第19卷第1期2021年2月
1672-6553/2021/19(1)/047-08

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol.19 No.1
Feb. 2021

雾化器转轴振动特性研究

尹自超　李明　陈波　李映辉[†]

（西南交通大学 力学与工程学院，成都 610031）

摘要　在考虑陀螺力矩、转动惯量和剪切效应等影响因素下，采用Timoshenko梁理论并结合传递矩阵法给出了雾化器转轴的振动特性的计算方法.数值仿真部分采用二节点梁单元建立了雾化器转轴的有限元模型，并进行模拟，其结果验证了本文方法的有效性和高精度，讨论了转速、雾化轮质量以及陶瓷约束刚度等参数对雾化器转轴振动特性的影响.

关键词　陀螺力矩，　Timoshenko梁，　传递矩阵，　参数化分析，　振动特性

DOI：10.6052/1672-6553-2020-041

引言

喷雾干燥技术在相关产业已广泛运用[1-3].国内常用的雾化形式有气流喷嘴式雾化、压力式喷嘴雾化和旋转式雾化，其中旋转式喷雾器在工业上运用最广泛[4].转轴是旋转式喷雾器的重要部件，其转速可达（1~4）×10^4 r/min，此转速范围已超过一阶临界转速，甚至达到二、三阶临界转速[1].为解决转轴位于临界转速时的共振问题，唐等[5]基于传统的两点支撑模型提出了三点支撑模型.黄等[6]对三点支撑轴系进行了数值研究，给出了轴承在工作转速下振动节点的布置原则，有效避开了转轴的临界共振点.传递矩阵法在转子动力学发展史上占有重要地位，霍尔兹（Holzer）利用传递矩阵法解决了多圆盘转子扭振问题的初参数法[7]，而梅克斯泰德（Myklestad）和蒲尔（Prohl）将传递矩阵法用于求解转子的弯曲振动问题[8,9]。传递矩阵法具有占用空间小，算法简洁，矩阵维数不随系统自由度的增加而增大等优点，使其成为解决转子动力学问题的一个快速而有效的方法.

目前文献中未见讨论转速、雾化轮质量以及约束刚度等参数对转轴振动特性的综合影响，本文将综合考虑以上因素对雾化器转轴振动特性进行分析.

1　雾化器转轴模型

对图1(a)所示雾化器结构，为研究其转轴振动特性，可将雾化器转轴简化为图1(b)示由转轴、上下轴承约束、陶瓷约束和雾化轮组成的系统.将质量连续分布的转轴离散为有n个集中质量的自由度系统，相邻两节点用无质量的弹性轴段连接，上下轴承约束和陶瓷约束简化为刚度分别为k_1、k_2和k_3的支撑弹簧，上下轴承间距为L，雾化轮简化为集中质量$m^{(d)}$，如图1(c)所示.

2　计算原理

2.1　等效质量与转动惯量

对图2(a)所示等截面轴段的质量及转动惯量为：

$$\left.\begin{aligned}&m_j=m_j^{(d)}+\frac{1}{2}(ul)_{j-1}+\frac{1}{2}(ul)_j,\ J_{pj}=J_{pj}^{(d)}+\frac{1}{2}(j_pl)_{j-1}+\frac{1}{2}(j_pl)_j\\&J_{dj}=J_{dj}^{(d)}+\left(\frac{1}{2}j_dl-\frac{1}{12}ul^3\right)_{j-1}+\left(\frac{1}{2}j_dl-\frac{1}{12}ul^3\right)_j\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

