

耦合胰腺 β 细胞的同步性分析*

赵勇¹ 吴俊梅¹ 杨梅晨² 韩芳^{2†}

(1.河南理工大学 数学与信息科学学院,焦作 454000)(2.东华大学 信息科学与技术学院,上海 201620)

摘要 胰腺 β 细胞在分泌胰岛素时会伴随生物放电活动.描述胰腺 β 细胞放电行为的数学模型有很多,为了理论分析的方便,本文采用具有代表性的三维多项式模型,对两个电耦合胰腺 β 细胞的同步行为进行了研究.通过构造恰当的李雅普诺夫函数,利用线性矩阵不等式、求解微分不等式获得了模型相应全局渐近同步和全局指数同步的理论判据,并借助 MATLAB 进行数值模拟,进一步验证了理论结果的正确.

关键词 胰腺 β 细胞, 三维多项式模型, 同步, 李雅普诺夫函数, 线性矩阵不等式

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-007

引言

随着科学技术的不断进步,人们的生活水平显著提高,但各种疾病也不断增多,比如人们俗称的糖尿病.它是一种慢性的高血糖症,对人体来说,一旦患上糖尿病,可能引起其它机体并发症,比如高血压、高血脂等,对人体的危害程度显而易见.实验表明,糖尿病是一种无法根治的代谢性疾病,基本特征是机体内血糖浓度较高,根本病因是分泌的胰岛素不足,而胰腺 β 细胞作为体内唯一的一类分泌胰岛素的细胞,当其功能受到影响时,机体内糖代谢过程会随之发生变化^[1].所以,对胰腺 β 细胞功能性的研究成为学术领域和医疗领域一直关注的焦点.

在社会、自然以及生物范畴,同步现象随处可见.直到 1990 年, Pecora 和 Carroll 提出主稳定函数法探讨了同步机理^[2].在他们提出混沌同步的基础上,全球范围迅速掀起有关同步行为的研究热潮,极大推动这一方面的研究进程^[3-7].大量实验表明,生物系统中细胞的同步节律与信息传递和某些疾病有密切关系,定性地探讨生物中的节律行为对我们理解信息的传递和疾病的治疗具有重要作用^[8-11].对于胰腺 β 细胞来说,它们的节律放电,特别是同步行为,对胰岛素的分泌有着密不可分的影响^[12-15].由此可猜测,胰腺 β 细胞的同步与糖尿病

的病因有着一定联系.所以,研究耦合胰腺 β 细胞的同步行为,对于探究糖尿病的病理有理论意义,能够为糖尿病的治疗和预防提供进一步指导,具有潜在的应用前景.

近些年,一些相关研究者利用非线性动力学的理论和方法研究了胰腺 β 细胞的同步行发现了耦合胰腺 β 细胞同步与相关参数值的关系及其模型的多样性^[7,12-15].但由于其放电行为的复杂性和模型的高维性,相关的理论研究成果比较少,而数学方法的引入对于探讨神经系统工作机制中的普适性的原理和结论可能起到重要作用,因此我们在此利用矩阵不等式等数学理论来研究胰腺 β 细胞的同步行为,这方面的研究是很少见的.

本文利用三维多项式模型研究两个胰腺 β 细胞的同步现象.首先,通过一些数学相关知识得到线性化的偏差系统;然后,通过构建恰当的李雅普诺夫函数,利用线性矩阵不等式、求解微分不等式和矩阵理论,获得偏差系统的零解的全局渐近稳定和全局指数稳定的理论判据;最后,通过 MATLAB 的模拟仿真证明理论的有效性.

