

# 一类几何非线性干摩擦振子的分岔研究<sup>\*</sup>

曾超<sup>†</sup> 谢建华

(西南交通大学 力学与工程学院, 成都 610031)

**摘要** 考虑了一个几何非线性干摩擦振子. 介绍了如何利用事件驱动方法模拟该类具有不连续矢量场的 Filippov 系统, 所介绍的算法是基于 Filippov 方法的扩展, 从而可以精确地检测出滑动运动区域的入口和出口. 用了两种不同的 Poincaré 截面, 表示了随参数变化, 不同类型含滑动过程的周期运动之间的转化过程, 研究了不同类型的滑动分岔和周期倍化分岔, 并发现了在倍化过程中多滑动段的存在.

**关键词** 事件驱动, 干摩擦, Filippov 系统, 滑动分岔, 几何非线性

DOI: 10.6052/1672-6553-2020-042

## 引言

在处理具有状态跳跃(由于机械系统中的冲击)和不连续矢量场(有干摩擦)的系统时, 所用方法与光滑系统存在明显的差异. 本文将讨论后一种系统, 文献[1, 2]将其称为 Filippov 系统. Filippov 系统最重要的特征, 即存在运动被限制在状态空间的某个子集的可能性. Bernardo 等<sup>[3]</sup>将这种受约束的运动称为滑动运动(Galvanetto 和 Bishop<sup>[4]</sup>将干摩擦系统中的这种运动称为粘滞运动). Bernardo 等<sup>[5]</sup>根据 Filippov 系统的极限环与滑动边界相互作用定义了四种不同的余唯一滑动分岔; Piironen 和 Kuznetsov<sup>[6]</sup>提出了一种精确计算 Filippov 系统滑动运动的事件驱动方法(Event-Driven Method), 这种方法可直接求解滑动运动, 并自动在自由运动和滑动运动之间切换. Christian 等<sup>[7]</sup>基于事件驱动方法提出了一种快速计算平面 Filippov 系统吸引域的动态胞映射算法. 秦志英等<sup>[8]</sup>研究了一个干摩擦 Duffing 振子, 基于两种 Poincaré 映射研究了四种不同的余唯一滑动分岔. 谢建华等<sup>[9]</sup>利用 Poincaré 方法研究了一类单自由度自治的干摩擦振子的亚临界 Hopf 分岔. 秦琅, 谢建华<sup>[10]</sup>运用 Melnikov 方法得到了一类几何非线性干摩擦振子出现了马蹄形混沌的参数域. 本文同样研究一类单自由度干摩擦振子, 且干摩擦模型为更接近工程实际的分段非线性干摩擦模型, 并利用事件驱动方法对其不同的滑动

动力学行为进行研究.

本文先对几何非线性干摩擦振子力学模型做一个简要介绍; 然后对 Filippov 系统中的滑动分岔(sliding bifurcation)和分析滑动分岔的事件驱动方法做一个简要介绍, 并利用该方法对该模型的若干动力学的行为进行了具体的研究.

## 1 力学模型

考虑如图 1 所示的力学模型, 质量为  $M$  的物块位于速度恒定为  $V_c$  的传送带上运动, 并受两刚度为  $K$  的弹簧和阻尼系数为  $C$  的阻尼约束. 弹簧和阻尼均位于同一水平面, 相对位置如图 1(b), 物块受简谐力  $F\sin(\Omega T)$  及物块与皮带轮间摩擦力  $F_f(\dot{Y} - V_c)$  作用. 本文选取分段非线性的干摩擦力模型<sup>[7]</sup>, 即:

$$F_f(\dot{Y} - V_c) = \operatorname{sgn}(\dot{Y} - V_c) \left( \frac{\alpha}{1 + \gamma |\dot{Y} - V_c|} + \beta + \eta(\dot{Y} - V_c)^2 \right) \quad (1)$$