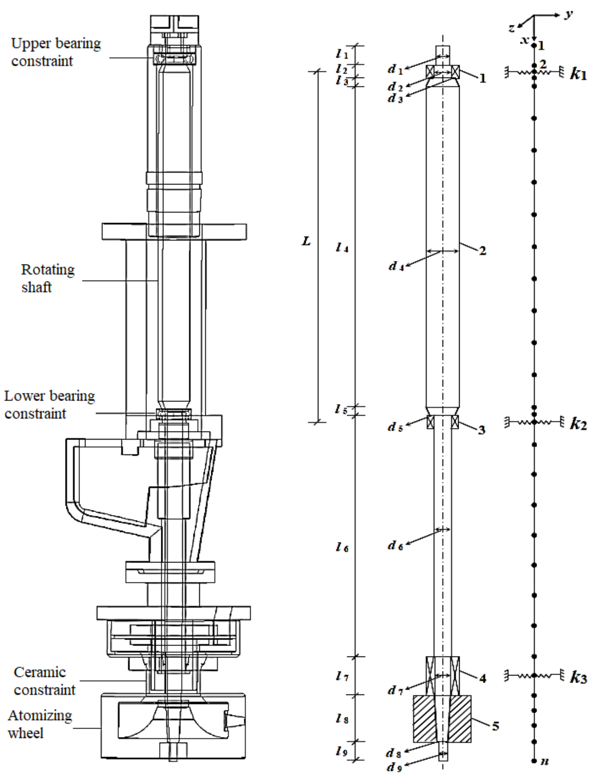
其中，

$$u_j=\rho\pi r_j^{\ 2},\ j_{pj}=\frac{1}{2}u_jr_j^{\ 2},\ j_{dj}=\frac{u_j}{12}(3r_j^{\ 2}+l_j^{\ 2})\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

式中m_j、J_{pj}和J_{dj}分别为简化到第j个节点处的质量、极转动惯量和直径转动惯量，$m_j^{(d)}$、$J_{pj}^{(d)}$和$J_{dj}^{(d)}$分别为第j个节点上的集中质量、以及由集中质量产生的极转动惯量和直径转动惯量，ρ为转轴材料密度，u_j、j_{pj}、j_{dj}、r_j和l_j分别为第j个轴段单位长的质量、极转动惯量、直径转动惯量、轴段半径和轴段总长度.

2019-11-04收到第1稿，2019-12-29收到修改稿.

† 通讯作者 E-mail：yhli2007@sina.com



(a)雾化器转轴结构 (b)转轴简化 (c)转轴离散

(a)Atomizer shaft structure (b)Shaft simplified (c)Rotary shaft discrete

图 1 雾化器转轴结构和简化图

1—上轴承约束;2—转轴;3—下轴承约束;4—陶瓷约束;5—雾化轮

Fig.1 Atomizer shaft structure and simplified diagram

1—Upper bearing constraint;2—Rotating shaft;3—Lower bearing constraint;4—Ceramic constraint;5—Atomizing wheel

若第j轴段由n个截面不同的子轴段组成,如图 2(b)所示,将第j轴段的质量和转动惯量附加在轴段的两端,轴段简化为只有刚度的等截面弹性轴,则:

$$\left.\begin{aligned}
&m_j^R=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k c_k a_k}{l_j},\ m_j^L=\sum_{k=1}^{n}u_k c_k-m_j^R,\\
&J_{pj}^R=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k^2+(l_j-a_k)^2}j_{pk}c_k\\
&J_{pj}^L=\sum_{k=1}^{n}\frac{(l_j-a_k)^2}{a_k{}^2+(l_j-a_k)^2}j_{pk}c_k\\
&J_{dj}^R=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2}{a_k^2+(l_j-a_k)^2}\left[j_{dk}c_k+\frac{1}{12}u_k c_k^3-u_k c_k a_k(l_j-a_k)\right]\\
&J_{dj}^L=\sum_{k=1}^{n}\frac{(l_j-a_k)^2}{a_k^2+(l_j-a_k)^2}\left[j_{dk}c_k+\frac{1}{12}u_k c_k^3-u_k c_k a_k(l_j-a_k)\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{2}$$

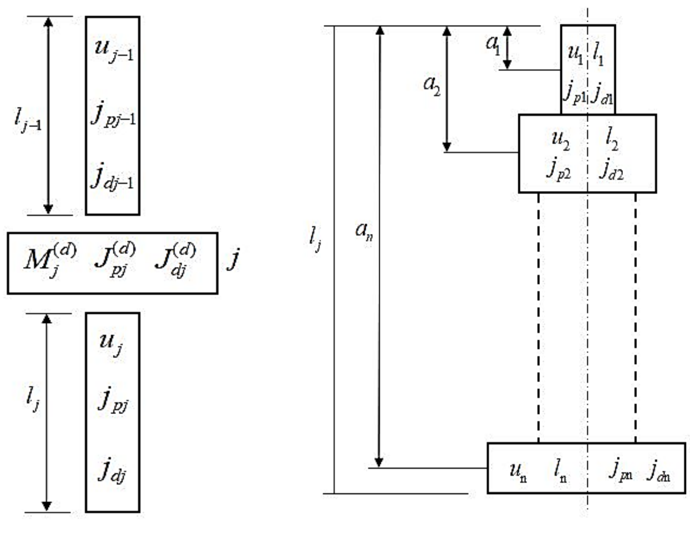
式中c_k、a_k和l_j分别为子轴段的单位长度、子轴段的质心到该轴段最上端截面的距离和整个轴段的总长.对于第j个节点,集中质量和转动惯量分别为:

$$m_j=m_j^{(d)}+m_j^L+m_{j-1}^R,J_{pj}=J_{pj}^{(d)}+J_{pj}^L+(J_p^R)_{j-1},$$
$$J_{dj}=J_{dj}^{(d)}+J_{dj}^L+(J_d^R)_{j-1} \tag{3}$$

2.2 轴段间传递关系

对第i轴段及该轴段上下两节点受力如图 3 所示,上下两个节点编号分别为i和i+1,此轴段两端的截面挠度y、转角θ、弯矩M和剪力Q关系为:

$$y_{i+1}^L=y_i^R+\theta_i^R l_i+\left(\frac{l_i^2}{2(EI)_i}\right)M_i^R+\frac{l_i^3}{6(EI)_i}\left(1-\frac{6(EI)_i}{(\kappa GA)_i l_i{}^2}\right)Q_i^R \tag{4}$$



(a)等截面 (b)变截面

(a)Uniform cross section (b)Variable cross section

图 2 等截面和变截面轴段的质量和转动惯量

Fig.2 Mass and moment of inertia of equal and variable cross section

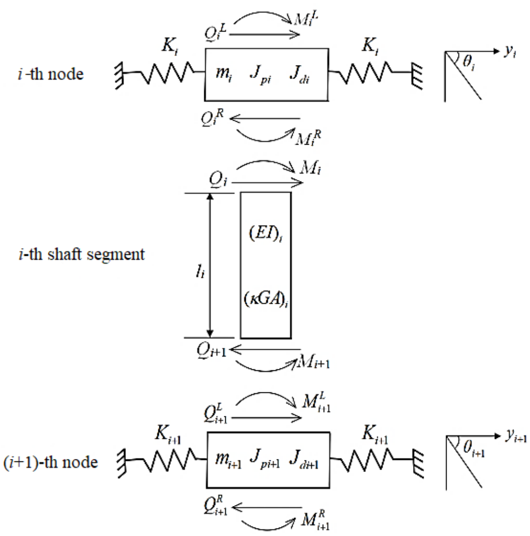


图3　第 i 个轴段受力图

Fig.3　Force diagram of the ith shaft segment

$$\theta_{i+1}^{L} = \theta_i^{R} + \frac{l_i}{(EI)_i} M_i^{R} + \left(\frac{l_i^{\ 2}}{2(EI)_i}\right) Q_i^{R} \tag{5}$$

$$M_{i+1}^{L} = M_i^{R} + Q_i^{R} l_i \tag{6}$$

$$Q_{i+1}^{L} = Q_i^{R} \tag{7}$$

式中 $(EI)_i$ 为轴段截面抗弯刚度, $(G)_i$ 为剪切弹性模量, $(A)_i$ 为轴段横截面积, $(\kappa)_i$ 为截面形状系数,对空心圆截面取2/3,实心圆截面取0.886.截面状态向量用 $\{\delta\}$ 表示为

$$\{\delta\}_{i+1}^{L} = \begin{bmatrix} y_{i+1}^{L} & \theta_{i+1}^{L} & M_{i+1}^{L} & Q_{i+1}^{L} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

$$\{\delta\}_{i}^{R} = \begin{bmatrix} y_{i}^{R} & \theta_{i}^{R} & M_{i}^{R} & Q_{i}^{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

由式(4)~(7)可将式(8)和式(9)建立如下关系:

$$\{\delta\}_{i+1}^{L} = \left[T_F\right]_i \{\delta\}_i^{R} \tag{10}$$

其中 $[T_F]_i$ 是由式(4)~(7)得到的系数矩阵

$$\left[T_F\right]_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i & \dfrac{l_i^2}{2(EI)_i} & \dfrac{l_i^3}{6(EI)_i}\left(1 - \dfrac{6(EI)_i}{(\kappa GA)_i l_i^2}\right) \\ 0 & 1 & \dfrac{l_i}{(EI)_i} & \dfrac{l_i^2}{2(EI)_i} \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

