻尼比的增加, 系统通过逆倍化分岔由混沌运动进入周期运动. 随综合啮合误差幅值、齿隙和刚度幅值分别增加的三种情况下, 系统都是通过倍化分岔由周期运动进入混沌运动. 随荷载的增加, 系统通过跳跃激变和逆倍化分岔由混沌运动进入周期运动. 以上分析结果可为行星齿轮系统参数设计提供理论依据.

**关键词** 行星齿轮系统, 非线性动力学, 分岔, 混沌, 最大 Lyapunov 指数

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-045

## 引言

齿轮系统是应用广泛的动力传动装置, 其振动和噪声问题也尤为突出, 吸引了国内外大量学者对其非线性动力学特性进行研究<sup>[1-6]</sup>.

在现有研究文献中, 很多学者采用相图和 Poincaré 截面结合的方法对系统进行定性分析, 而采用 Lyapunov 指数可以对系统进行定量分析. 李华等针对单对齿轮系统, 利用 Lyapunov 指数来判别系统中的混沌吸引子, 说明其可以作为判定齿轮系统运动状态的指标<sup>[7]</sup>. 王晓笋等建立含侧隙的齿轮系统动力学模型, 分析系统随侧隙变化的分岔图和最大 Lyapunov 指数图<sup>[8]</sup>. Hou 等建立行星齿轮-转子系统的非线性分析模型, 用分岔图和最大李雅普诺夫指数来说明系统的非线性响应<sup>[9]</sup>. 向铃等建立了平移扭转耦合的齿轮系统动力学模型, 基于 Lyapunov 指数分析系统随激励参数变化的动力学特性<sup>[10]</sup>. 林何等建立含间隙和误差的齿轮非线性振

动模型, 采用 Lyapunov 指数和关联维数定量表述系统相空间吸引子的数值特性<sup>[11]</sup>.

对于齿轮系统混沌特性的研究, 综合分析上述研究文献, 多数为单对齿轮副的研究, 而行星齿轮的模型研究很少, 其模型构件较多, 动力学特性也会更加复杂. 因此, 本文建立考虑啮合刚度、误差和齿隙等非线性因素的行星齿轮传动系统振动模型, 采用数值方法求解, 利用非线性分析方法, 结合分岔图和最大李雅普诺夫指数 (Largest Lyapunov Exponents, LLE) 对行星齿轮系统的混沌特性进行分析.

## 1 系统动力学建模

如图 1 所示, 定、动坐标系分别为  $o_n x_n y_n$ 、 $Oxy$ , 基于集中参数理论建立的行星齿轮扭转动力学模型, 假定逆时针旋转为正, 不考虑轴承间隙等非线性, 每个行星轮的质量和转动惯量相同, 同类型构件齿隙、综合啮合误差和阻尼比等参数也相同, 啮

2020-02-01 收到第 1 稿, 2020-02-25 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 中国博士后科学基金资助项目 (2017M610496), 机械传动国家重点实验室课题 (SKLMT-KFKT-201605), 辽宁省自然科学基金项目 (2020-MS-216)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: abswell@126.com

合副的接触面简化为弹簧和阻尼器连接,  $c$  代表行星架、 $r$  代表齿圈、 $s$  代表太阳轮、 $n$  代表第  $n$  个行星轮 ( $n = 1, 2, 3 \cdots N$ ),  $u_c, u_r, u_s, u_n$  分别表示上述构件的扭转位移。