1 耦合胰腺 β 细胞同步性研究

1.1 胰腺 β 细胞的放电模型

胰腺 β 细胞的放电活动丰富且复杂,许多实验现象无法解释其中原理,需要建立数学模型通过数

2019-09-27 收到第 1 稿,2019-11-29 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(11502073,11972115),河南省教育厅重点项目(14A110004)和河南理工大学博士基金项目(B2012-107)

† 通讯作者 E-mail:yadiahah@dhu.edu.cn

学方法来进一步研究.为了理论分析的方便,本文选择较为简化的三维多项式模型来构建胰腺β细胞:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(u) - w - z \\ \dot{w} &= g(u) - 3 - w \\ \dot{z} &= \varepsilon(\beta(u - \alpha) - z) \end{aligned} \quad (1)$$

其中:

$$\begin{aligned} f(u) &= -\frac{a}{3}u^3 + aru^2 + (1 - a(r^2 - \eta^2))u \\ g(u) &= (1 - \frac{a}{3})u^3 + aru^2 - (2 + a(r^2 - \eta^2))u \end{aligned}$$

u 为胰腺β细胞的膜电位, w 为调节相关离子 (K^+ 或 Ca^{2+}) 浓度的变量, z 为慢电流, ε 为控制变量的速度,其它量均为常数.

令 $a=3, r=1, \eta=0.5, \varepsilon=0.003, \beta=4, \alpha=-1.6$, 则利用 MATLAB 画出的膜电位 u 的时间历程图为:

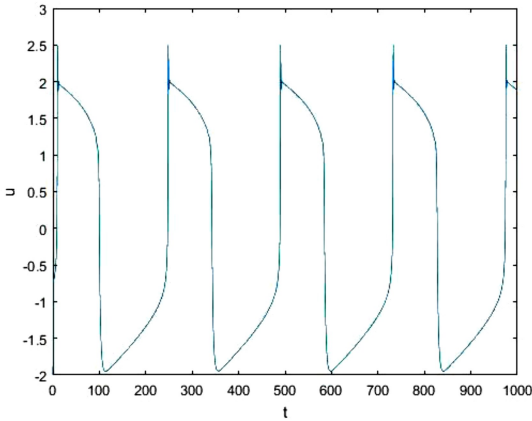


图1 胰腺β细胞膜电位的时间历程图

Fig.1 The temporal evolution of membrane potential in system(1)

从图1可以看出,胰腺β细胞的膜电位呈现出一定的周期性.

下面,我们分两种耦合情况分析耦合胰腺β细胞的同步行为.

1.2 双向电耦合胰腺β细胞的同步性研究

选用三维多项式模型,对两个双向电耦合的胰腺β细胞进行同步性研究,示意图如下:

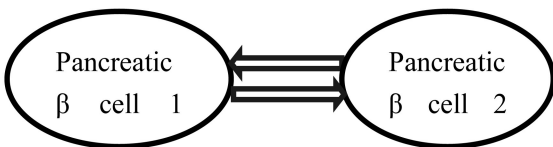


图2 两个双向线性耦合胰腺β细胞

Fig.2 Two-way directional electrically coupled pancreatic β cells

由式(1)设胰腺β细胞1的系统为:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= f(u_1) - w_1 - z_1 + k(u_2 - u_1) \\ \dot{w}_1 &= g(u_1) - 3 - w_1 \\ \dot{z}_1 &= \varepsilon(\beta(u_1 - \alpha) - z_1) \end{aligned} \quad (2)$$

胰腺β细胞2的系统为:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= f(u_2) - w_2 - z_2 + k(u_1 - u_2) \\ \dot{w}_2 &= g(u_2) - 3 - w_2 \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon(\beta(u_2 - \alpha) - z_2) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, α 为常数, k 为耦合强度.

令 $e_1 = u_1 - u_2, e_2 = w_1 - w_2, e_3 = z_1 - z_2$, 则式(2)减去式(3)得到的偏差系统为:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= f'(\zeta)e_1 - e_2 - e_3 - 2ke_1 \\ \dot{e}_2 &= g'(\xi)e_1 - e_2 \\ \dot{e}_3 &= \varepsilon\beta e_1 - \varepsilon e_3 \end{aligned} \quad (4)$$

根据拉格朗日中值定理得:

$$\begin{aligned} f'(\zeta)e_1 &= f(u_1) - f(u_2) \\ g'(\xi)e_1 &= g(u_1) - g(u_2) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &= -a\zeta^2 + 2ar\zeta + (1 - a(r^2 - \eta^2)) \\ g'(\xi) &= (3 - a)\xi^2 + 2ar\xi - (2 + a(r^2 - \eta^2)) \end{aligned}$$

由于 ζ 和 ξ 介于 u_1 和 u_2 之间, 则 ζ 和 ξ 是有界的; 对于 w 与 z , 只要估计器合适就可以被估计出来, 所以系统同步与耦合强度的关系是可求的.