式(11)为第 i 轴段的传递矩阵,而对第 i 节点挠度 y、转角 θ、弯矩 M 和剪力 Q 关系为

$$y_i^{R} = y_i^{L} \tag{12}$$

$$\theta_i^{R} = \theta_i^{L} \tag{13}$$

$$M_i^{R} = M_i^{L} + (J_{pi}\frac{\Omega}{\omega} - J_{di})\omega^2 \theta_i^{L} \tag{14}$$

$$Q_i^{R} = (m_i\omega^2 - k_{ti}) y_i^{L} + Q_i^{L} \tag{15}$$

式中 k_{ti} 为节点处的弹簧刚度, $J_{pi}\Omega\omega$ 为陀螺力矩.节点 i 的状态向量 $\{\delta\}$ 为

$$\{\delta\}_{i}^{R} = \begin{bmatrix} y_{i}^{R} & \theta_{i}^{R} & M_{i}^{R} & Q_{i}^{R} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$\{\delta\}_{i}^{L} = \begin{bmatrix} y_{i}^{L} & \theta_{i}^{L} & M_{i}^{L} & Q_{i}^{L} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

由式(12)~(15)可将式(16)和式(17)建立如下关系

$$\{\delta\}_i^{R} = \left[T_S\right]_i \{\delta\}_i^{L} \tag{18}$$

其中 $[T_S]_i$ 是由式(12)~(15)得到的系数矩阵

$$\left[T_S\right]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(J_{pi}\dfrac{\Omega}{\omega} - J_{di}\right)\omega^2 & 1 & 0 \\ m_i\omega^2 - k_{ti} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

式(19)即为第 i 节点的传递矩阵,将式(18)代入式(10)有

$$\{\delta\}_{i+1}^{L} = \left[T_F\right]_i \left[T_S\right]_i \{\delta\}_i^{L} = \left[T\right]_i \{\delta\}_i^{L} \tag{20}$$

$$\left[T\right]_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & \dfrac{l_i^2}{2(EI)_i} & \dfrac{l_i^3}{6(EI)_i}\left(1 - \dfrac{6(EI)_i}{(\kappa GA)_i l_i^2}\right) \\ T_{21} & T_{22} & \dfrac{l_i}{(EI)_i} & \dfrac{l_i^2}{2(EI)_i} \\ l_i(m_i\omega^2 - k_{ti}) & \left(J_{pi}\dfrac{\Omega}{\omega} - J_{di}\right)\omega^2 & 1 & l_i \\ m_i\omega^2 - k_{ti} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

式(21)为第 i 轴段的最终传递矩阵,其中

$$\begin{aligned} T_{11} &= 1 + \frac{l_i^{\ 3}}{6(EI)_i}\left(1 - \frac{6(EI)_i}{(\kappa GA)_i l_i^{\ 2}}\right)(m_i\omega^2 - k_{ti}), T_{12} = l_i + \frac{l_i^{\ 2}}{2(EI)_i}\left(J_{pi}\frac{\Omega}{\omega} - J_{di}\right)\omega^2, \\ T_{21} &= \frac{l_i^{\ 2}}{2(EI)_i}(m_i\omega^2 - k_{ti}), T_{22} = 1 + \frac{l_i}{(EI)_i}\left(J_{pi}\frac{\Omega}{\omega} - J_{di}\right)\omega^2 \end{aligned} \tag{22}$$

重复运用(20)式可得

$$\{\delta\}_{n+1}^{R}=\left[T_{S}\right]_{n+1}\{\delta\}_{n+1}^{L}=\left[T_{S}\right]_{n+1}[T]_{n}\cdots [T]_{3}[T]_{2}[T]_{1}\{\delta\}_{1}^{L}=[T]\{\delta\}_{1}^{L} \tag{23}$$

其中

$$[T]=\left[T_{S}\right]_{n+1}[T]_{n}\cdots[T]_{3}[T]_{2}[T]_{1} =\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34}\\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44}\end{bmatrix} \tag{24}$$

式(24)为整个雾化器转轴的传递矩阵,它是一个4×4阶方阵,n表示轴段总数.当转轴两端自由时,两端截面状态向量为

$$\{\delta\}_{1}^{L}=\left[y_{1}^{L}\quad \theta_{1}^{L}\quad 0\quad 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

$$\{\delta\}_{n+1}^{R}=\left[y_{n+1}^{R}\quad \theta_{n+1}^{R}\quad 0\quad 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