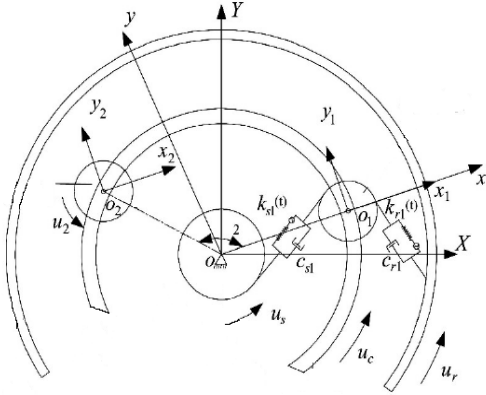


图1 行星齿轮动力学模型

Fig.1 Dynamics model of planetary gear

采用牛顿定律建立行星齿轮系统动力学微分方程：

$$\begin{cases} \frac{T_2}{r_c} = \left( \frac{I_c}{r_c^2} + Nm_n \right) \ddot{u}_c - \sum_{n=1}^N (k_{rn}(t) f(\delta_{rn}) + c_{rn} \dot{f}(\delta_{rn})) \cos(\alpha_{rn}) \\ \quad - \sum_{n=1}^N (k_{sn}(t) f(\delta_{sn}) + c_{sn} \dot{f}(\delta_{sn})) \cos(\alpha_{sn}) \\ \frac{T_1}{r_s} = \frac{I_s}{r_s^2} \ddot{u}_s + \sum_{n=1}^N (k_{sn}(t) f(\delta_{sn}) + c_{sn} \dot{f}(\delta_{sn})) \\ 0 = \frac{I_r}{r_r^2} \ddot{u}_r + \sum_{n=1}^N (k_{rn}(t) f(\delta_{rn}) + c_{rn} \dot{f}(\delta_{rn})) \\ 0 = \frac{I_n}{r_n^2} \ddot{u}_n + k_{sn}(t) f(\delta_{sn}) + c_{sn} \dot{f}(\delta_{sn}) - k_{rn}(t) f(\delta_{rn}) - c_{rn} \dot{f}(\delta_{rn}) \end{cases} \quad (1)$$

式中, 令  $j = s, c, r, n$ ,  $i = sn, rn$ ,  $sn$  为外啮合副;  $rn$  为内啮合副;  $I_j$  为转动惯量;  $r_j$  为基圆半径;  $T_1$  为输入扭矩;  $T_2$  为输出扭矩。

通过石川公式计算齿轮副的啮合刚度<sup>[12]</sup>, 时变啮合刚度随时间周期性变化, 通过 Fourier 级数展开, 取谐波基频部分:

$$k_i(t) = k_{iav} (1 + k \cos(\omega_m t + \phi)) \quad (2)$$

式中,  $k_{iav}$  为平均啮合刚度;  $k$  为刚度系数;  $\phi$  为刚度相位角;  $\omega_m$  为激励频率。

综合啮合误差主要为制造误差和安装误差, 可以表示为正弦函数的形式:

$$e_i(t) = E \sin(\omega_m t + \gamma) \quad (3)$$

式中,  $E$  为啮合误差幅值;  $\gamma$  为误差相位角。

齿轮副的啮合阻尼与啮合刚度相关, 可以表示为:

$$c_i = 2\zeta \sqrt{k_{iav} / (1/M_s + 1/M_n)} \quad (4)$$

式中,  $\zeta$  为阻尼比, 取值范围为 0.03~0.17<sup>[13]</sup>;  $M$  为等效质量,  $M = I/r^2$ 。

齿侧间隙以啮合线方向为度量值, 采用分段函数的形式, 如图 2 所示, 齿轮副间隙非线性位移函数可以表示为:

$$f(\delta_i) = \begin{cases} \delta_i - b & \delta_i > b \\ 0 & |\delta_i| \leq b \\ \delta_i + b & \delta_i < -b \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $b$  为 1/2 齿隙。

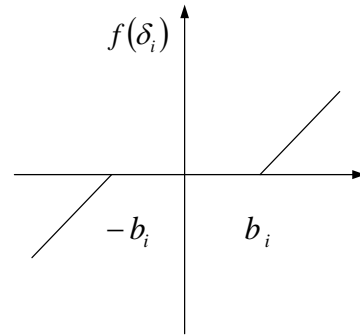


图2 齿侧间隙非线性函数

Fig.2 Nonlinear function of backlash

为了消除刚体位移和使系统方程数目减少实现降维, 引入内外啮合副的相对位移  $\delta$ :

$$\begin{cases} \delta_{sn} = u_s - u_c \cos(\alpha_{sn}) + u_n + e_{sn} \\ \delta_{rn} = u_r - u_c \cos(\alpha_{rn}) - u_n + e_{rn} \end{cases} \quad (6)$$

通过引入无量纲时间变量  $\tau$ , 无量纲激励频率  $\Omega$ , 位移尺度  $b_c$ , 时间尺度  $\omega_n$ , 可以对相同量纲尺度下的结果进行无量纲化比较分析。令  $\tau = \omega_n t$ , 则  $\Omega = \omega_m / \omega_n$ ,  $M_s = I_s / r_s^2$ ,  $M_n = I_n / r_n^2$ ,  $\bar{\delta}_i = \delta_i / b_c$ ,  $\dot{\bar{\delta}}_i = \delta_i / b_c \omega_n$ ,  $\ddot{\bar{\delta}}_i = \delta_i / b_c \omega_n^2$ ,  $\omega_n = \sqrt{k_{sn} (1/M_s + 1/M_n)}$ 。