引理1^[16] (Schur 补) 对给定的对称矩阵

$$S_{n \times n} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{pmatrix}$$

其中 S_{11} 是 $r \times r$ 维的, 以下三个条件是等价的:

- (i) $S < 0$;
- (ii) $S_{11} < 0, S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$;
- (iii) $S_{22} < 0, S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$.

引理2^[16-18] 如果对方程组(4)可以找到一个

定义正函数 $V(x)$, 其通过(4)的全导数 $\frac{dV}{dt}$ 为定负的, 则方程组(4)渐近稳定.

定义1^[19] 任意给定系统(2)初始值 $(u_1(t_0), w_1(t_0), z_1(t_0))$, 系统(3)的初始值 $(u_2(t_0), w_2(t_0), z_2(t_0))$, 如果式(4)的零解满足如下不等式:

$$e_{11}^2(t) + e_{12}^2(t) + e_{13}^2(t) \leq k(\|e(t_0)\|) e^{-\alpha(t-t_0)} \quad (5)$$

式中, $\alpha > 0, k(\|e(t_0)\|)$ 为一个依赖于 $\|e(t_0)\|$

的常数,那么式(4)的零解是全局指数稳定的,这里称系统(2)和系统(3)全局指数同步。

定理 1 任意给定系统(2)、(3)的初始值,分别为 $(u_1(t_0), w_1(t_0), z_1(t_0))$ 、 $(u_2(t_0), w_2(t_0), z_2(t_0))$,如果式(4)中的 k 满足如下不等式: $k > M/2 + (N-1)^2/8$ 。

其中:

$$\begin{aligned} M &= \max | -a\zeta^2 + 2ar\zeta + (1-a(r^2-\eta^2)) | \\ N &= \max | (3-a)\xi^2 + 2ar\xi - (2+a(r^2-\eta^2)) | \\ \min(u_1, u_2) &< \zeta \\ \xi &< \max(u_1, u_2) \end{aligned}$$

则系统(4)的零解全局渐近稳定,称系统(2)和系统(3)全局渐近同步。

证明:

针对系统(4),先构造一个恰当的 Laypunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \left(e_1^2 + e_2^2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} e_3^2 \right) = (e_1, e_2, e_3) P (e_1, e_2, e_3)^T \quad (6)$$

式中, $V(t)$ 是正定的, $P = \text{diag} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon\beta} \right)$, 则 V 对时间 t 的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} \dot{e}_3 e_3 = (f'(\zeta) e_1 - e_2 - e_3 - \\ &2ke_1) e_1 + (g'(\xi) e_1 - e_2) e_2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} (\varepsilon\beta e_1 - \varepsilon e_3) e_3 = \\ &-(2k - f'(\zeta)) e_1^2 - e_2^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (g'(\xi) - 1) e_1 e_2 \leq \\ &-(2k - M) e_1^2 - e_2^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (N-1) e_1 e_2 \leq -(2k - M) \\ &|e_1|^2 - |e_2|^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (N-1) |e_1| |e_2| \leq \\ &(|e_1|, |e_2|, |e_3|) \mathbf{A} (|e_1|, |e_2|, |e_3|)^T \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2k+M & \frac{N-1}{2} & 0 \\ \frac{N-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}$$

由已知条件 $k > M/2 + (N-1)^2/8$ 和引理 1 知 $\mathbf{A} < \mathbf{0}$, 从而得到: $\frac{dV}{dt} < 0$. 再根据引理 2 得: 系统(4)的零解是全局渐近稳定的, 则系统(2)和系统(3)全局渐