其中,  $\dot{Y}$  表示物块的速度,  $\alpha, \beta, \gamma, \eta$  为干摩擦特性参数. 弹簧原长  $L_0$ , 当  $Y = 0$  时弹簧长度为  $L$ , 此时弹簧内力为  $T_0$ . 当  $T_0 > 0$  时, 弹簧受拉;  $T_0 < 0$  时, 弹簧受压,  $L_0 = L - T_0/K$ . 在图示位置时, 弹簧伸长  $\sqrt{L^2 + Y^2} - (L - T_0/K)$ , 物块所受水平力为  $-CY -$

2019-11-30 收到第 1 稿, 2020-03-17 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助重点项目(11732014)

<sup>†</sup> 通讯作者 E-mail: zengchao99@126.com

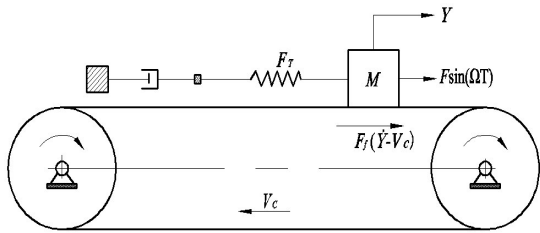
$F_f(\dot{Y} - V_c) + F_T + F \sin(\Omega T)$ , 其中  $F_T$  为两弹簧水平方向合力:

$$F_T = -2T \sin\theta$$

$$= -2K \left( \sqrt{L^2 + Y^2} - \left( L - \frac{T_0}{K} \right) \right) \left( \frac{Y}{\sqrt{L^2 + Y^2}} \right) \quad (2)$$

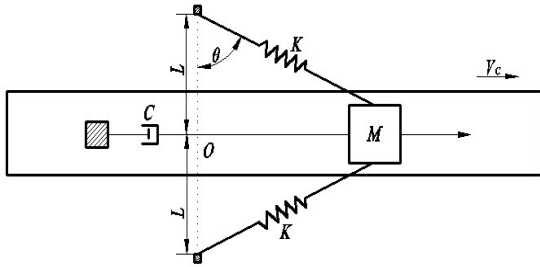
通过受力分析得出系统运动方程:

$$M\ddot{Y} = F_T - F_f(\dot{Y} - V_c) - C\dot{Y} + F \sin(\Omega T) \quad (3)$$



(a) 模型正视图

(a) Front view sketch of the model



(b) 模型俯视图

(b) Top view sketch of the model

图1 力学模型图

Fig.1 Mechanical model

引入变量  $y = Y/L$ ,  $\omega_0^2 = K/M$ ,  $c = C/(M\omega_0)$ ,  $v_c = V_c/L\omega_0$ ,  $f = F/KL$ ,  $\omega = \Omega/\omega_0$ ,  $t = \omega_0 T$ ,  $\delta = (KL - T_0)/(KL)$ , 将原系统无量纲化:

$$\ddot{y} = -2y - c\dot{y} + 2\delta \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + f \sin(\omega t) - f_f(\dot{y} - v_c) \quad (4)$$

其中,

$$f_f(\dot{y} - v_c) = \text{sgn}(\dot{y} - v_c) f_d$$

$$f_d = \frac{\alpha}{1 + \gamma|\dot{y} - v_c|} + \beta + \eta(\dot{y} - v_c)^2$$

令  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $x = (x_1, x_2)^T$  可得到如下几何非线性干摩擦振子的动力学方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - cx_2 + 2 \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + f \sin(\omega t) - f_f(x_2 - v_c) \end{cases} \quad (5)$$

## 2 事件驱动方法

研究 Filippov 系统动力学最直接得方法是数值模拟, 模拟过程中尽可能精确地求解任何非光滑事件的时间和位置是非常重要的. 所介绍的算法是基于 Filippov 方法的扩展, 以使滑动运动稳定并精确检测滑动区域的入口和出口. 这里选择的模拟 Filippov 系统的方法类似于混合系统方法, 对混合系统的积分包括离散映射和矢量场切换混合. 实际上, 在轨道到达一个切换面之前, 方程(5)给出初始值问题的解, 然后解会根据当时的切换点的状态进行切换.