令  $z_1 = \bar{\delta}_{sn}$ ,  $z_2 = \dot{\bar{\delta}}_{sn}$ ,  $z_3 = \bar{\delta}_{rn}$ ,  $z_4 = \dot{\bar{\delta}}_{rn}$ , 则得到系统的状态方程为:

$$\begin{cases}
\dot{z}_1 = z_2 \\
\dot{z}_2 = -\left(\frac{\cos^2 \alpha_{sn}}{M_c \omega_n^2} + \frac{1}{M_s \omega_n^2}\right) \sum_{n=1}^N \bar{k}_{sn}(\tau) f(\bar{\delta}_{sn}) - \frac{1}{M_s \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{sn} f(\dot{\bar{\delta}}_{sn}) \\
\quad - \frac{\cos^2(\alpha_{sn})}{M_c \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{sn} f(\dot{\bar{\delta}}_{sn}) - \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n^2} \sum_{n=1}^N \bar{k}_{rn}(\tau) f(\bar{\delta}_{rn}) \\
\quad - \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{rn} f(\dot{\bar{\delta}}_{rn}) - \frac{1}{M_n \omega_n^2} \bar{k}_{sn}(\tau) f(\bar{\delta}_{sn}) \\
\quad - \frac{1}{M_n \omega_n} c_{sn} f(\dot{\bar{\delta}}_{sn}) + \frac{1}{M_n \omega_n^2} \bar{k}_{rn}(\tau) f(\bar{\delta}_{rn}) + \frac{1}{M_n \omega_n} c_{rn} f(\dot{\bar{\delta}}_{rn}) \\
\quad + \frac{T_1}{M_s r_s \omega_n^2 b_c} + \frac{T_2 \cos(\alpha_{sn})}{M_c r_c \omega_n^2 b_c} + \ddot{e}_{sn} \\
\dot{z}_3 = z_4 \\
\dot{z}_4 = -\left(\frac{\cos^2(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n^2} + \frac{1}{M_r \omega_n^2}\right) \sum_{n=1}^N \bar{k}_{rn}(\tau) f(\bar{\delta}_{rn}) - \frac{1}{M_r \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{rn} f(\dot{\bar{\delta}}_{rn}) \\
\quad - \frac{\cos^2(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{rn} f(\dot{\bar{\delta}}_{rn}) - \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n^2} \sum_{n=1}^N \bar{k}_{sn}(\tau) f(\bar{\delta}_{sn}) \\
\quad - \frac{\cos(\alpha_{sn}) \cos(\alpha_{rn})}{M_c \omega_n} \sum_{n=1}^N c_{sn} f(\dot{\bar{\delta}}_{sn}) + \frac{1}{M_n \omega_n^2} \bar{k}_{sn}(\tau) f(\bar{\delta}_{sn}) \\
\quad + \frac{1}{M_n \omega_n} c_{sn} f(\dot{\bar{\delta}}_{sn}) - \frac{1}{M_n \omega_n^2} \bar{k}_{rn}(\tau) f(\bar{\delta}_{rn}) - \frac{1}{M_n \omega_n} c_{rn} f(\dot{\bar{\delta}}_{rn}) \\
\quad + \frac{T_2 \cos(\alpha_{rn})}{M_c r_c \omega_n^2 b_c} + \ddot{e}_{rn}
\end{cases} \quad (7)$$

## 2 系统的分岔与混沌特性分析

采用 Runge-Kutta 法求解系统状态方程(4), 由于内外啮合副的相对位移振动特性相同, 以太阳轮和行星轮的无量纲相对位移  $\bar{\delta}_{sn}$  为例进行分析. 行星齿轮系统的基本参数如表 1 所示<sup>[14]</sup>, 其中,  $z$  为齿数,  $m$  为模数,  $d$  为基圆直径,  $I$  为转动惯量,  $\alpha$  为压力角,  $B$  为齿宽,  $h_a$  为齿顶高系数,  $c_a$  为顶隙系数. 由

系统的基本参数计算得到的基准参数如下:  $k_{snaw} = 4.37 \times 10^8 \text{ N/m}$ ,  $k_{rnaw} = 5.65 \times 10^8 \text{ N/m}$ ,  $k = 0.25$ ,  $\varphi = 0$ ,  $b = 50 \mu\text{m}$ ,  $E = 3 \mu\text{m}$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\zeta = 0.088$ ,  $T_1 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

### 2.1 系统随激励频变化的分岔与混沌特性

以无量纲激励频率  $\Omega$  为变化参数, 得到系统的分岔图和 LLE 图, 如图 3 所示. 从图 3 中可以看出, 随着  $\Omega$  的增加, 系统首先为周期运动, 在此区域伴有短暂阵发性混沌, 对应 LLE 图中有正值区域,