近同步。

如果 $A < 0$, 则 A 的最大特征值小于 0, 进一步, 我们还可以得出如下定理。

定理 2 任意给定系统(2)、(3)的初始值, 分别为 $(u_1(t_0), w_1(t_0), z_1(t_0))$ 、 $(u_2(t_0), w_2(t_0), z_2(t_0))$, 如果式(4)中的 k 满足如下不等式:

$$\begin{aligned} k &> M/2 + (N-1)^2/8. \text{其中:} \\ M &= \max | -a\zeta^2 + 2ar\zeta + (1-a(r^2-\eta^2)) | \\ N &= \max | (3-a)\xi^2 + 2ar\xi - (2+a(r^2-\eta^2)) | \\ \min(u_1, u_2) &< \zeta \\ \xi &< \max(u_1, u_2) \end{aligned}$$

则系统(4)的零解全局指数稳定, 称系统(2)和系统(3)全局指数同步。

证明: 在定理 1 的基础上, 该定理的证明比较容易, 过程如下:

同样地, 针对系统(4), 先构造一个恰当的 Laypunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \left(e_1^2 + e_2^2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} e_3^2 \right) = (e_1, e_2, e_3) P (e_1, e_2, e_3)^T \quad (8)$$

式中: $V(t)$ 是正定的, $P = \text{diag} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\varepsilon\beta} \right)$. 假定 $\lambda_{\min}(P)$ 为矩阵 P 的最小特征值, $\lambda_{\max}(P)$ 为矩阵 P 的最大特征值, 则 V 对时间 t 的导数:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} \dot{e}_3 e_3 = (f'(\zeta) e_1 - e_2 - e_3 - \\ &2ke_1) e_1 + (g'(\xi) e_1 - e_2) e_2 + \frac{1}{\varepsilon\beta} (\varepsilon\beta e_1 - \varepsilon e_3) e_3 = \\ &-(2k - f'(\zeta)) e_1^2 - e_2^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (g'(\xi) - 1) e_1 e_2 \leq \\ &-(2k - M) e_1^2 - e_2^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (N-1) e_1 e_2 \leq -(2k - M) \\ &|e_1|^2 - |e_2|^2 - \frac{1}{\beta} e_3^2 + (N-1) |e_1| |e_2| \leq \\ &(|e_1|, |e_2|, |e_3|) \mathbf{A} (|e_1|, |e_2|, |e_3|)^T \leq \\ &\lambda_{\max}(\mathbf{A}) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2k+M & \frac{N-1}{2} & 0 \\ \frac{N-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\beta} \end{pmatrix}, \text{且 } \lambda_{\max}(\mathbf{A}) \text{ 为矩}$$

阵 \mathbf{A} 的最大特征值。

由已知条件 $k > M/2 + (N-1)^2/8$ 和引理 1 知 $A < 0$, 故 $\lambda_{\max}(A) < 0$, 从而

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\leq \lambda_{\max}(A) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ &\leq \lambda_{\max}(A) \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)} [\lambda_{\max}(P) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2)] \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)} V \end{aligned}$$

通过解其微分不等式得:

$$V(X(t)) \leq V(X(t_0)) e^{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)}(t-t_0)}$$

因为

$$\lambda_{\min}(P) (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \leq V(X(t))$$

所以

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \leq \frac{V(X(t))}{\lambda_{\min}(P)} \leq \frac{V(X(t_0))}{\lambda_{\min}(P)} e^{\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(P)}(t-t_0)} \quad (10)$$

其中: $X(t) = (e_1(t), e_2(t), e_3(t))$, $X(t_0) = (e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0))$, 由不等式 (10) 和定义 1 知: 偏差系统 (4) 的零解是全局指数稳定的, 从而系统 (2) 和系统 (3) 全局指数同步。

1.3 单向耦合胰腺 β 细胞的同步性研究

同样地, 选用三维多项式模型, 对两个单向耦合的胰腺 β 细胞进行同步性研究。无论是考虑胰腺 β 细胞 2 对胰腺 β 细胞 1 的影响还是考虑胰腺 β 细胞 1 对胰腺 β 细胞 2 的影响, 它们得到的偏差系统是相同的, 相应地, 其同步行为也是一致的, 所以本文仅考虑其中一种情形下的同步行为。其示意图如下所示:

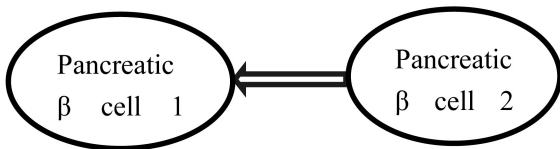


图 3 单向电耦合胰腺 β 细胞

Fig.3 Unidirectional electrically coupled pancreatic β cells

由式 (1) 设胰腺 β 细胞 1 的系统为:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= f(u_1) - w_1 - z_1 + k(u_2 - u_1) \\ \dot{w}_1 &= g(u_1) - 3 - w_1 \\ \dot{z}_1 &= \varepsilon(\beta(u_1 - \alpha) - z_1) \end{aligned} \quad (11)$$

胰腺 β 细胞 2 的系统为:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= f(u_2) - w_2 - z_2 \\ \dot{w}_2 &= g(u_2) - 3 - w_2 \\ \dot{z}_2 &= \varepsilon(\beta(u_2 - \alpha) - z_2) \end{aligned} \quad (12)$$

式中: α 为常数; k 为耦合强度。

令 $e_1 = u_1 - u_2$, $e_2 = w_1 - w_2$, $e_3 = z_1 - z_2$, 则式 (11) 减去式 (12) 得到的偏差系统为:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 &= f'(\zeta) e_1 - e_2 - e_3 - k e_1 \\ \dot{e}_2 &= g'(\zeta) e_1 - e_2 \\ \dot{e}_3 &= \varepsilon \beta e_1 - \varepsilon e_3 \end{aligned} \quad (13)$$

相应地, 也得到了系统 (13) 的全局渐近同步和全局指数同步的理论判据。

定理 3 任意给定系统 (11)、(12) 的初始值, 分别为 $(u_1(t_0), w_1(t_0), z_1(t_0))$ 、 $(u_2(t_0), w_2(t_0), z_2(t_0))$ 。如果式 (13) 中的 k 满足如下不等式:

$$k > M + (N-1)^2/4.$$

其中:

$$\begin{aligned} M &= \max | -a\zeta^2 + 2ar\zeta + (1-a(r^2 - \eta^2)) | \\ N &= \max | (3-a)\xi^2 + 2ar\xi - (2+a(r^2 - \eta^2)) | \\ \min(u_1, u_2) &< \zeta, \xi < \max(u_1, u_2) \end{aligned}$$

则系统 (13) 的零解全局渐近稳定, 称系统 (11) 和系统 (12) 全局渐近同步。

定理 4 任意给定系统 (11) (12) 的初始值, 分别为 $(u_1(t_0), w_1(t_0), z_1(t_0))$ 、 $(u_2(t_0), w_2(t_0), z_2(t_0))$, 如果式 (13) 中的 k 满足如下不等式:

$$k > M + (N-1)^2/4.$$

其中:

$$\begin{aligned} M &= \max | -a\zeta^2 + 2ar\zeta + (1-a(r^2 - \eta^2)) |, \\ N &= \max | (3-a)\xi^2 + 2ar\xi - (2+a(r^2 - \eta^2)) |, \\ \min(u_1, u_2) &< \zeta, \xi < \max(u_1, u_2), \end{aligned}$$

则系统 (13) 的零解全局指数稳定, 称系统 (11) 和系统 (12) 全局指数同步。

其证明过程与双向耦合情况相似, 在此不再赘述。

2 数值模拟

双向耦合胰腺 β 细胞同步性分析的仿真结果: 令胰腺 β 细胞 1 系统的初始条件为 (0.4, 0.7, 1.0), 胰腺 β 细胞 2 系统的初始条件为 (0.45, 0.7, 1.0), 用 MATLAB 对其仿真, 得到如下结果。

若两个系统没有发生耦合时, 即 $k = 0$, 则偏差系统 (4) 关于时间 t 的变化图如下所示:

若按照定理 1 和定理 2 的方法, 加上耦合强度

k 后,其仿真结果如图 5 所示.此时, $M = 0.8425, N = 1.85$, 根据 M 和 N 的值算出 k 的范围,从中选取 $k = 2.4$ 使其达到同步.