### 2.1 事件区域

首先假设 Filippov 系统状态空间仅由两个区域组成, 即由切换面  $\Sigma$  分隔的区域  $S_1$  和  $S_2$ , 切换面由光滑标量函数  $h(x)$  定义, 即

$$\Sigma = \{x \in R^n | h(x) = x_2 - v_c = 0\} \quad (6)$$

其中,

$$\begin{cases} S_1 = \{x \in R^n | h(x) > 0\} \\ S_2 = \{x \in R^n | h(x) < 0\} \end{cases} \quad (7)$$

相空间  $S_1, S_2$  对应的向量场  $F_1, F_2$  分别为:

$$F_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 - cx_2 + 2 \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + f \sin(\omega t) - f_d \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ -2x_1 - cx_2 + 2 \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} + f \sin(\omega t) + f_d \end{pmatrix} \quad (9)$$

因此, 依照 Utkin<sup>[11]</sup> 等效, 滑动区域  $\Sigma_s$  中的矢量场  $F_s$  可表示为:

$$F_s(x) = \frac{F_1(x) + F_2(x)}{2} + \frac{F_2(x) - F_1(x)}{2} u(x) \quad (10)$$

其中,

$$u(x) = -\frac{\mathcal{L}_{F_1+F_2}(h)(x)}{\mathcal{L}_{F_2-F_1}(h)(x)} \quad (11)$$

其中,  $\mathcal{L}_{F_i}(h)(x) = \nabla h(x) \cdot F_i(x)$  是  $h(x)$  相对于矢量场  $F_i$  的 Lie 导数, 且  $-1 \leq u(x) \leq 1$ ,  $u(x)$  取 -1 或 +1 时分别对应滑动域  $\Sigma_s$  的边界  $\Sigma_s^+$  和  $\Sigma_s^-$ .

Bernardo 等人<sup>[5]</sup> 根据 Filippov 系统的极限环与滑动边界相互作用定义的四种不同的余维一滑动分岔: 图 2(a) 描述的是穿越滑动分岔 (Crossing-

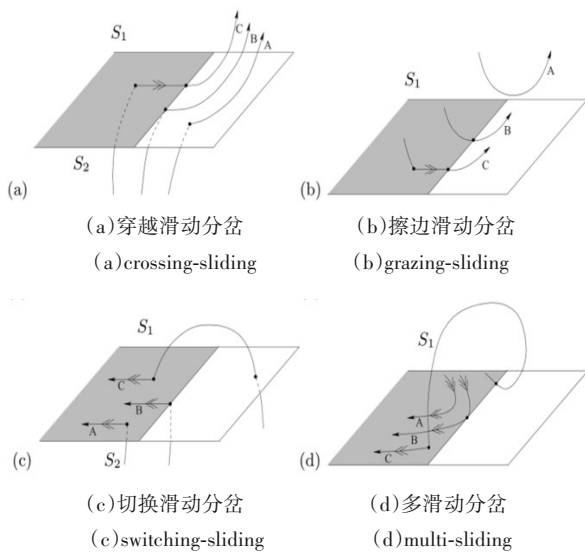
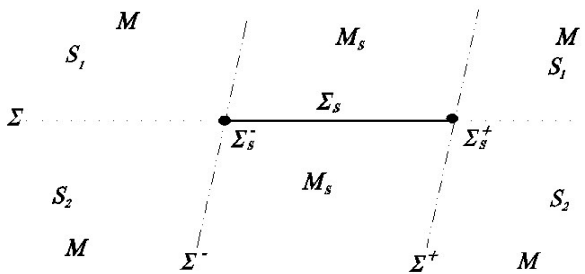


图2 四种滑动分岔的三维图解

Fig.2 Illustration in three dimensions of the four sliding bifurcation

Sliding Bifurcation); (b) 描述的是擦边滑动分岔 (Grazing-Sliding Bifurcation); (c) 描述的是切换滑动分岔 (Switching-Sliding Bifurcation); (d) 描述的是多滑动分岔 (Multi-Sliding Bifurcation)。