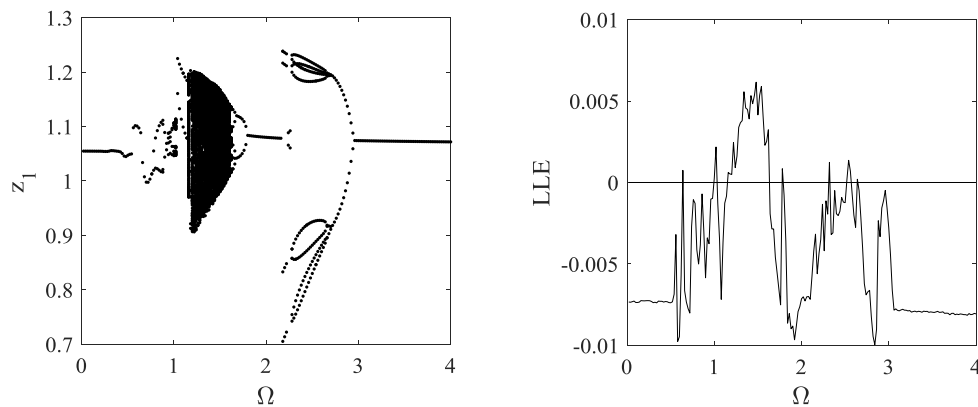


图 3 系统随  $\Omega$  变化的分岔图和 LLE 图

Fig.3 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $\Omega$

表1 行星齿轮系统基本参数<sup>[14]</sup>

Table 1 Basic parameters of planetary gear system<sup>[14]</sup>

Parameters	<i>s</i>	<i>n</i>	<i>r</i>	<i>c</i>
<i>z</i>	20	29	79	—
<i>m</i> /mm	2.25			
<i>d</i> /mm	42.29	61.31	167.03	113
<i>I</i> /(kg·mm <sup>2</sup> )	146	297	17440	11178
$\alpha/(^{\circ})$	20			
<i>B</i> /mm	25	28	25	25
<i>h<sub>a</sub></i>	1			
<i>c<sub>a</sub></i>	0.25			

然后系统完全进入混沌运动,之后系统再次进入周期运动,途径为逆倍化分岔,在高频区域的周期运动发生倍化分岔,最后稳定在1周期运动,同时在此期间也夹杂几处混沌运动.当 $\Omega$ 在 $[0, 0.76]$ 区间时,系统为1周期运动;当 $\Omega$ 增加到0.78时,系统发生Hopf分岔进入2周期运动;当 $\Omega$ 增加到0.88时,系统为4周期运动,之后系统暂时经激变进入阵发性混沌,对应LLE值为正;当 $\Omega$ 在 $[1.04, 1.14]$ 区间时,系统为2周期运动,状态改变途径为跳跃激变;当 $\Omega$ 在 $[1.14, 1.52]$ 区间时,系统为混沌运动状态,

LLE值为正,呈先增后减趋势;当 $\Omega$ 在 $[1.52, 2.18]$ 区间时,系统状态为混沌运动 $\rightarrow$ 4周期运动 $\rightarrow$ 2周期运动 $\rightarrow$ 1周期运动;当 $\Omega$ 在 $[2.18, 2.28]$ 区间时,系统发生跳跃激变,由4周期跳跃为2周期;当 $\Omega$ 在 $[2.28, 2.7]$ 区间时,系统主要为8周期运动,伴随短暂的阵发性混沌,对应LLE图在正值区域有几处尖峰;当 $\Omega$ 在 $[2.7, 2.94]$ 区间时,系统为2周期运动;当 $\Omega$ 在 $[2.94, 4]$ 区间时,系统锁相为1周期运动.

2.2 系统随阻尼比变化的分岔与混沌特性

取激励频率 $\Omega = 1$ ,以阻尼比 $\zeta$ 为变化参数,得到系统的分岔图和LLE图,如图4所示.从图4可以看出,随着 $\zeta$ 的增加,系统开始的混沌特性明显,在状态临界点处系统状态复杂,最后系统由逆倍化分岔进入周期运动,符合增大阻尼可以使系统摆脱混沌,从而使系统趋于稳定.当 $\zeta$ 在 $[0.07, 0.093]$ 区间时,系统主要为混沌运动,同时伴有阵发性混沌和周期窗口,对应的LLE值在正负区域之间变化;当 $\zeta$ 在 $[0.093, 0.106]$ 区间时,系统经逆倍化分岔进入4周期运动,LLE值为负,呈减小趋势;当 $\zeta$ 继续增加到0.108时,系统最后稳定在2周期运动.