从图 5 可以看出,系统 (2) 和系统 (3) 达到全局渐近同步,进一步验证定理 1 的正确性.

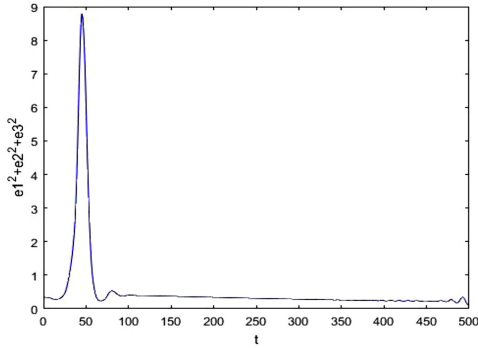


图 4 无耦合的偏差系统 (4) 的时间历程图

Fig.4 The temporal evolution of the error system (4) without electrical coupling

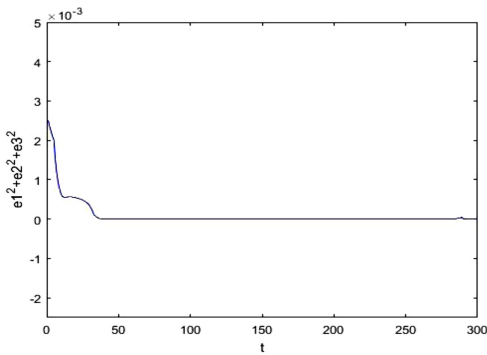


图 5 有耦合的偏差系统 (5) 的时间历程图

Fig.5 The temporal evolution of the error system (4) with bidirectional electrical coupling

最后,对耦合后的偏差系统时间历程图 (即图 5) 进行拟合,令

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = f(t)$$

仿真结果如图 6 所示.

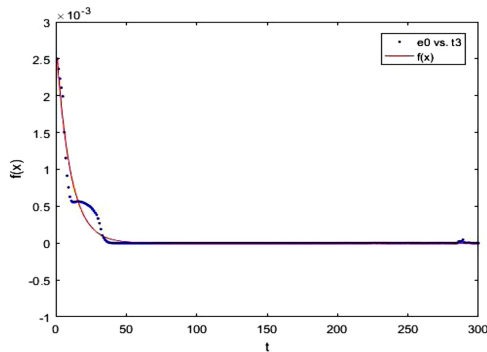


图 6 偏差系统 (4) 时间历程的拟合图

Fig.6 Curve fitting for the temporal evolution of the error system (4) with bidirectional electrical coupling

曲线的拟合结果为: $f(x) = e^{-5.8884 - 0.1007t}$. 由此可见, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ 呈现很好的指数形式,由定义 1 知系统 (4) 的零解全局指数稳定,故系统 (2) 和系统 (3) 全局指数同步,进一步证明定理 2 的正确性.

单向耦合胰腺 β 细胞同步性分析的仿真结果:

为了研究的方便,把单向耦合的初始条件与双向耦合的初始条件设为一样.其仿真结果如图 7 所示.此时, $M = 0.8425, N = 1.85$, 根据 M 和 N 的值算出 k 的范围,从中选取 $k = 5.0$ 使其同步.

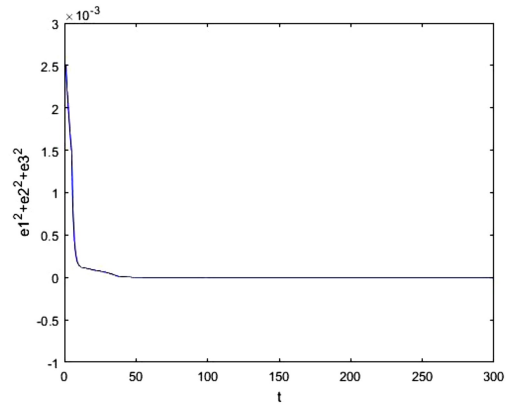


图 7 单向电耦合后的偏差系统 (13) 的时间历程图

Fig.7 The temporal evolution of the error system (13) with unidirectional electrical coupling

从图 7 可以看出,系统 (11) 和系统 (12) 达到全局渐近同步,进一步验证定理 3 的正确性.