将式(25)、(26)代入(23)有

$$\begin{bmatrix}y_{n+1}^{R}\\ \theta_{n+1}^{R}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & 0 & 0\\ T_{21} & T_{22} & 0 & 0\\ T_{31} & T_{32} & 0 & 0\\ T_{41} & T_{42} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{1}^{L}\\ \theta_{1}^{L}\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{27}$$

由式(27)有

$$T_{31}y_{1}^{L}+T_{32}\theta_{1}^{L}=0 \tag{28}$$

$$T_{41}y_{1}^{L}+T_{42}\theta_{1}^{L}=0 \tag{29}$$

式(28)、(29)为一个齐次代数方程组,该齐次代数方程组存在非零解,因此,其系数行列式为零,故得转轴系统的频率方程为

$$\Delta(\omega^{2})=\begin{vmatrix}T_{31} & T_{32}\\ T_{41} & T_{42}\end{vmatrix}=0 \tag{30}$$

式(30)为两端自由雾化器转轴的频率方程.

3 数值仿真和讨论

3.1 验证

为验证方法的正确性,采用二节点梁单元建立有限元模型进行模拟(如图4),并与本文方法进行对比,有限元模型中单元数为10628,节点数为10629.雾化器转轴几何和材料参数如表1和表2所示.

验证中选取雾化器转轴转速Ω=0r/s,子轴段数n=30,上下轴承约束用刚性支撑,两轴承间距L=516.50mm,陶瓷约束刚度k_3=20000N/mm,雾化轮半径$r^{(d)}$=105mm,高$h^{(d)}$=90mm,质量$m^{(d)}$=0.0184t,由雾化轮质量产生的$J_p^{(d)}$和$J_d^{(d)}$分别为116.7t·mm²和73.70t·mm².表3给出了本文方法和有限元计算的雾化器转轴前五阶固有频率,可见本文方法具有较高的精度.

图4 雾化器转轴的有限元模型

Fig.4 Finite element model of atomizer shaft

表1 雾化器转轴几何参数

Table 1 Geometry parameters of the atomizer shaft

l/(mm)	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9
	30	17	11	480	11	361	58	67	28
d/(mm)	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
	20	25	35	46	35	25	24	16	12

表2 雾化器转轴材料参数

Table 2 Material parameters of the atomizer shaft

E/MPa	G/MPa	ρ/(t·mm^{-3})
2.11×10^5	8.08×10^4	7.9×10^{-9}

表3 本文解和有限元计算结果对比

Table 3 Comparison of the present solutions and finite element method (FEM) calculation results

n	Present/Hz	FEM/Hz	Error/%
1	42.728	44.007	2.993
2	140.521	145.590	3.607
3	353.419	353.490	0.020
4	607.673	602.750	0.817
5	1342.341	1344.900	0.191

下面讨论各种参数对雾化器转轴振动特性影响,计算中转轴几何参数和材料参数仍如表1和表2所示.

3.2　转速的影响

图 5 给出了转速 Ω 对雾化器转轴前四阶涡动频率的影响,计算中上下轴承约束为刚性约束 $k_1=k_2=\infty$,陶瓷约束刚度 k_3=20000N/mm,雾化轮质量 $m^{(d)}$=0.0184t. 由图 5 可见,由于存在陀螺力矩的影响,随着转速 Ω 的增大,转轴前四阶涡动频率出现正进动与反进动的现象,而当 Ω=0r/s 时,陀螺力矩消失,此时正进动频率等于反进动频率. 当转速增加时,对于正进动,陀螺力矩使转轴的变形减小,提高了转轴的刚度,进而使其频率增大;而对反进动,陀螺力矩使转轴的变形增大,降低了转轴的刚度,进而使其频率减小,特别地,转速对高阶(如三、四阶)频率影响相对较小.

3.3　雾化轮质量的影响

图 6 给出了雾化轮质量 $m^{(d)}$ 对雾化器转轴前四阶涡动频率的影响,计算中 Ω=200r/s,上下轴承约束为刚性约束,$k_1=k_2=\infty$,陶瓷约束刚度 k_3=20000N/mm. 由图 6 可见,随雾化轮质量的增大,前四阶涡动频率都在减小,当雾化轮质量继续增大时,正进动与反进动频率曲线逐渐变缓,说明其对涡动频率的影响逐渐减小. 从图中亦可见,雾化轮质量的变化对一、二阶涡动频率影响较为明显,当雾化轮的质量增加至 0.045t 时,其涡动频率变缓趋势并不明显;而雾化轮质量的变化对三、四阶涡动频率影响较小,当雾化轮的质量增加至 0.045t 时,其涡动频率的变化趋势较为平缓.