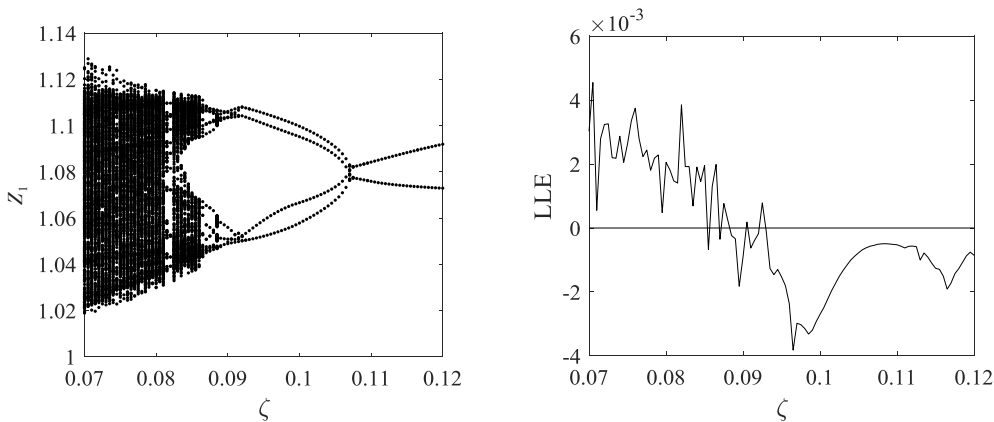


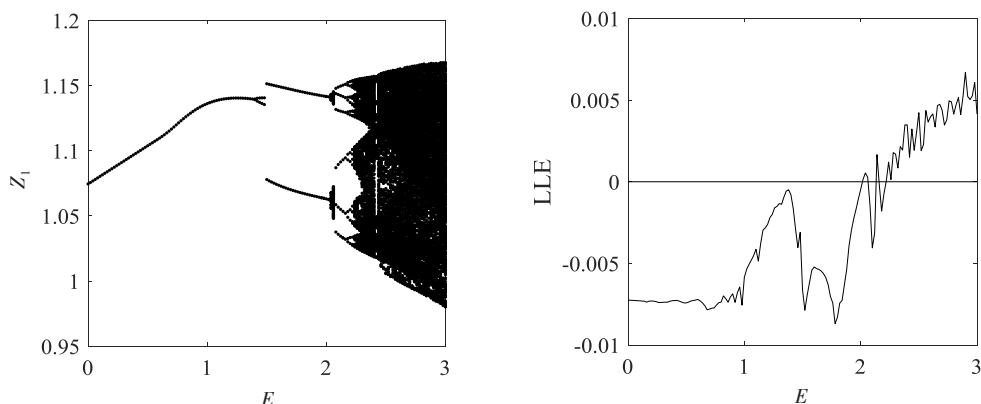
图4 系统随 $\zeta$ 变化的分岔图和LLE图

Fig 4 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $\zeta$

2.3 系统随综合误差幅值变化的分岔与混沌特性

取 $\Omega = 1$ ,以误差幅值 $E$ 为变化参数,得到系统的分岔图和LLE图,如图5所示.从图5可以看出,随着 $E$ 的增加,系统开始为单周期运动,之后为逐渐倍化分岔多倍周期运动,最后进入混沌运动,同时伴有狭窄的周期或拟周期窗口.当 $E$ 在 $[0, 1.4]$ 区间时,系统为1周期运动,LLE值为负;当 $E$ 在 $[1.4, 2.04]$ 区间时,系统为2周期运动,在此区间,

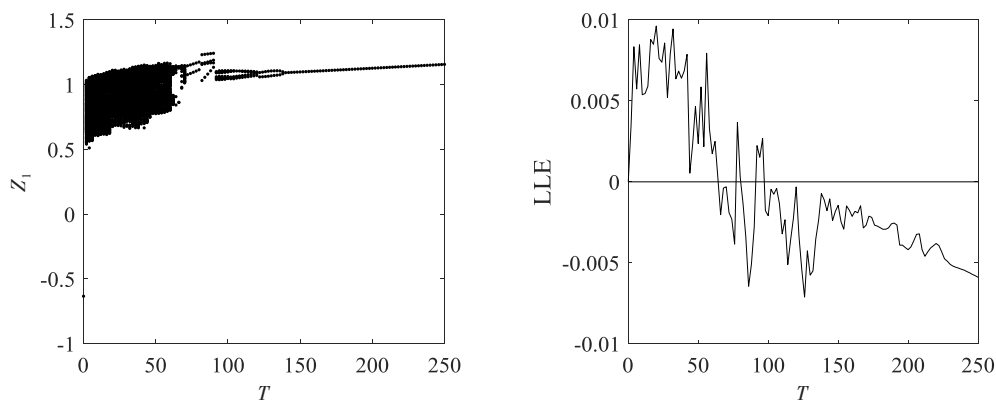
当 $E$ 为1.5时,发生跳跃激变;当 $E$ 在 $[2.04, 2.06]$ 区间时,系统暂时为拟2周期运动,LLE值为0;当 $E$ 在 $[2.08, 2.22]$ 区间时,系统为多倍周期运动分岔行为,6周期运动 $\rightarrow$ 12周期运动 $\rightarrow$ 24周期运动;当 $E$ 在 $[2.24, 3]$ 区间时,系统混沌特性明显,同时混沌区域中周期窗口不明显,说明系统已处于不稳定状态,符合实际误差变大,系统混沌振动特性也随之增强.