最后,对耦合后的偏差系统时间历程图进行拟合,令 $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$, 仿真结果如图 8 所示.

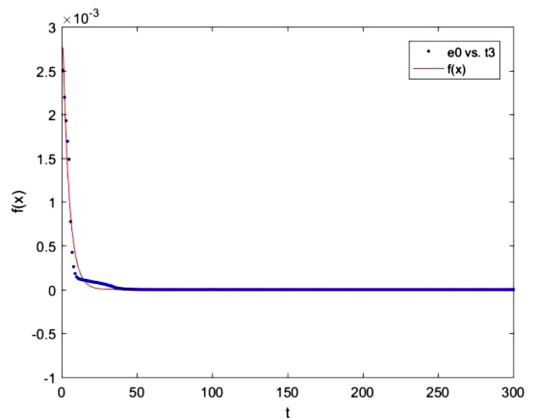


图 8 偏差系统 (13) 时间历程的拟合图

Fig.8 Curve fitting for the temporal evolution of the error system (13) with unidirectional electrical coupling

其中,曲线的拟合结果为: $f(x) = e^{-5.8451 - 0.1143t}$. 由此可见, $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$ 呈现很好的指数形式,由定义 1 知系统 (13) 的零解全局指数稳定,故系统 (11) 和系统

(12)全局指数同步,进一步验证定理4的正确性.

3 结论

本文讨论两个电耦合胰腺 β 细胞的同步动力学行为.从上述讨论看出,对两个胰腺 β 细胞来说,无论是双向耦合还是单向耦合,在一定的耦合强度 k 下都呈现出了同步行为.通过比较,双向电耦合比单向电耦合方式更容易令耦合胰腺 β 细胞同步.因此从理论上来说,胰腺 β 细胞的连接方式对耦合系统的同步行为有一定影响,也势必影响到耦合网络的全局行为.本文的研究丰富了同步动力学理论,也为研究更为复杂的胰腺 β 细胞网络的同步机理打下基础.