3.4　陶瓷约束刚度对临界转速的影响

图 7 给出了陶瓷约束刚度 k_3 对雾化器转轴前四阶临界转速的影响,计算中 Ω=200r/s,上下轴承约束为刚性约束 $k_1=k_2=\infty$,雾化轮质量 $m^{(d)}$=0.0184t. 由图 7 可见,陶瓷约束刚度 k_3 小于 5000N/mm 时对一阶临界转速有明显影响,二阶、三阶和四阶临界转速整体上随陶瓷约束刚度 k_3 的增大呈缓慢增加趋势,其中二、四阶临界转速增加幅值较大,而第三阶涡动频率因不动点与下轴承约束重合,导致陶瓷约束刚度 k_3 的变化对三阶临界转速影响很小.

4　结论

本文基于 Timoshenko 梁理论,利用传递矩阵法计算了雾化器转轴前四阶涡动频率,研究了参数对其振动特性的影响,得到以下结论:

(1)转速大于 0r/s 时,由于存在陀螺力矩的影响,雾化器转轴的前四阶涡动频率出现正进动与反进动的现象,且转速对高阶(如三、四阶)涡动频率

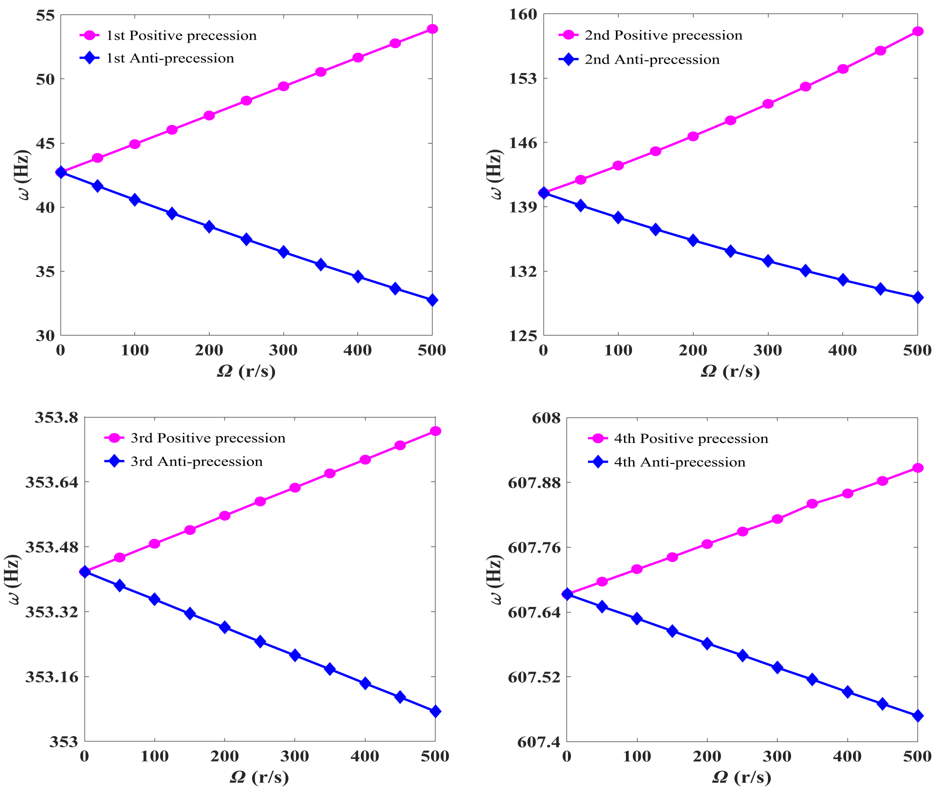


图 5　转速对涡动频率的影响

Fig. 5　The effects of speed on the vortex frequency

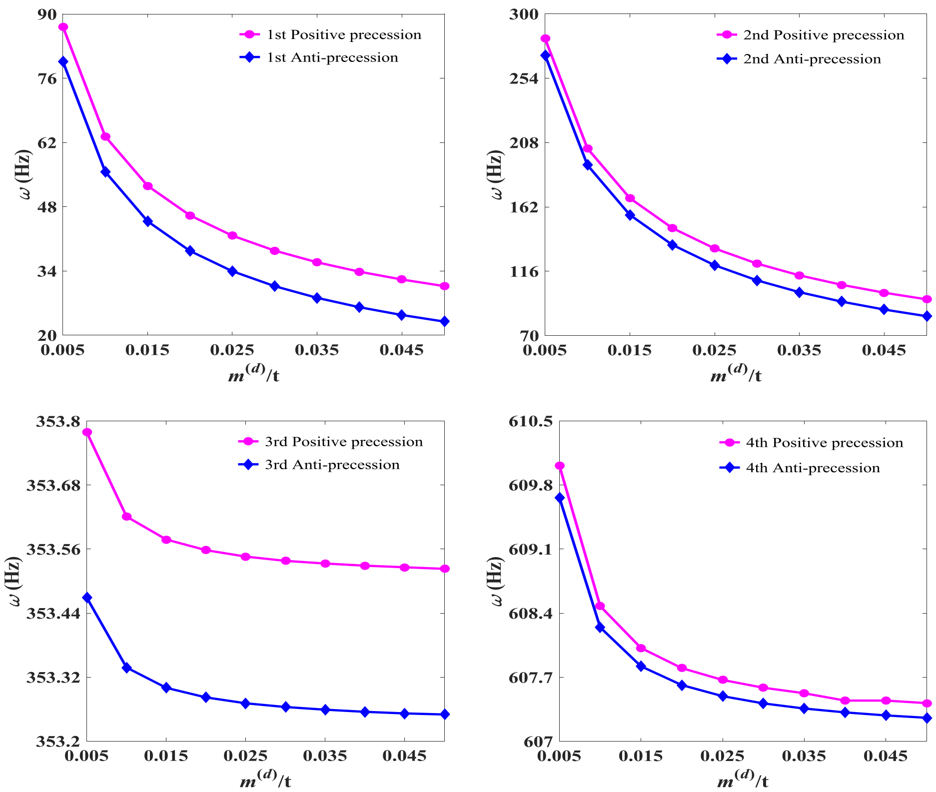


图 6 雾化轮质量对涡动频率的影响

Fig. 6 The effects of atomization wheel mass on the vortex frequency

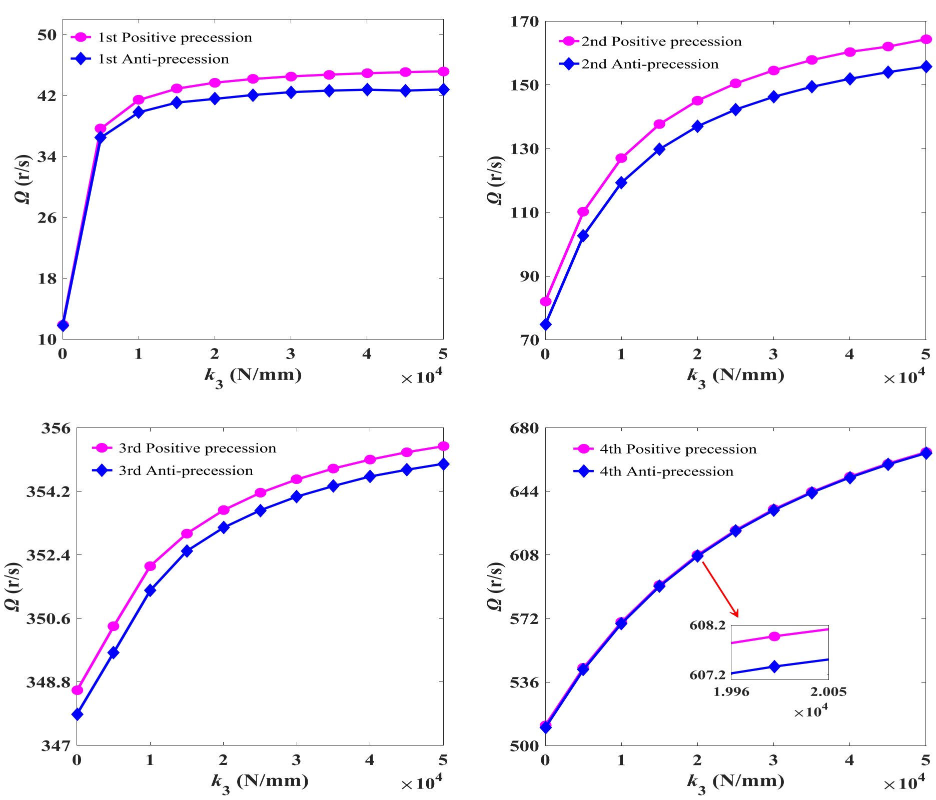


图 7 陶瓷约束刚度对临界转速的影响

Fig. 7 The effects of ceramic confinement stiffness on the critical speed

影响较小;