图5 系统随 $E$ 变化的分岔图和LLE图Fig.5 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $E$ 

## 2.4 系统随荷载变化的分岔与混沌特性

取激励频率  $\Omega = 1$ , 以荷载  $T$  为变化参数, 得到系统的分岔图和 LLE 图, 如图 6 所示. 从图 6 中可以看出, 随着  $T$  的增加, 系统开始的混沌状态明显, 分岔行为模糊, 状态改变为跳跃激变和逆倍化分岔, 系统的周期运动区间也存在两处不稳定的混沌区域, LLE 图中为两处尖峰, 最后系统稳定在单周期运动. 当  $T$  在  $[0, 70]$  区间时, 系统为混沌运动状

态, LLE 值为正; 当  $T$  增加到 75 时, 系统由混沌运动逆倍化分岔为 2 周期运动, 对应 LLE 值由正变负; 当  $T$  增加到 90 时, 系统跳跃激变为 4 周期运动, 当  $T$  在  $[90, 120]$  区间时, 系统主要为 4 周期运动, 伴有阵发性混沌. 当  $T$  在  $[125, 250]$  区间时, 系统为周期运动, 由 4 周期运动  $\rightarrow$  2 周期运动  $\rightarrow$  1 周期运动, 状态改变途径为逆倍化分岔.

图6 系统随 $T$ 变化的分岔图和LLE图Fig.6 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $T$ 

## 2.5 系统随齿隙变化的分岔与混沌特性

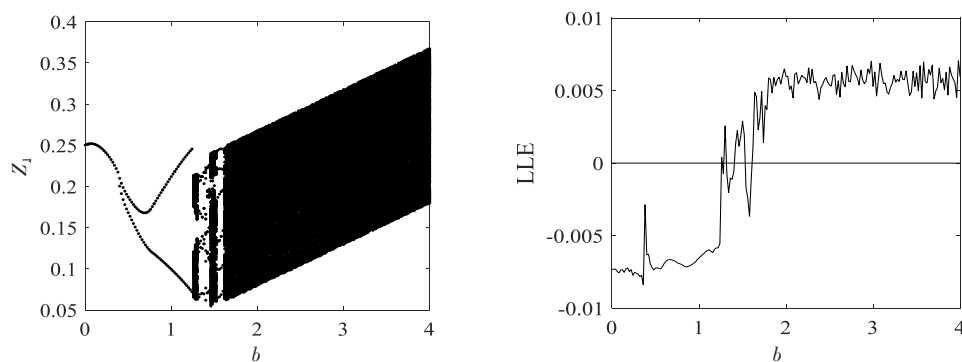
取激励频率  $\Omega = 1$ , 以齿隙  $b$  为变化参数, 得到系统的分岔图和 LLE 图, 如图 7 所示. 从图 7 中可以看出, 随着  $b$  的增加, 系统首先为周期运动, 同时发生 Hopf 分岔, 最后经倍化分岔进入混沌运动, 在混沌区间伴有两段狭窄的周期窗口, 对应 LLE 在负值区域有两处尖峰. 当  $b$  在  $[0, 0.38]$  区间时, 系统为 1 周期运动, LLE 值为负; 当  $b$  增加到 0.4 时, 系统经 Hopf 分岔进入 2 周期运动; 当  $b$  在  $[1.26, 1.52]$  区间

时, 系统有两个混沌带, 伴有周期运动和拟周期运动, 对应 LLE 值在正负区域变化; 当  $b$  在  $[1.54, 1.62]$  区间时, 系统为多倍周期运动, 分岔途径为倍化分岔; 当  $b$  增加到 1.62 时, 系统经倍化分岔进入混沌运动, 对应 LLE 值为正.