图3 状态空间在滑动面  $\Sigma_s$  附近划分的不同区域Fig.3 The different regions that the state space is divided into in a neighborhood of the sliding surface  $\Sigma_s$ 

此外,如图3所示,状态空间还可以被两个延伸的切面  $\Sigma^-$  和  $\Sigma^+$  分成两个区域  $M_s$  和  $M$ ,定义如下:

$$\begin{cases} \Sigma^+ = \{x \in R^n | u(x) = 1\} = \{x \in R^n | \mathcal{L}_{F_1}(h)(x) = 0\} \\ \Sigma^- = \{x \in R^n | u(x) = -1\} = \{x \in R^n | \mathcal{L}_{F_2}(h)(x) = 0\} \end{cases} \quad (12)$$

通过使用式(12),两个区域  $M_s$  和  $M$  定义为:

$$\begin{cases} M_s = \{x \in R^n | |u(x)| < 1\} \\ M = \{x \in R^n | |u(x)| \geq 1\} \end{cases} \quad (13)$$

这种划分为不相交的子区域使得数值算法的实现变的相对简单,并且减少了每次在到达切换面  $\Sigma$  时必须检查的事件数量.比如轨线在区域  $M_s$  内

到达切换面时,则默认为其在切换面上做滑动运动,只需精确检测其到达切换面的具体位置,不需要判断其是否会出现滑动运动,这样就减少了运算的时间.对于 Filippov 系统具体的事件函数介绍如下.

## 2.2 事件函数

2.1 节对 Filippov 系统的区域做了一个详细的划分.如果假设一个系统在每个区域总共有  $m$  个可能的事件,那么事件列表  $e(x, t)$  可以定义为:

$$e(x, t) = (e_1(x, t), \dots, e_m(x, t)) \quad (14)$$

其中每个元素  $e_k(x, t) \in R$  是事件函数.该事件函数定义了状态向量或时间可以到达的事件表面.

对于 Filippov 系统,主要的事件函数可定义为:

$$\begin{cases} e_1(x, t) = h(x) \\ e_2(x, t) = \mathcal{L}_{F_1}(h)(x) \\ e_3(x, t) = \mathcal{L}_{F_2}(h)(x) \end{cases} \quad (15)$$

其中  $e_1(t, x)$  检测轨线和切换面  $\Sigma$  之间的交叉点,检查滑动运动是否存在,同时  $e_2(t, x)$  或  $e_3(t, x)$  分别跟踪进入  $S_1$  或  $S_2$  的滑动流.该算法的大致流程可描述如下:

(1) 切换面  $\Sigma$  以外区域(在  $S_1$  或  $S_2$  内)的轨线由标准的数值积分程序及时积分获得.

(2) 当轨迹达到  $\Sigma$  时,它与切换面的交点被精确定位,并根据其是否位于  $M_s$  区域来决定轨线是否出现滑动运动.

(3) 若出现滑动运动,  $\Sigma_s$  上的等效矢量场用于及时积分滑动模式解.

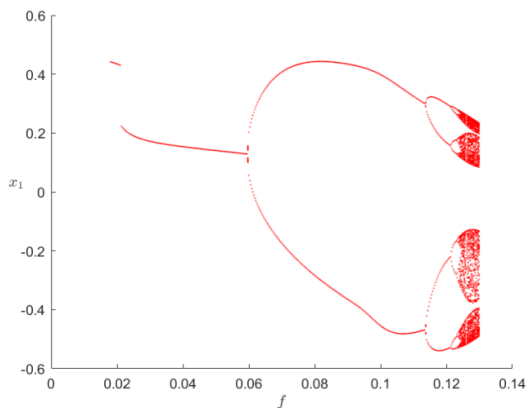
(4) 通过监测横截性条件和 Filippov 矢量场的适当数值扩展(更多细节见 Piiroinen<sup>[6]</sup>)来避免计算过程可能出现的数值漂移.

(5) 在  $\Sigma_s$  中,事件函数  $e_2, e_3$  不断监控并决定轨线是否继续在切换面上运动或离开切换边界.