(2)雾化轮质量增大,雾化器转轴的前四阶涡动频率减小,且雾化轮质量对一、二阶涡动频率影响较大,而对三、四阶涡动频率影响较小;

(3)陶瓷约束刚度对雾化器转轴二、四阶临界转速有明显影响,对第三阶临界转速影响最小.

参 考 文 献

1 于才渊, 王宝和, 王喜忠. 喷雾干燥技术. 北京:化学工业出版社, 2013 (Yu C Y, Wang B H, Wang X Z. Spray drying technology. Beijing: Chemical Industry Press, 2013 (in Chinese))

2 韩磊, 唐金鑫, 王宗濂. 我国高速雾化机的进展及与国外雾化机性能的比较. 干燥技术与设备, 2005, 3(4): 166~169(Han L, Tang J X, Wang Z L. Development of rotary atomizer in China and performance comparison of rotary atomizer made in China and overseas. *Drying Technology and Equipment*, 2005, 3(4): 166~169 (in Chinese))

3 王宗濂, 唐金鑫. 我国高速离心式喷雾干燥机研制进展. 生物质化学工程, 1987, 10 (8): 2~5(Wang Z L, Tang J X. Development of high-speed centrifugal spray dryer in China. *Biomass Chemical Engineering*, 1987, 10 (8): 2~5 (in Chinese))

4 王鹏程. 垃圾发电用旋转雾化器设计理论研究[硕士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2007(Wang P C. Study on rotary atomizer design theory in refuse incineration generating electricity [Master Thesis]. Chongqing: Chongqing University, 2007 (in Chinese))

5 唐金鑫, 王宗濂. 高速离心式雾化机的动态特性测试与力学模型分析. 第三届全国干燥技术交流会干燥佳话论文集. 28 (Tang J X, Wang Z L. Dynamic characteristics test and mechanical model analysis of high-speed centrifugal atomizer. In: The 3rd National Dry Technology Exchange Conference on Drying Dissertations. 28 (in Chinese))

6 黄立新. 高速离心式雾化机主轴系统力学特性研究[硕士学位论文]. 北京: 中国林业科学研究院, 1991 (Huang L X. Research on mechanical characteristics of Spindle system of high speed centrifugal atomizer [Master Thesis]. Beijing: Chinese Academy of Forestry, 1991 (in Chinese))

7 Holzer H. Die Berechnung der Drehschwingungen. *Julius Springer*, 1921: 25

8 Myklestad N O. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibration of airplane wings and other types of beams. *Journal of the Aeronautical Sciences* (*Institute of the Aeronautical Sciences*), 1944, 11 (2): 153 ~ 162

9 Prohl M A. A general mothod for calculation critical speed of flexible rotors, *Trans. ASME*, 1945, 12(3): 142 ~ 148

STUDY ON VIBRATION CHARACTERISTICS OF ATOMIZER SHAFT

Yin Zichao Li Ming Chen Bo Li Yinghui†

(*School of Mechanics and Engineering*, *Southwest Jiaotong University*, *Chengdu* 610031, *China*)

Abstract A computational procedure for vibration analysis of an atomizer shaft was proposed by combining the Timoshenko beam theory and the transfer matrix method. Firstly, the rotating shaft of the atomizer was modeled as a Timoshenko beam by considering the gyro moment, moment of inertia as well as shear effect, and the natural frequencies were calculated by the transfer matrix method. Then, the finite element model of the rotating shaft was established by using two-node beam element, and finite element simulations were carried out to verify the accuracy of the proposed procedure. Finally, the effects of the rotating speed, the quality of the atomizing wheel and the ceramic restraint stiffness on the natural frequencies were discussed by numerical simulations.

Key words gyroscopic moment, Timoshenko beam, transfer matrix, parametric analysis, vibration characteristics

Recived 4 November 2019, revised 29 December 2019.

† Corresponding author E-mail: yhli2007@sina.com