## 2.6 系统随刚度幅值变化的分岔与混沌特性

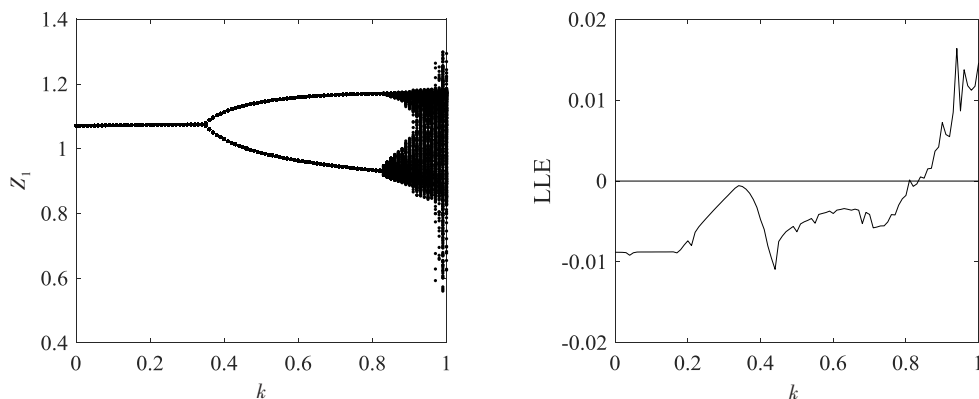
取激励频率  $\Omega = 1$ , 以刚度幅值  $k$  为变化参数, 得到系统的分岔图和 LLE 图, 如图 8 所示. 从图 8 中可以看出, 随着  $k$  的增加, 系统的分岔行为简单, 由



图7 系统随 $b$ 变化的分岔图和LLE图Fig.7 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $b$ 

单周期运动经倍化分岔进入混沌运动.当 $k$ 在 $[0, 0.35]$ 区间时,系统为1周期运动;当 $k$ 在 $[0.35, 0.81]$ 区间时,系统为2周期运动,对应的LLE值为

负;当 $k$ 在 $[0.81, 1]$ 区间时,系统为混沌运动,对应的LLE在正值区域变化且逐渐增加,表明系统混沌程度增大.

图8 系统随 $k$ 变化的分岔图和LLE图Fig.8 Bifurcation diagram and LLE diagram of the system with  $k$ 

### 3 结论

建立考虑齿隙、时变啮合刚度和综合啮合误差等多种非线性因素的行星齿轮扭转动力学振动模型,采用Runge-Kutta数值方法,研究了系统随激励频率、阻尼比、综合误差幅值、载荷、齿隙和刚度幅值变化时的分岔和混沌特性.

(1)随着激励频率的增加,系统分岔行为丰富,运动状态在单周期运动、多倍周期和混沌运动之间多次变化,途径为跳跃激变、倍化分岔和逆倍化分岔,LLE在正值区域减小.

(2)随着阻尼比的增加,分岔行为明显,系统开始混沌特性明显,最后经逆倍化分岔由混沌运动进入周期运动,对应的LLE值由正变负.

(3)随着综合误差幅值的增加,系统分岔行为

丰富,经倍化分岔由单周期运动逐渐变为多倍周期运动,最后倍化分岔进入混沌运动,LLE值在正值区域逐渐增加.

(4)随着荷载的增加,系统分岔行为模糊,系统由混沌运动经跳跃激变和逆倍化进入周期运动,在周期运动区域,最后经逆倍化分岔锁相为稳定的1周期运动,LLE值总体趋势减小.

(5)随着齿隙的增加,系统分岔行为变得复杂,主要集中在混沌区域中的周期窗口,最后,经倍化分岔由周期运动进入混沌运动.LLE值先逐渐增加,最后,在正值区域围绕0.005上下波动.

(6)随着刚度幅值的增加,系统分岔行为简单,由周期运动经倍化分岔进入混沌运动,LLE值整体趋势增加.