## 3 数值模拟

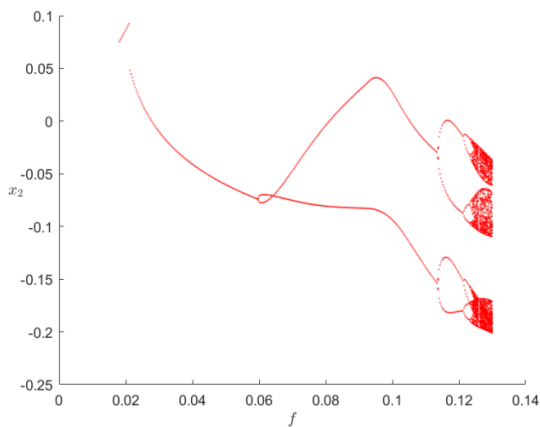
分析 Filippov 系统动力学的第一种方法通常是创建不同参数的分岔图,该图可以显示给定参数范围的稳定吸引子.在本文中,参数取为  $c = 0.1, \omega = 0.6, \delta = 1, \alpha = 0.05, \eta = 0.01, \gamma = 3, \beta = 0.05, v_c = 0.1, f = 0.018 \sim 0.13$ .对于  $f$  的每个值,系统被积分 500 个外激励周期(对应于积分时间  $500 \times 2\pi/\omega$ );在最后的 100 个周期中,每次轨道到达由函数  $h_p(x) = x_3(\text{mod}2\pi) = 0$  定义的时间 Poincaré 截面时,记录变

量  $x_1$  和  $x_2$ , 绘制相应的图形, 可得到如图 4 所示的关于位移和速度的分岔图.



(a) 位移分岔图

(a) Displacement bifurcation diagram



(b) 速度分岔图

(b) Velocity bifurcation diagram

图 4 时间 Poincaré 截面分岔图

Fig.4 Bifurcation diagram of time Poincaré section

从图 4 中可以看出, 在参数  $f$  的变化下系统先发生了多次周期倍化分岔. 鉴于取时间 Poincaré 截面只是描述系统轨线周期的信息, 对于滑动分岔的研究可取由式 (6) 定义的切换面为 Poincaré 截面. 虽然取切换面为 Poincaré 截面, 但这里只记录轨线到达切换面和离开切换面时的位移  $x_1$ , 可得如下的关于位移的分岔图:

在图 5 中, 红色边界代表由事件驱动方法检测到的到达切换面的事件— $e_1$ , 蓝色代表由事件驱动方法检测到在有一段粘滞运动后离开切换面的事件— $e_2$  或  $e_3$ . 对于不同区间中的  $f$ , 没有红色边界的区域意味着相轨线未到达切换面, 即无滑动分岔发生, 也没有穿越切换面, 只在  $S_2$  中运动, 如图 5 最左侧所示; 既有红色边界又有蓝色边界, 则意味着出