参 考 文 献

- 詹璇.对胰腺 β 细胞电活性调控机制的研究及其动力学分析[博士学位论文].武汉:华中师范大学,2008 (Zhan X. Study on the regulation mechanism of β cell electrical activity in pancreas and its kinetic analysis[Ph.D Thesis]. Wuhan: Huazhong Normal University, 2008 (in Chinese))
- Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 1990,64:821~824
- 王青云.神经元耦合系统的同步动力学.北京:科学出版社,2008 (Wang Q Y. Synchronized dynamics of Coupling system. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese))
- 王亚龙,李玉叶,古华光.网络噪声和振子数量对同步化行为的影响.动力学与控制学报,2011,9(3):271~276 (Wang Y L, Li Y Y, Gu H G. The influences of noise and oscillator number on synchronization of the network. *Journal of Dynamics and Control*, 2011,9(3):271~276 (in Chinese))
- Gu H G, Pan B B, Chen G R, et al. Biological experimental demonstration of bifurcations from bursting to spiking predicted by theoretical models. *Nonlinear Dynamics*, 2014,78(1):391~407
- Zhao Y, Feng Z S. Desynchronization in synchronous multi-coupled chaotic neurons by mix-adaptive feedback control. *Journal of Biological Dynamics*, 2013,7(1):1~10
- 赵勇,吴婵媛,孟盼.三个电耦合神经元系统同步分析和模拟.动力学与控制学报,2016,14(3):269~275 (Zhao Y, Wu C Y, Meng P. Synchronous analysis and simulation of three electrically coupled neuron systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2016,14(3):269~275 (in Chinese))
- Park C, Worth R M, Rubchinsky L L. Neural dynamics in Parkinsonian brain: The boundary between synchronized and nonsynchronized dynamics. *Physical Review E*, 2011,83(4):042901
- Winfrey A T. The geometry of biological time. New York: Springer-Verlag, 2000
- 刘晶,曹秦禹,王子剑,等.耦合 Pre-Botzinger 复合体中神经元的反相簇放电模式及同步研究.动力学与控制学报,2017,15(1):75~79 (Liu J, Cao Q Y, Wang Z J, et al. Study on anti-phase bursting mode and synchronization of coupled neurons in pre-botzinger complex. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(1):75~79 (in Chinese))
- 贾祥宇,吴禹.动力学与生命科学的交叉研究进展综述.动力学与控制学报,2017,15(3):279~288. (Jia X Y, Wu Y. An overview on progress of interdisciplinary studies of dynamics and life sciences. *Journal of Dynamics and Control*, 2017,15(3):279~288 (in Chinese))
- Fendler B, Zhang M, Satin L, et al. Synchronization of pancreatic islet oscillations by intrapancreatic ganglia: a modeling study. *Biophysical Journal*, 2009,97(3):722~729
- 杨卓琴,张璇.三个不同时间尺度的电耦合模型的组合簇放电.物理学报,2013,62(17):112~119 (Yang Z Q, Zhang X. Combined cluster discharge of electrically coupled models at three different time scales. *Journal of Physics*, 2013,62(17):112~119 (in Chinese))
- 刘深泉,汪净.胰腺 β 细胞的簇放电分析及其同步研究.江西师范大学学报,2017,41(1):6~14 (Liu S Q, Wang J. Cluster discharge analysis of pancreatic β cells and its synchronization. *Journal of Jiangxi Normal University*, 2017,41(1):6~14 (in Chinese))
- Pernarowski M. Fast and slow subsystems for a continuum model of bursting activity in the pancreatic islet. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1998,58(5):1667~1687
- 廖晓昕.稳定性的理论、方法和应用(第2版).武汉:华中科技大学出版社,2010 (Liao X X. Theory, method and application of stability (2nd ed.). Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2010 (in Chinese))
- 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程(第三版).北京:高等教育出版社,2006 (Wang G X, Zhou Z M, Zhu S M, et al. Ordinary differential equation (Third Edition). Beijing: Higher Education Press, 2006 (in Chinese))
- 任斌,程良伦.李雅普诺夫稳定性理论中V函数的构造研究.自动化与仪器仪表,2009,(2):8~10 (Ren B, Cheng L L. Research on the construction of V function in lyapunov stability theory. *Automation and Instrumentation*, 2009,(2):8~10 (in Chinese))
- 贾秋菊,陈增强.Hindmarsh-Rose 神经元全局指数同步.吉林大学学报,2011,41(1):236~238 (Jia Q J, Chen Z Q. Hindmarsh-Rose neuron global exponential synchronization. *Journal of Jilin University*, 2011,41(1):236~238 (in Chinese))

SYNCHRONOUS ANALYSIS OF ELECTRICALLY COUPLED PANCREATIC β CELLS *

Zhao Yong¹ Wu Junmei¹ Yang Meichen² Han Fang^{2†}

(1. School of Mathematics and Information, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

(2. School of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract Insulin is secreted from the pancreatic beta cell, accompanied by biological discharge activities. For the diversity of mathematical models about discharge behavior, we choose a representative three-dimensional polynomial model to study synchronization of two pancreatic β cells in electrical coupling for the convenience of theoretical analysis. By constructing the appropriate Lyapunov function, using the linear matrix inequality, solving the differential inequality, we obtain theoretical criteria of global asymptotically synchronization and global exponentially synchronization. Numerical simulations show feasibility of theoretical results by applying MATLAB.

Key words pancreatic β cells, three-dimensional polynomial model, behaviors of synchronicity, Lyapunov function, LMI

Received 27 September 2019, revised 29 November 2019.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (11502073, 11972115) and Scientific Research Fund of Henan Provincial Education Department (14A110004) and Doctoral Foundation of Henan Polytechnic University (B2012-107)

† Corresponding author E-mail: yadiahhan@dhu.edu.cn