## 参 考 文 献

- 1 Kahraman A, Singh R. Nonlinear dynamics of a spur gear pair. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142(1): 49~75
- 2 Kahraman A, Singh R. Nonlinear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 1991, 144(3):469~506
- 3 Xiang L, Zhang Y, Gao N, et al. Nonlinear dynamics of a multistage gear transmission system with multi-clearance. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, 28(3):1~12
- 4 魏静, 史磊, 张爱强, 等. 飞行环境非惯性系下行星齿轮传动系统耦合动力学建模及其动态特性. 机械工程学报, 2019, 55(23):162~172(Wei J, Shi L, Zhang A Q, et al. Modeling and dynamic characteristics of planetary gear transmission in non-inertial system of aerospace environment. *Journal of Mechanical Engineering*. 2019, 55(23):162~172 (in Chinese))
- 5 刘志宇, 刘波, 董浩. 齿面摩擦对多间隙弯扭耦合齿轮分岔特性的影响研究. 机械传动, 2019, 43(10):7~12(Liu Z Y, Liu B, Dong H. Study on the influence of tooth surface friction on bifurcation characteristics of multiple clearance bending and torsion coupling gear. *Journal of Mechanical Transmission*, 2019, 43(10):7~12 (in Chinese))
- 6 蒋进科, 方宗德, 刘红梅. 考虑多体承载啮合斜齿行星齿轮动载特性分析. 工程科学与技术, 2020, 52(1):161~167(Jiang J K, Fang Z D, Liu H M. Dynamical force characteristics for helical planetary gear considering loaded tooth contact of multi-gears. *Advanced Engineering Sciences*, 2020, 52(1):161~167 (in Chinese))
- 7 李华, 沈允文, 刘梦军, 等. 用Lyapunov指数研究单对齿轮间隙非线性系统的动力学行为. 中国机械工程, 2002, 13(12):1040~1044(Li H, Shen Y W, Liu M J, et al. Research on the nonlinear dynamic behavior of a spur gear system with clearance using Lyapunov exponents. *China Mechanical Engineering*, 2002, 13(12):1040~1044 (in Chinese))
- 8 王晓笋, 巫世晶, 周旭辉, 等. 含侧隙非线性齿轮传动系统的分岔与混沌分析. 振动与冲击, 2008, 27(1):54~57(Wang X S, Wu S J, Zhou X H, et al. Bifurcation and chaos analysis of nonlinear gear transmission system with backlash. *Journal of Vibration and Shock*, 2008, 27(1):54~57 (in Chinese))
- 9 Hou L, Cao S. Nonlinear Dynamic analysis on planetary gears-rotor system in geared turbopfan engines. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2019, 29(6):1~20
- 10 向玲, 高楠, 唐亮, 等. 支承刚度变化下风电齿轮传动系统的非线性动力学特性. 振动与冲击, 2019, 38(1):111~117(Xiang L, Gao N, Tang L, et al. Nonlinear dynamic characteristics of turbine gear transmission system with varying support stiffness. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, 38(1):111~117 (in Chinese))
- 11 林何, RatschMatthias, 王三民, 等. 基于G-P算法关联维数齿轮系统相空间吸引子数值特性. 机械传动, 2019, 43(7):12~16(Lin H, RatschMatthias, Wang S M, et al. Numerical characteristics of gear system attractor in phase space based on G-P algorithm of correlation dimension. *Journal of Mechanical Transmission*, 2019, 43(7):12~16 (in Chinese))
- 12 李亚鹏, 孙伟, 魏静, 等. 齿轮时变啮合刚度改进计算方法. 机械传动, 2010, 5:22~26(Li Y P, Sun W, Wei J, et al. Study on the improved algorithm of the time-varying meshing stiffness of gear. *Journal of Mechanical Transmission*, 2010, 5:22~26 (in Chinese))
- 13 Sheng D P, Zhu R P, Jin G H, et al. Bifurcation and chaos study on transverse-torsional coupled 2K-H planetary gear train with multiple clearances. *Journal of Central South University*, 2016, 23(1):86~101

## CHAOS ANALYSIS OF PLANETARY GEAR TRANSMISSION SYSTEM BASED ON LARGEST LYAPUNOV EXPONENT \*

Wang Jingyue<sup>1,2†</sup> Liu Ning<sup>1</sup> Wang Haotian<sup>3</sup>

(1.School of Automobile and Transportation, Shenyang Ligong University, Shenyang, 110159, China)

(2.State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing, 400044, China)

(3.School of Automation, Shenyang Aerospace University, Shenyang, 110136, China)

**Abstract** To explore the chaotic characteristics of a planetary gear system, a centralized-parameter model of torsional vibration of the planetary gear system was established, which considers several nonlinear factors, such as time-varying meshing stiffness, backlash and comprehensive meshing error. The Runge-Kutta scheme was used to solve the equations of motion. The bifurcation diagram and the largest Lyapunov exponent diagram were used to reveal bifurcation and chaos characteristics of the system with respect to various parameters. The numerical simulations showed that with the increase of excitation frequency, the motion of the system firstly changes into the intermittent chaos from periodic motion, and then returns to the periodic motion from the chaos through reverse double-period bifurcation. As the frequency increases further, the system again undergoes chaotic motion through jump shock and double-period bifurcation, and finally stabilizes to the period-1 motion through inverse double-period bifurcation. With the increase of damping ratio, the motion shifts from chaos to periodic motion through inverse double-period bifurcation. In the cases of increasing the integrated meshing error, the backlash, or the stiffness, the motion changes from periodic motion to chaos by double-period bifurcation. With the increase of excitation amplitude, the motion moves from chaos to periodic motion through jump shock and inverse double-period bifurcation. The results of this study provide a theoretical guideline for the parameter design of a planetary gear system.

**Key words** planetary gear system, nonlinear dynamics, bifurcation, chaos, largest Lyapunov exponent

---

Received 1 February 2020, revised 25 February 2020.

\* The project supported by the China Postdoctoral Science Foundation (2017M610496), the State Key Laboratory of Mechanical Transmissions (SKLMT-KFKT-201605) and Natural Science Foundation of Liaoning Province of China (2020-MS-216).

† Corresponding author E-mail: abswell@126.com