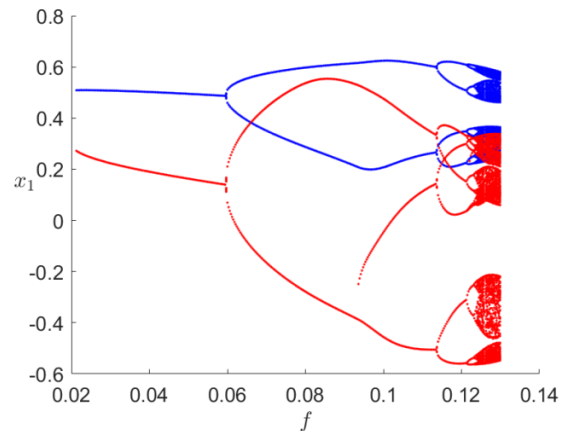


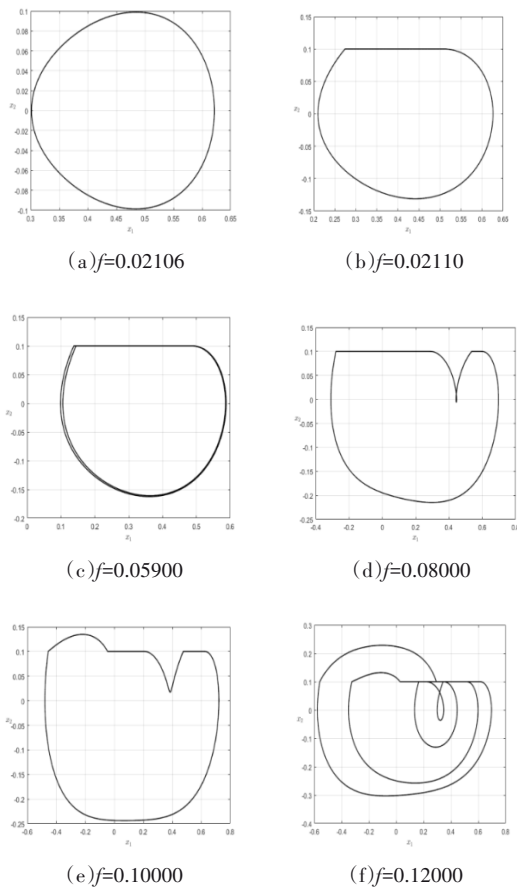
图 5 切换面 Poincaré 截面分岔图

Fig.5 Bifurcation diagram of Poincaré section which is switching surface

现了滑动运动, 即随着  $f$  的增加发生了擦边滑动分岔, 当然, 这里也有不同的情况出现. 对同一个  $f$ , 红色边界和蓝色边界数目相同的情况则意味着轨线到达切换面就开始在切换面上作滑动运动, 而不会越过切换面; 在  $f=0.021 \sim 0.059$  时, 红色边界和蓝色边界数目都为 1, 只有一次滑动运动出现; 在  $f=0.059 \sim 0.094$  时, 红色边界和蓝色边界数目都为 2, 这是因为周期倍化过后, 出现了两次粘滞滑移运动, 需要说明的一点是, 这里出现的两次粘滞滑移运动与多滑动分岔出现多滑动段是不一样的, 多滑动分岔的两个或多个滑动段是由一个或多个自由的、非滑动演化的区域分隔开, 而这里是没有的这样一个区域的, 也就是说这里没有多滑动分岔发生; 红色边界和蓝色边界会出现数目不同的情况, 这是因为在  $f$  变化的过程中发生了穿越滑动分岔或切换滑动分岔; 当  $f=0.094 \sim 0.1125$  时, 红色边界和蓝色边界的数目分别为 3 和 2, 且在  $f=0.094$  时发生了切换滑动分岔. 切换面 Poincaré 截面分岔图很清楚地展示了从无粘滞滑移到有粘滞滑移、从未穿越切换面到穿越切换面的整个滑动分岔的过程.

图 6 展示了参数  $f$  变化时不同类型周期运动的相图. (a) 表示没有到达切换面的运动, 且即将与切换面相切. (a) 所示的无穿越轨线到 (b) 中无穿越有一个滑动段轨线是在参数变化下发生了擦边滑动分岔; (b) 到 (c) 是在参数变化下发生了周期倍化分岔, 且同时出现了两个滑动段, 但这并没有发生多滑动分岔, 而是由周期倍化所导致的; (c) 到 (d) 是在参数变化下两个滑动段分开; (d) 到 (e) 是在参数变化下左侧的滑动边界发生了切换滑动分岔; (f)



图6  $f$ 变化时周期运动的相图Fig.6 Phase diagram of periodic motion when  $f$  changes

所示的周期四轨道是(e)中的周期二轨道发生了周期倍化分岔。

#### 4 结论

本文对 Filippov 系统、滑动分岔、事件驱动方法作了一个简要介绍。事件驱动方法直接解决了滑动流,并自动在自由运动和滑动运动之间切换。利用该方法对一类几何非线性干摩擦振子的动力学行为做了数值模拟,研究了其在参数变化下不同类型的分岔行为。利用两种不同的 Poincaré 映射做了不同类型的分岔图。时间 Poincaré 映射反映了系统轨线的周期性,但无法真实反映滑动分岔过程中的动力学行为。故引入了切换面 Poincaré 映射,并记录事件驱动方法检测到的轨线在滑动区域的入口和出口时的位移,做了参数  $f$  变化下的关于位移的滑动分岔图,同时给出了参数变化下不同类型的包含滑动运动的周期轨线的相图,分析了该振子丰富的

动力学行为,展示了该系统在参数变化下的周期倍化分岔以及3种类型的滑动分岔,以及在倍化过程中多滑动段的存在,无多滑动分岔发生。

#### 参 考 文 献

- 1 Filippov A F. Differential equations with discontinuous righthand sides. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1988:67~75
- 2 Leine R I, Nijmeijer H. Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems. Berlin: Springer-Verlag, 2004:26~38
- 3 Bernardo M D, Kowalczyk P, Nordmark A. Bifurcations of dynamical systems with sliding: derivation of normal-form mappings. *Physica D*, 2002, 170(3-4):175~205
- 4 Galvanetto U, Bishop S R. Dynamics of a simple damped oscillator undergoing stick-slip vibrations. *Meccanica*, 1999, 34(5):337~347
- 5 Bernardo MD, Budd C, Champneys A R. Piecewise-smooth dynamical systems: Theory and applications. London: Springer-Verlag, 2008:354~359
- 6 Piiroinen P T, Kuznetsov Y A. An event-driven method to simulate Filippov systems with accurate computing of sliding motions. *Acm Transactions on Mathematical Software*, 2008, 34(3):1~24
- 7 Erazo C, Homer M E, Piiroinen P T, et al. Dynamic Cell Mapping algorithm for computing basins of attraction in planar Filippov systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017, 27(12):1730041
- 8 秦志英, 赵月静, 彭伟. 一个干摩擦 Duffing 振子的滑动分岔分析. *动力学与控制学报*, 2011, 09(4):66~70 (Qin Z Y, Zhao Y J, P W. Sliding bifurcations in a dry-friction Duffing vibrator. *Journal of Dynamics and Control*, 2011, 09(4):66~70(in Chinese))
- 9 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学. 北京: 科学出版社, 2018:87~93 (Xie J H, Yue Y, Li D H. *Nolinear Dynamics*. Beijing: Science Press, 2018: 87~93 (in Chinese))
- 10 秦琅, 谢建华. 基于 Melnikov 方法的单自由度干摩擦振子的混沌分析. *动力学与控制学报*, 2018, 16(3):239~243 (Qin L, Xie J H. Chaos analysis of a single-degree-of-freedom dry friction oscillator based on Melnikov method. *Journal of Dynamics and Control*, 2018, 16(3):239~243 (in Chinese))
- 11 Utkin V I. Sliding modes in control and optimization. Berlin: Springer-Verlag, 1992:14~16

## BIFURCATION OF A CLASS OF GEOMETRICALLY NONLINEAR DRY-FRICTION OSCILLATORS \*

Zeng Chao<sup>†</sup> Xie Jianhua

(*School of Mechanics and Engineering, Southeast Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

**Abstract** The dynamic behaviors of a geometrically nonlinear oscillator with dry friction were studied by the event-driven method. Firstly, the geometrically nonlinear dry-friction oscillation system was modeled as a Filippov system. Then, the algorithm based on the event-driven method was introduced to solve the Filippov system with discrete vector field, which could accurately detect the entry and exit of the sliding motion area. Two different kinds of Poincare cross section were used to reveal the transformation process between different types of periodic motions with sliding process as parameters change. Finally, different types of sliding bifurcation and periodic doubling bifurcation were studied, and the existence of multiple sliding segments in the doubling process was found.

**Key words** event driven, dry friction, Filippov systems, sliding bifurcations, geometric nonlinearity

---

Received 30 November 2019, revised 17 March 2020.

\* The project supported by the National Natural Science Foundation of China(11732014)

<sup>†</sup> Corresponding author E-mail: zengchao99@126.com